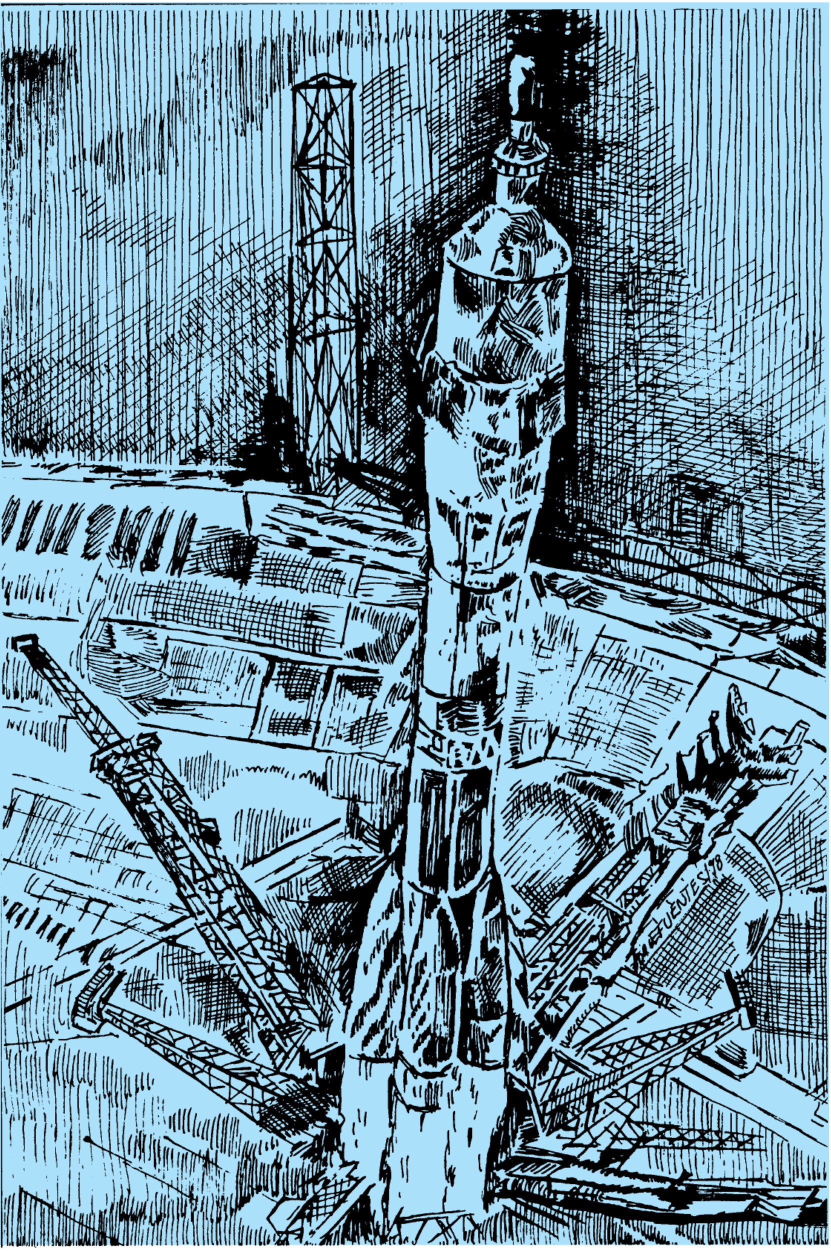
LIBRO DE DISTRIBUCIÓN GRATUITA. PROHIBIDA SU VENTA



Física

10.º grado

FÍSICA

Décimo grado

Prof. Juan Núñez Viera
Lic. Carlos Sifredo Barrios
Dr. José Luis Hernández Báez
M. Sc. Esther María Vilaú Pérez

Editorial
Pueblo y Educación

Este libro forma parte del conjunto de trabajos dirigidos al Perfeccionamiento Continuo del Sistema Nacional de Educación en la Educación General Politécnica y Laboral. Ha sido elaborado por un colectivo de autores integrado por metodólogos, maestros, profesores y especialistas, y revisado por la subcomisión correspondiente de la Comisión Nacional Permanente para la revisión de Planes, Programas y Textos de Estudio del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas del Ministerio de Educación.

Edición: Prof. Caridad Arce Crespo
Diseño: María Elena Gil Mc Beath
Ilustración: Arturo Caballero Ayala
Corrección: Eneida Reyes García

ISBN 978-959-13-0711-8

EDITORIAL PUEBLO Y EDUCACIÓN
Ave. 3ra. A No. 4601 entre 46 y 60,
Playa, La Habana, Cuba. CP 11300.
epe@enet.cu

PREFACIO

En la elaboración de este libro de texto resultaron fuentes de inestimable valor los libros de Física de décimo y decimosegundo grados antes vigentes, de los cuales se tomó textualmente la mayoría de los problemas relacionados con las temáticas del actual texto. También algunos epígrafes del texto de *Física 9no. grado* sirvieron de base para el tratamiento de algunos contenidos de los capítulos; otros, tomados del mismo libro, fueron reelaborados para lograr su mejor comprensión.

Se desea expresar el profundo agradecimiento a todos los compañeros que, de una forma u otra, han hecho posible la publicación de esta obra. En particular, se reconoce el cuidadoso trabajo de revisión y las valiosas sugerencias de los compañeros: Licenciado Raúl Portuondo Duany profesor titular de la Facultad de Física de la Universidad de La Habana; candidato a doctor Lisardo García Ramis, investigador del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas; profesor auxiliar Emilio del Busto, Decano de la Facultad de Física del ISP "Enrique José Varona"; y de la candidata a doctora Amalia Alonso, profesora titular del Instituto Superior Politécnico "José A. Echevarría"; así como de las profesoras Sara García, del IPU "Cepero Bonilla" de Ciudad de La Habana y Teresa González, del IPUEC "General Mayía Rodríguez".

También se agradecen los valiosos aportes de los compañeros profesores candidatos a doctor Pablo Valdés Castro, Rolando Valdés y Carlos Julio Sierra Mora del ISP "Enrique José Varona". Deseamos reconocer la valiosa colaboración brindada en la preparación de los materiales para el proceso editorial, por el profesor Raúl Santos, de la provincia Habana.

AL ALUMNO

Con este libro se inicia para ti el estudio sistemático de la Física a un nivel cualitativamente superior que el de Secundaria Básica, el cual te prepara para que en el futuro puedas cursar con éxitos tus estudios universitarios, de manera que es fundamental tu preocupación y dedicación por el estudio desde el primer día de clases.

En este texto se exponen los elementos fundamentales del estudio de los fenómenos mecánicos: Cinemática y Dinámica de la partícula, Leyes de conservación, Oscilaciones y Ondas mecánicas. Además, se te brindan las instrucciones necesarias para la realización de los trabajos de laboratorio.

Para la consolidación del material es de gran importancia que respondas las tareas recomendadas al final de cada epígrafe y las generales.

Por último, queremos expresarte que este libro es el resultado del esfuerzo de un numeroso grupo de trabajadores que esperan de ti el estudio sistemático, la asimilación y aplicación de su contenido.

ÍNDICE

Capítulo 1
INTRODUCCIÓN

1.1 *La Física y su importancia*

El hombre, a medida que conquistaba sus medios de subsistencia y actuaba sobre el mundo circundante, se fue familiarizando con los fenómenos naturales. Así aparecieron gradualmente las ciencias que estudian la naturaleza, entre ellas la Física.

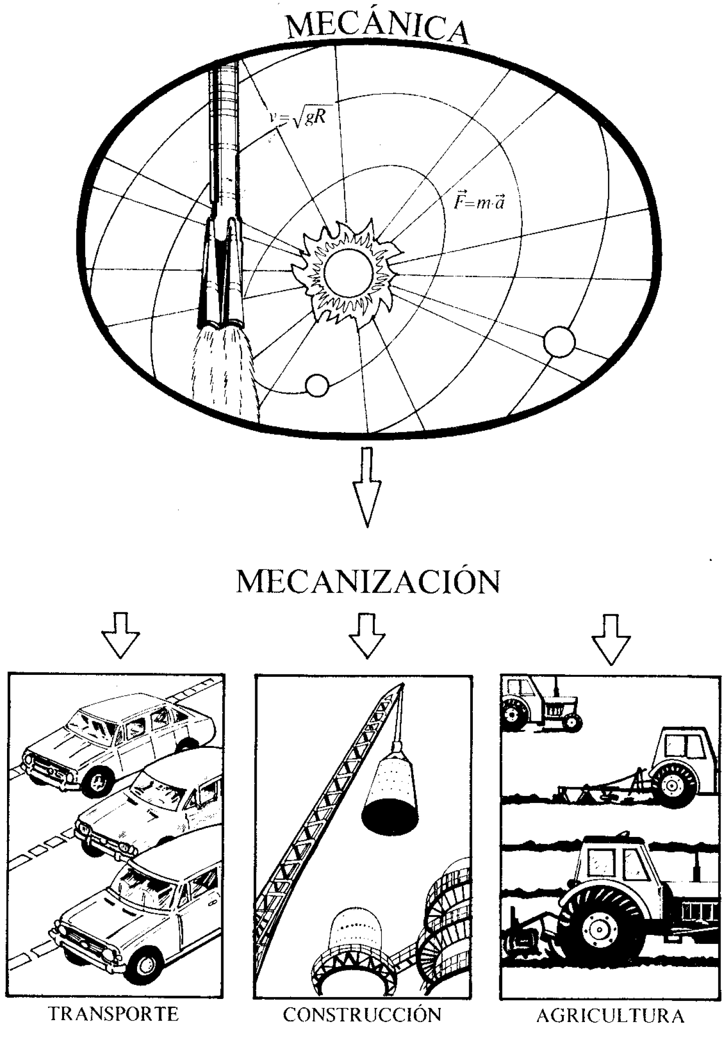
Al estudiar los fenómenos del mundo circundante, el hombre pudo darse cuenta de que están sujetos a leyes y de la estrecha relación de unos fenómenos con otros; por ejemplo, la caída de los cuerpos y el movimiento de la Luna alrededor de nosotros son consecuencias de la atracción que la Tierra ejerce sobre ellos.

En su práctica cotidiana, el hombre observó que las leyes de la naturaleza son expresión de determinadas propiedades de los objetos y que son completamente independientes de su voluntad y de sus deseos. Sin embargo, el hecho de que las leyes de la naturaleza sean independientes de nosotros no significa de ninguna manera que seamos impotentes ante ellas. Al contrario, los hombres necesitan de la Física precisamente para su actividad práctica y transformadora de la sociedad.

Hoy día la Física permite responder múltiples preguntas, gracias al conocimiento de esas leyes, como por ejemplo, ¿cómo es posible que un satélite se mantenga girando alrededor de la Tierra sin precipitarse hacia ella?, ¿cómo podemos diseñar uno?, ¿cómo ponerlo en órbita?, ¿cómo podríamos ir a Marte?

La representación que el hombre tiene del mundo ha evolucionado a través de los siglos. Estos cambios, debido a su actividad creativa, han marchado paralelamente con el avance de la ciencia, que no solo le ha permitido explicar múltiples fenómenos, sino que ha hecho posible utilizarlos en la práctica en beneficio de la humanidad.

Actualmente la Física nos proporciona los principios básicos en los que se sustenta la tecnología contemporánea, así por ejemplo, el descubrimiento de las leyes que rigen el comportamiento de las ondas electromagnéticas constituyen el precedente del impetuoso desarrollo de las telecomunicaciones, la radio y la televisión. Los descubrimientos de la Física sobre la estructura del átomo y del núcleo atómico, han garantizado el desarrollo sostenido de la energética nuclear, que ha de contribuir en gran medida a solucionar los problemas energéticos del siglo XXI, sustituyendo paulatinamente a las fuentes actuales de energía, sobre la base del empleo de hidrocarburos en extinción (fig. 1.1).



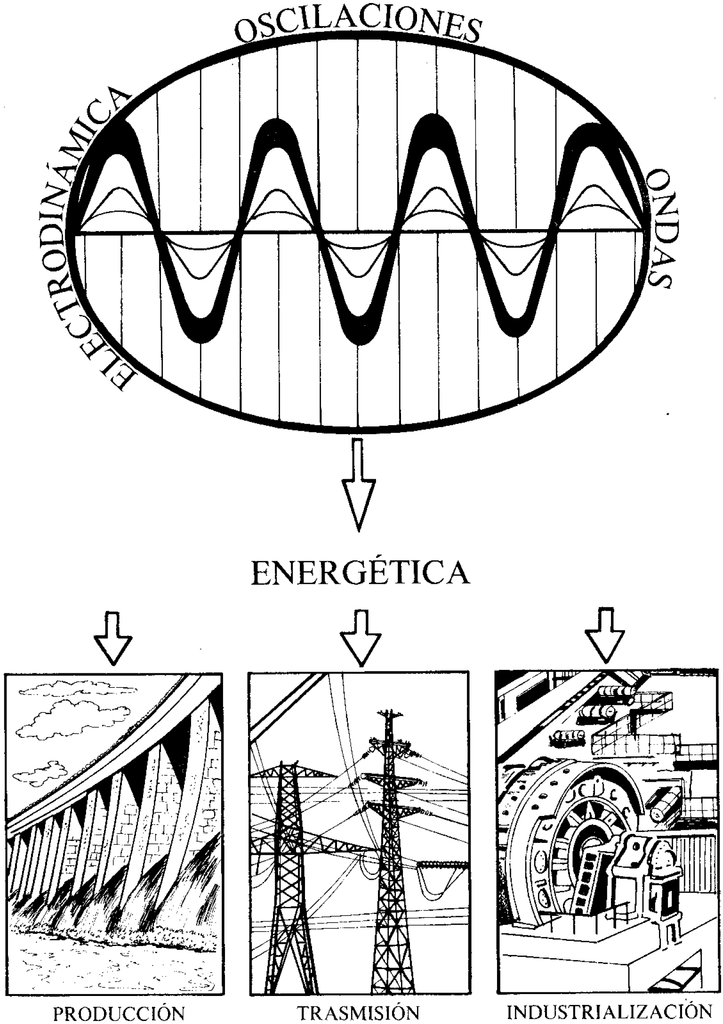


Fig. 1.1

1.2 *Medición en Física*

Nadie duda de la existencia de los objetos que nos rodean y, por tanto, de la naturaleza. El mundo exterior lo percibimos a través de los sentidos que son los medios naturales de información. Los órganos de los sentidos nos ayudan a conocer cómo son los objetos, cuáles son sus propiedades; pero si solo nos limitamos a las impresiones recibidas por medio de ellos, podemos formarnos una imagen equivocada, o no tener una idea exacta de estos, por eso en algunos casos tenemos que valernos de instrumentos que extiendan el poder de nuestros sentidos para poder conocer mejor los fenómenos naturales.

Si observamos dos cuerpos en movimiento, por ejemplo dos automóviles, es posible estimar cuál de los dos se mueve con mayor rapidez. Pero si nos preguntan en qué proporción es mayor la rapidez de uno con respecto al otro, no podemos dar una respuesta precisa con el simple uso de nuestros sentidos, porque estos no nos permiten evaluar la rapidez de cada cuerpo, ni nos suministran una información cuantitativa de los fenómenos observados.

Por tanto, no podemos dar respuesta a la pregunta hasta que poseamos los instrumentos de medida adecuados para determinar el valor de las respectivas magnitudes y esto sólo se puede obtener con el resultado de una serie de cuidadosas observaciones y, más concretamente, de una serie de mediciones. En realidad, la medición constituye una de las operaciones más importante de todo trabajo científico.

Medir una magnitud física es en principio determinar el valor numérico de ella por medio de la comparación con otra de la misma clase tomada como referencia o patrón que se elige convencionalmente.

1.3 *Medición de intervalos de tiempo*

Para describir el comportamiento de los fenómenos y las propiedades de los objetos, en Física, hacemos uso de diversas magnitudes, tales como longitud, masa, tiempo, volumen, fuerza y otras más. No obstante, la medición del tiempo asume una importante función, pues los fenómenos que acontecen en la naturaleza, de una forma u otra están relacionados con el transcurso del tiempo.

En realidad, tal y como tu experiencia cotidiana te muestra, cuando nos referimos a la medida del tiempo, lo que en verdad hacemos es determinar el intervalo entre dos sucesos, comparándolo con el número de veces que ocurre un proceso periódico que tomemos como referencia; por ejemplo, el tiempo que transcurre entre la salida y la puesta del Sol, la duración entre dos palpitaciones del corazón u otro fenómeno que se repite a intervalos iguales.

Por consiguiente, es necesario utilizar instrumentos que marquen sucesivos intervalos iguales de tiempo, o aprovechar fenómenos que se repitan a intervalos regulares de tiempo, algo que ocurre una y otra vez de modo regular, algo que sea periódico, es decir, nuestro procedimiento en la medición del tiempo radicará en la repetición de algún evento aparentemente periódico y compararlo con lo que queremos medir, por ejemplo, el giro de la Tierra en torno al Sol, la rotación de la Tierra sobre sí misma.

Para los trabajos científicos de orden experimental, lo que más interesa es disponer de medios adecuados para la determinación correcta de intervalos de tiempo. Esta finalidad la cumple satisfactoriamente el reloj de péndulo, el cronómetro, el contador digital, el estroboscopio electrónico y finalmente, para trabajos de alta precisión, el reloj atómico.

1.4 *Interpretación de los resultados de una medición directa*

En el curso de Física has realizado mediciones de longitud o de tiempo, o de cualquier otra magnitud. Sin embargo, es posible que tales mediciones no las hayamos realizado con el propósito de utilizar e interpretar sus resultados.

Tratemos de determinar e interpretar el valor obtenido de las mediciones del intervalo de tiempo que transcurre mientras un péndulo efectúa una oscilación completa, es decir, el tiempo que transcurre cuando comienza su movimiento en A, va hasta B y regresa de nuevo, o sea, su período T (fig. 1.2).

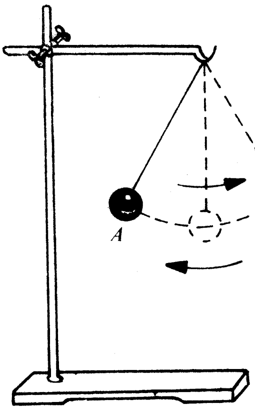


Fig. 1-2

Usando un cronómetro, determinemos directamente su período. Repitamos el proceso de medición 3 veces y anotemos los resultados:

$T_1 = 2.2$ s.
$T_2 = 2.0$ s.
$T_3 = 2.2$ s.

Como verás, los valores de los períodos obtenidos difieren. ¿Por qué?

Volvamos ahora a determinar el período de péndulo empleando otro procedimiento. En este caso determinemos el tiempo que el péndulo emplea en dar 10 oscilaciones completas y, sobre esta base, calculemos su período:

$n = 10$ oscilaciones
$t = 21{,}4$ s

$$T = \frac{t}{n} = \frac{21{,}4 \text{ s}}{10}$$

$T_4 = 2{,}14$ s.

Si repetimos ahora la medición para 15 oscilaciones obtenemos:

$t = 31{,}9$ s
$n = 15$ oscilaciones
$T_5 = 2{,}11$ s.

¿En este caso nos aproximamos más a la determinación del valor del período?

Observa que todos estos resultados han sido obtenidos con valores que has podido determinar mediante una medición. El hecho de que los resultados experimentales no coincidan exactamente, puede hacerte pensar que tienes poca habilidad al hacer mediciones o que ha influido el procedimiento empleado.

A fin de analizar con más detalle el hecho de que existen discrepancias en los resultados obtenidos, veamos en qué medida influye el instrumento de medición empleado.

Utilicemos ahora otro registrador de tiempo por ejemplo, el contador digital (fig. 1.3) que puede determinar intervalos de tiempo hasta de una milésima de segundo (0,001 s).

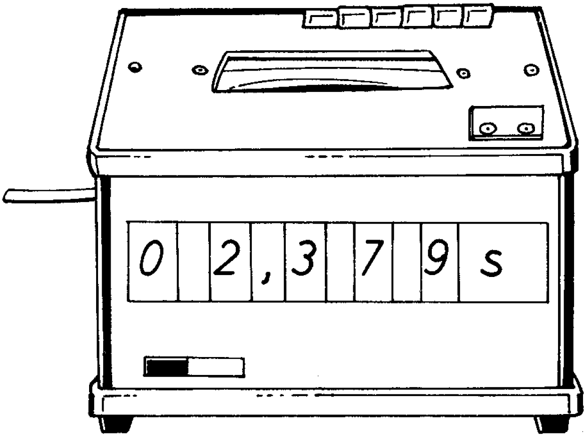


Fig. 1.3

¿Se puede afirmar que el valor obtenido en este caso es exacto?

En los resultados obtenidos influyen varios factores: la habilidad del que realiza la medición (destreza manual, agudeza visual), los métodos empleados y las características del instrumento; por tanto, cualquier medición no es absolutamente exacta, siempre estará acompañada de una determinada imprecisión que proviene de los factores anteriormente señalados.

Entonces, ¿qué procedimiento vamos a emplear para expresar un resultado experimental? Al dar a conocer el resultado de una medición es necesario, indicar la imprecisión que implica tal medición.

¿Cómo se determina la imprecisión?

En Matemática has trabajado con números que pueden contener varias cifras decimales, por ejemplo: 9,746 23. Sin embargo, en Física, al hacer mediciones, por ejemplo, de longitud o de tiempo, es muy difícil establecer con exactitud más de dos o tres decimales, de acuerdo con la precisión del instrumento de medición utilizado. Así vimos que al determinar el período del péndulo con el cronómetro, obtuvimos diferentes valores: 2,2 s; 2,0 s; 2.2 s.

Esto nos indica que en una medición, el número de dígitos indica los valores en los cuales el experimentador se encuentra seguro. Esos dígitos que se reportan se denominan *cifra significativa.*

En nuestra primera experiencia no podíamos aceptar más de una cifra significativa, debido a que el cronómetro sólo nos permite estimar intervalos con una apreciación de hasta dos décimas de segundo.

En Física, escribir una cantidad de cifras adicionales, de los cuales no tenemos seguridad, no tiene sentido. Los números que no son resultado de mediciones sí pueden tener exactitud ilimitada.

Si quisiéramos determinar valores de intervalos aún más cortos de tiempo, como el período de rotación de las aspas de un ventilador que no se puede obtener con un cronómetro, se utiliza el estroboscopio electrónico formado por una lámpara de destellos (fig. 1.4a) y un generador de pulsos de frecuencia variable (fig. 1.4b).

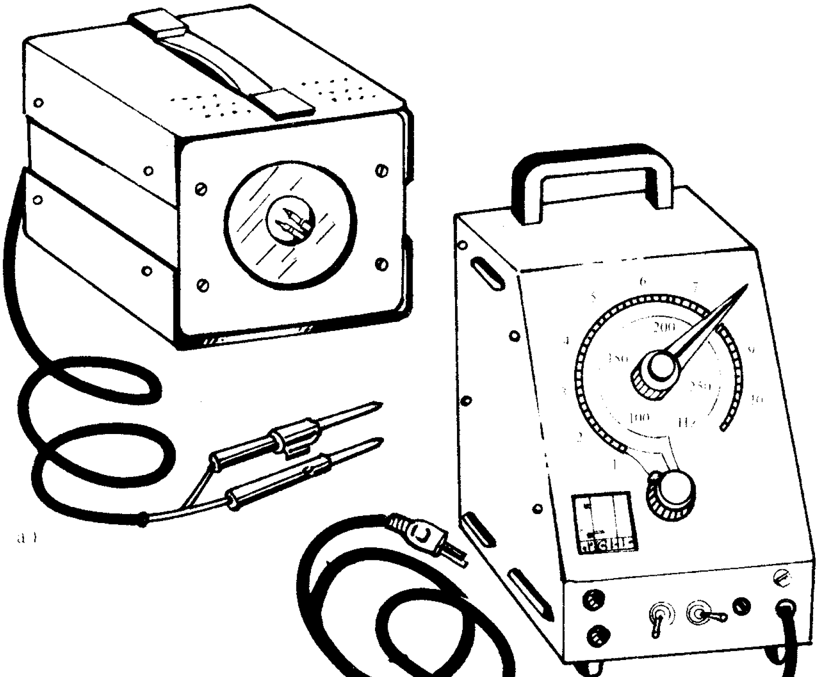


Fig. 1.4

Si colocamos la lámpara de destellos del estroboscopio frente al ventilador, los destellos luminosos emitidos por él, iluminan al ventilador con periodicidad. Si se regula la frecuencia de emisión de los destellos de forma que coincida con la que gira el ventilador, entonces este se ilumina exactamente cada vez que su hélice da una vuelta completa y por esta razón, si hacemos una marca en una de las paletas de la hélice, ella se verá siempre en la misma posición, es decir, parece ser que está detenida. ¿Se puede determinar el período del ventilador con este método? Si el ventilador se ve detenido, cuando el estroboscopio está emitiendo 60 destellos en un segundo, entonces el tiempo que media entre dos destellos sucesivos es igual al que emplea la hélice en dar una vuelta y es igual a $1/60 = 0.016$ s.

Teniendo en cuenta el valor mínimo de tiempo que puedes determinar con tu reloj y el mínimo de tiempo que puedes determinar con el estroboscopio, indica cuántas veces aumenta tu capacidad para registrar o determinar intervalos de tiempo, usando el estroboscopio. ¿Mediante qué formas podrías fotografiar el movimiento de un cuerpo y registrar las posiciones de dicho cuerpo en intervalos iguales de tiempo?

Tareas

1. ¿Qué entiendes por medir intervalos de tiempo?
2. Sabemos que cada medida es en última instancia una aproximación. ¿Es esto cierto cuando un bodeguero nos despacha un determinado número de kilogramo de arroz en su balanza? ¿Es verdad cuando un vendedor cuenta el número de huevos en una caja? ¿Por qué?
3. ¿Cuántas veces es menor el intervalo de tiempo mínimo que se puede medir con el contador digital en comparación con un cronómetro cuya menor división equivale a 0.2 s?
4. Una cuerda de guitarra vibra con una frecuencia de 60 Hz. ¿Qué método emplearías para medir el período de oscilación de la cuerda?
5. ¿Qué sucede si la cuerda de la guitarra se ilumina con destellos de una frecuencia doble a la de ella?
6. Las cintas de películas se filman generalmente a razón de 24 imágenes por segundo. Justifica el número de 24 sabiendo que la persistencia de las impresiones luminosas sobre el ojo es de aproximadamente 0.05 s.
7. Construye un péndulo con un trozo de hilo o cordel y un cuerpo de poco peso. Ajusta su longitud hasta que tarde un segundo en realizar una oscilación completa (ida y vuelta). ¿Qué error come-

te este péndulo durante un minuto? ¿Qué fracción del tiempo total representa este error?

TRABAJO DE LABORATORIO 1. Medición de intervalos cortos de tiempo

Otra forma de medir intervalos de tiempo pequeños y poder, además, determinar la posición de un cuerpo en movimiento a intervalos regulares, se basa en el empleo del cronometrador de cinta. Este instrumento de medición del tiempo está constituido por un vibrador que oscila a una frecuencia fija y tiene un dispositivo que permite marcar sobre una cinta de papel las distancias que recorre un cuerpo en movimiento.

En este trabajo de laboratorio aprenderás a calibrar un cronometrador de cinta.

Instrumentos y materiales: cronometrador, cinta (2 m), fuente de corriente directa (C.D.), cables de conexión eléctrica, mordaza, cronómetro de cuerda.

Indicaciones para el trabajo

1. Determina la apreciación del cronómetro de cuerda.
2. Analiza la estructura del cronometrador de cinta.
3. De acuerdo con las indicaciones que te dé tu profesor, conecta el cronometrador con la fuente de corriente directa.
4. Pasa una porción de cinta por la zona de impresión del cronometrador y analiza cómo se marca al poner el equipo en funcionamiento.
5. Invierte la cinta y a unos 30 cm de uno de sus extremos, traza una raya con lápiz. Coloca la cinta en su posición de trabajo. Pon en funcionamiento el equipo y tira de la cinta, de manera que se mueva con poca velocidad y con un movimiento aproximadamente uniforme. Cuando la raya pase por la zona de registro, un compañero tuyo debe poner en funcionamiento el cronómetro, el cual será detenido cuando la cinta salga de la zona de registro. Esta actividad debes ensayarla dos o tres veces antes de poner en marcha el cronometrador.
6. Determina la cantidad de marcas en la cinta, a partir de la raya, después de realizar la actividad con el cronometrador funcionando. Con este dato y el tiempo medido con el cronómetro, deter-

mina el tiempo que emplea el cronometrador en realizar dos marcas contiguas.
7. Resume los resultados del experimento.

1.5 *Medición de longitud*

La noción de longitud nace posiblemente de la percepción de la distancia entre puntos en el espacio. La humanidad, desde sus primeros años de existencia, debía afrontar el problema de la medición de distancias, problema que trató de solucionar eligiendo unidades naturales que comparó con las longitudes que debía medir. Este es el procedimiento que aún se usa.

En mayor o menor medida, cada uno de nosotros tiene una noción de distancia. Puedes realizar la siguiente experiencia. Trata de medir la longitud de una barra determinada por el número total de puños contenidos en ella (fig. 1.5).

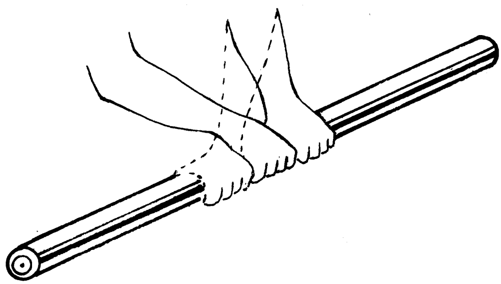


Fig. 1.5

Compara la longitud que obtuviste con la que obtuvieron tus compañeros.

Si analizas las respuestas obtenidas, podrás apreciar que existen entre ellas divergencias más o menos apreciables dependiendo del tamaño del puño, de la precisión de que pudiste unir o no tus puños, entre otras causas.

De la experiencia realizada podrás darte cuenta que la manera de medir longitud es empezar con un puño y contar, o empezar con un pulgar y contar. Empiezan con una unidad y cuentan.

Hemos fundado todas nuestras medidas en un esquema sencillo. Para medir el tamaño de algún objeto, primero se elige una unidad que puede ser la longitud que queramos. Luego para medir un intervalo mayor que la unidad, "se coloca" la unidad en el intervalo que se mide, tantas veces como quepa. Esto es lo que hacemos normalmente con una regla graduada. Para lo que quede después de contar, o para medir, una cantidad menor que la unidad, no hacemos más que dividir la unidad en partes iguales menores, y tomar tantas de ellas como haga falta para alcanzar la magnitud dada.

Es importante señalar que al utilizar un instrumento de medición, por ejemplo, una regla graduada para medir la distancia entre dos puntos, obtenemos un conocimiento objetivo de esa distancia. La idea que nos formemos entonces de la separación de esos dos puntos no depende de nosotros y será la misma para cualquier persona que utilice una regla igual.

Durante muchos siglos reinó una verdadera anarquía en el uso de las unidades de longitud, donde cada pueblo o nación poseía las suyas propias.

El primer intento de unificación de las unidades fue el Sistema Métrico. Existen diferentes sistemas de unidades. Ellos dependen de las magnitudes físicas que se definan como fundamentales, y también de las unidades de medida de estas.

En la actualidad se emplea el Sistema Internacional de Unidades (SI). Este sistema se construye sobre la base de siete magnitudes físicas fundamentales entre las que se encuentran la longitud y el tiempo.

En el SI, como unidad de longitud, se establece el metro.

Tareas

8. Simultáneamente con otros compañeros de tu aula, haz una estimación "a ojo" del largo, el ancho y el volumen del aula, y de la superficie de la pizarra. Comparen los valores que han obtenido por apreciación con los que se obtienen utilizando un instrumento de medida, por ejemplo, el metro.

9. La relación entre las sombras proyectadas por ti y por un árbol es de 1 a 3. Si tu estatura es de 1,65 m, ¿cuál es la altura de un árbol?

10. En el supuesto que tu altura es de 160 cm, ¿cuál sería la relación entre esta medida y:

    a) el diámetro de un protón que es aproximadamente de 10^{-15} m?;
    b) la distancia de la Tierra al Sol que es de $1{,}5 \cdot 10^{8}$ km?

1.6 *Fuentes de error en el proceso de medición*

Ninguna medición física puede dar, como hemos visto, un valor absolutamente exacto de una magnitud física. Las posibilidades de las mediciones tienen un límite. Incluso, con los más perfeccionados medios que nos ofrece la técnica, se obtiene siempre valores numéricos afectados por un margen de error, por dos motivos totalmente distintos.

Por un lado es prácticamente imposible, salvo en casos muy raros, utilizar instrumentos para los usos corrientes, cuya calibración se haya realizado utilizando las máximas posibilidades de la técnica. Suponiendo que fuera posible leer los instrumentos con toda exactitud, el resultado tendría un error debido a las calibraciones erróneas o los defectos de los aparatos de medición. Por ejemplo, si el extremo de la regla está algo gastado y no se distingue la posición exacta del cero, esto determina que se cometa en cada medición un error, el cual estará presente en todos los intentos que realicemos para determinar la longitud de un objeto.

Otra fuente de errores está relacionada con el propio proceso de medición. Una de sus causas radica en la persona que realiza la observación, ante todo, en la limitada capacidad de la descriminación de sus ojos en la lectura y, eventualmente, en la de su oído al escuchar y en la destreza de su mano al efectuar la medida. Por ejemplo, al determinar el tiempo de oscilación de un péndulo con el cronómetro, tuvimos determinados límites en la exactitud de la medida debido fundamentalmente a la destreza manual para manipular el cronómetro, la agudeza visual para determinar la posición que debe ocupar el péndulo y poner en marcha o detener el cronómetro. Otra fuente de error fue el tiempo de reacción entre la observación de la posición y la respuesta motora para accionar el cronómetro.

1.7 *Errores en la medición. Estimado del valor medio aritmético y su error*

Consideremos el valor numérico obtenido en la medición del tiempo de oscilación de un péndulo. Este valor numérico es un número real. Sabemos que el resultado de una medición está condicionado por el instrumento de medición, en el cual aparece necesariamente un cierto límite de apreciación, dado por el mínimo valor distinguible en una medición. Por ejemplo, si se tiene un cronómetro graduado en décima de segundo, el número que expresa el valor de un intervalo de tiempo sólo estará asegurado hasta la cifra correspondiente a la décima. Entonces, en el valor 15,256 2 s no tendrá sentido las tres últimas cifras, pues solo serán producto de la imaginación.

Supongamos que realicemos una serie de n mediciones de una misma magnitud que ha dado los valores numéricos M_1, M_2, M_3 ... M_n; todos ellos expresados en cifras significativas exclusivamente. ¿Qué hacemos con estos valores? Vamos a plantearnos claramente el problema. Tenemos una serie de mediciones de M con n resultados en general diferentes. Sabemos, además, que la magnitud dada puede tener en realidad un solo valor numérico. ¿Cómo podemos elaborar de esos n valores, uno solo, que esté lo más cerca posible del "verdadero valor", el cual desconocemos? En términos más precisos, ¿cómo podemos tener la información más exacta de esos M números mediante uno solo?

Dada la posibilidad de realizar múltiples mediciones, para estimar el valor más exacto se escoge el método de la media aritmética.

La media aritmética se determina por:

$$\bar{M} = \frac{1}{n} (M_1 + M_2 + \ldots + M_n)$$

y por supuesto, mientras mayor sea el número de veces que se realice la medición, más nos podremos acercar al valor "real" de la medición, pues los errores son cada vez menos determinantes al ser grande el número de mediciones efectuadas.

Al determinar el tiempo de oscilación de un péndulo, supongamos que obtuviste las mediciones siguientes:

M_1 = 2,4 s
M_2 = 2,2 s
M_3 = 2,0 s
M_4 = 2,2 s
M_5 = 2,0 s.

Entonces la media aritmética del tiempo de oscilación del péndulo se determina por:

$$\bar{M} = \frac{2{,}4 + 2{,}2 + 2{,}0 + 2{,}2 + 2{,}0}{5} = 2{,}16 \approx 2{,}2 \text{ s}$$

$$\bar{M} = 2{,}2 \text{ s.}$$

Como nuestro instrumento de medición (cronómetro) nos aseguraba hasta las décimas de segundo, el valor medio aritmético no puede ser más exacto que hasta las décimas; pero la división realizada dio más órdenes de decimales, entonces se impone hacer un redondeo empleando las reglas estudiadas en el curso de Matemática.

En Física, junto con el valor medio aritmético, es útil reportar los límites del error (o imprecisión) de este. Este error está influido tanto por los errores del instrumento (errores de construcción y otros), como por los del propio proceso de medición (errores del observador, fluctuaciones de las condiciones ambientales, del método empleado y otros). Si predominan los del primer tipo, entonces se reporta como error la menor división de la escala del instrumento en cuestión. Si predominan los del segundo tipo, se realiza el cálculo del error medio aritmético como se indica a continuación.

Primero hallamos la desviación en cada medida $|\overline{M} - M_1| = \Delta M$ y para cada caso la desviación será:

$$|\bar{M} - M_1| = \Delta \bar{M}_1$$

$$|\bar{M} - M_2| = \Delta \bar{M}_2$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$|\bar{M} - M_n| = \Delta \bar{M}_n.$$

Luego se calcula el error medio aritmético de la forma siguiente:

$$\Delta\bar{M} = \frac{\Delta M_1 + \Delta M_2 + \ \dots \ + \Delta M_n}{n}.$$

Tanto al error del instrumento, como al error medio aritmético que se reporta junto con el valor medio aritmético de la magnitud medida, se les llama *error absoluto* de la medición. El resultado de la medición se expresa de la forma:
valor medio aritmético $\pm$ error absoluto.

Para el caso de la determinación del tiempo de oscilación del péndulo procederemos de la siguiente manera:

$$\Delta M_1 = |2{,}2 - 2{,}4| = 0{,}2$$
$$\Delta M_2 = |2{,}2 - 2{,}2| = 0{,}0$$
$$\Delta M_3 = |2{,}2 - 2{,}0| = 0{,}2$$
$$\Delta M_4 = |2{,}2 - 2{,}2| = 0{,}0$$
$$\Delta M_5 = |2{,}2 - 2{,}0| = 0{,}2$$

$$\Delta M = \frac{0{,}2 + 0{,}0 + 0{,}2 + 0{,}0 + 0{,}2}{5} = 0{,}12 \approx 0{,}1.$$

Como en este caso el error medio aritmético es la mitad del error del instrumento, predomina el del instrumento que es el que se reporta:

$\bar{M} = (2{,}2 \pm 0{,}2)$ s.

En muchas oportunidades se considera también en el proceso de medición, el error relativo, el cual se determina dividiendo el error absoluto por el valor medio aritmético de la medida. El error relativo significa qué proporción del valor medio aritmético representa el error cometido en la medición.

Tarea

11. Construye un péndulo similar al de la tarea 7. Toma cinco valores del tiempo de oscilación del péndulo con un cronómetro (o en su lugar con tu reloj de pulsera).
    a) Determina el valor medio aritmético de tu medición.
    b) Determina el error absoluto.

1.8 *Vectores*

Conocemos que el resultado de la medición de una longitud se expresa mediante un número y la correspondiente unidad. La longitud de una pizarra, por ejemplo, puede ser de 3,5 m. Asimismo, la duración de cierto acontecimiento, como la caída de un cuerpo desde cierta altura, puede ocurrir en 2,3 s. La medición de estas magnitudes, la longitud, el tiempo y también la masa y el volumen, entre otras, quedan bien determinadas, cuando las expresamos mediante un número. Las magnitudes que poseen estas características reciben el nombre de escalares.

Sin embargo, constantemente nos encontramos con magnitudes que con el solo conocimiento de su valor, no es suficiente para caracterizarlas. Por ejemplo, el movimiento de un avión no queda bien determinado con expresar que su velocidad es de 400 km/h, ya que el avión puede moverse hacia el norte, o hacia el sur o hacia cualquier otro rumbo. En este caso, para caracterizar la velocidad, es necesario indicar además de su valor numérico, su dirección y sentido.

A las magnitudes físicas con estas características se le llaman *vectoriales.*

Un vector se representa por un segmento de recta orientado, cuya longitud indica en determinada escala su valor o módulo; la flecha, su dirección y la punta de esta, su sentido.

En la figura 1.6 el avión representado viaja hacia el este con una velocidad de módulo 400 km/h. Observa que en la escala utilizada 1 cm equivale a 100 km/h y la punta de la flecha indica su sentido, en este caso hacia el este. Se ha tomado como referencia la indicada a la derecha del esquema. Además, al vector velocidad lo hemos representado por el símbolo $\vec{v}$ que es la forma más común de representar este tipo de magnitud.

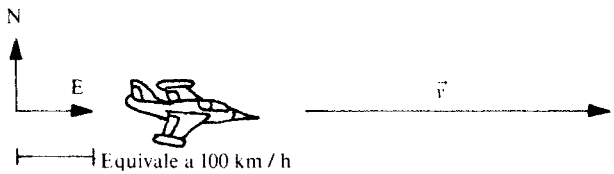


Fig. 1.6

En la figura 1.7 los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ y $\vec{v}_4$ representan las velocidades de cuatro automóviles. ¿Cuáles son las características de cada una de ellas?

En la figura 1.7b se representan por medio de los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ las velocidades de dos automóviles en el momento de cruzarse por una carretera. Compara las velocidades de ellos.

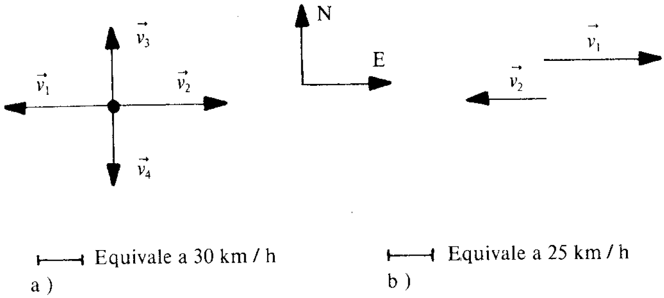


Fig. 1.7

En la figura 1.8 se muestran los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ diferentes entre sí, tanto por sus módulos, como por sus direcciones y sentidos.

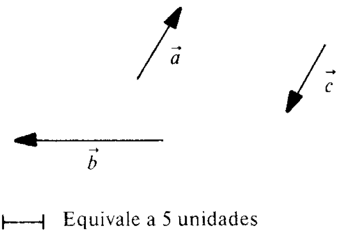


Fig. 1.8

¿Cuál es el módulo de cada vector? ¿Qué relación existe entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$?

1.9 *Operaciones con vectores*

Con las magnitudes vectoriales al igual que con las escalares, se realizan operaciones de suma, resta, multiplicación; sin embargo, las reglas a las que están sujetos los vectores son diferentes a las empleadas con los escalares. Por ejemplo, si en una balanza colocamos 0,8 kg de arroz y luego le adicionamos 0,4 kg, el resultado que indica la balanza es 1,2 kg, o sea, igual a la suma aritmética de los valores 0,8 y 0,4.

Veamos cómo operar con los vectores.

Suma de vectores

Consideremos que un avión vuela hacia el norte con una velocidad $\vec{v}_1$ de 300 km/h con respecto al aire, y de pronto encuentra una corriente de aire que se mueve hacia el este con una velocidad $\vec{v}_2$ de 100 km/h, como se indica en la figura 1.9. ¿Cómo determinar la velocidad resultante del avión con respecto al suelo?

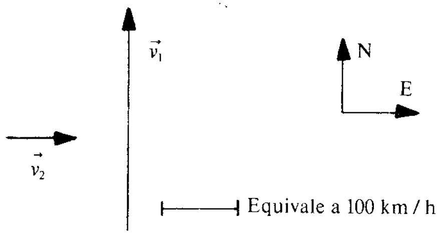


Fig. 1.9

Para determinar la velocidad resultante $\vec{v}_R$ del avión, es necesario sumar vectorialmente las velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, o sea:

$$\vec{v}_R = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

Esta suma la efectuaremos mediante un método geométrico que denominaremos *método del polígono* y que se ejecuta de la forma siguiente:

Se dibuja a escala el vector $\vec{v}_1$, teniendo en cuenta su dirección, sentido y su módulo (fig. 1.10 a). El vector $\vec{v}_2$ se dibuja de forma que su origen quede sobre el extremo del vector $\vec{v}_1$ y se traza también considerando mantener constante su dirección, sentido y módulo (fig. 1.10b). El vector resultante se obtiene uniendo el origen de $\vec{v}_1$ con el extremo de $\vec{v}_2$ (fig. 1.10 c).

El módulo del vector resultante (fig. 1.10d) está determinado por su longitud, que se mide con una regla de acuerdo con la escala adoptada, y por su dirección, que se determina con un semicírculo y está dada por el ángulo Θ.

En nuestro caso, el avión se mueve con respecto al suelo con una velocidad resultante de 320 km/h en una dirección noreste que forma un ángulo de Θ con la dirección norte. Comprueba estos valores en el esquema.

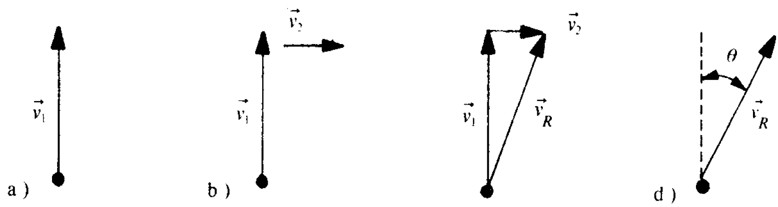


Fig. 1.10

El método general para sumar vectores gráficamente se muestra en la figura 1.11.

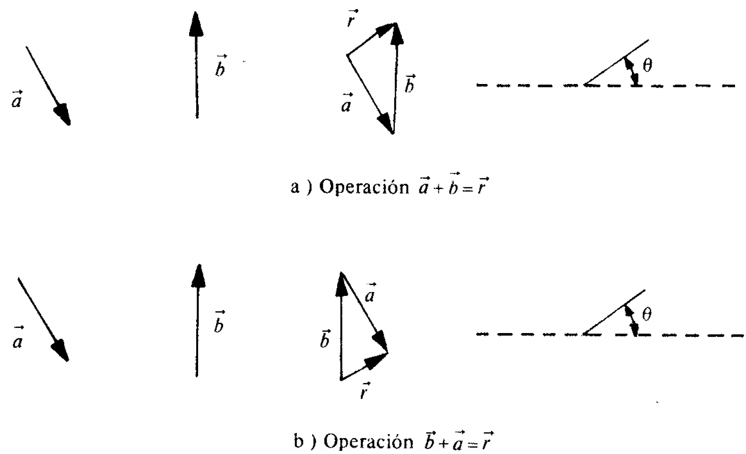


Fig. 1.11

Si comparas las ilustraciones de la figura 1.11, comprabarás que se cumple $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, o sea, la suma de vectores es conmutativa.

Para sumar más de dos vectores se procede de la misma forma, adicionando los vectores de acuerdo con el orden de la operación indicada. En la figura 1.12 se muestra la forma en que se suman los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$.

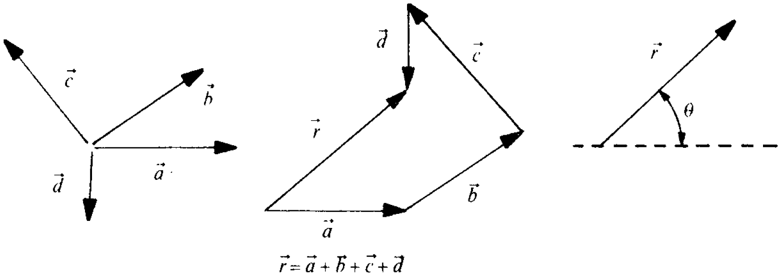


Fig. 1.12

Resta de vectores

En ocasiones resulta necesario restar un vector de otro, por ejemplo del vector $\vec{a}$ restar el vector $\vec{b}$. Para efectuar la operación tomamos el vector $\vec{b}$, pero con el sentido invertido y se lo sumamos al vector $\vec{a}$. Es necesario destacar que el vector $-\vec{b}$ es un vector de igual módulo y dirección que $\vec{b}$, pero de sentido contrario. Luego:

$\vec{r} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ (fig. 1.13).

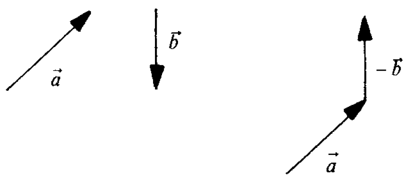


Fig. 1.13

Multiplicación de un vector por un escalar

Supongamos que dos automóviles marchan en el mismo sentido por un tramo recto de una carretera, uno tiene una velocidad de 50 km/h y el otro de 100 km/h. ¿Qué relación existe entre las velocidades de los automóviles?

Es evidente que la velocidad de uno es el doble de la del otro. Si representamos la velocidad de 50 km/h hacia la derecha por $\vec{v}_1$, entonces la velocidad de 100 km/h será $2\vec{v}_1$, es decir, el vector $\vec{v}_1$ se multiplicó por 2.

El vector $2\vec{v}_1$ posee el mismo sentido que el vector $\vec{v}_1$, pero su módulo es el doble (fig. 1.14a).

Si el segundo automóvil se moviera en sentido contrario al primero, entonces su velocidad sería $-2\vec{v}_1$, es decir, el vector $\vec{v}_1$ se multiplica por -2. El vector $-2\vec{v}_1$ es dos veces mayor en módulo que el vector $\vec{v}_1$, pero su sentido es contrario (fig. 1.14b).

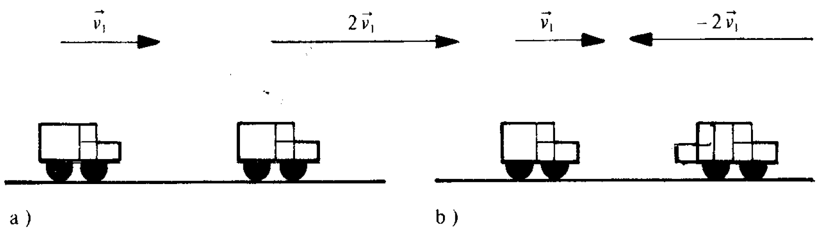


Fig. 1.14

Se denomina producto del vector $\vec{a}$ por el escalar k, al nuevo vector, cuyo módulo es igual al producto del módulo de $\vec{a}$ por el valor del escalar y tiene la misma dirección y sentido que $\vec{a}$ si k es positivo; si k es negativo, su sentido será opuesto.

Descomposición de vectores. Componentes y proyecciones de un vector

Aunque el procedimiento geométrico, basado en el método del polígono, analizando anteriormente es suficiente para obtener la suma de vectores, en muchos casos la exactitud del vector resultante está limitada por la exactitud con que se tracen los segmentos de recta, se midan sus longitudes y los ángulos. Cuando se desea determinar la resultante de un sistema de vectores con exactitud, existe otro método más ventajoso que se basa en la determinación de las componentes y proyecciones de los vectores.

Limitaremos nuestro estudio al caso de vectores ubicados en un plano.

Este método consiste en descomponer cada vector en dos vectores que se denominan *componentes del vector*. La descomposición de vectores en un plano la realizaremos sobre un sistema de ejes rectangulares al que asociaremos un sistema de coordenadas que nos permita, determinar el módulo de los vectores componentes. A estos ejes les denominaremos X y Y.

Cualquier vector $\vec{a}$ que se encuentre en el plano X, Y se puede descomponer en dos vectores: $\vec{a}_x$ paralelo al eje X y $\vec{a}_y$ paralelo al eje Y, como se muestra en la figura 1.15, y reciben el nombre de *componentes rectangulares del vector*.

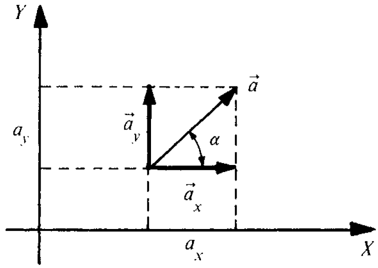


Fig. 1.15

A la longitud a_x, sobre el eje coordenado X, y a la longitud a_y, sobre el eje Y, los denominaremos *proyecciones del vector* $\vec{a}$ sobre los ejes X y Y.

De la observación de la figura 1.15 es fácil comprender que el módulo del vector $\vec{a}$ está relacionado con sus proyecciones sobre los ejes mencionados, mediante la ecuación.

$$a = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}.$$

Hemos utilizado el teorema de Pitágoras ya que el vector $\vec{a}$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene por catetos a los vectores $\vec{a}_x$ y $\vec{a}_y$.

Conociendo el módulo del vector $\vec{a}$ y el valor del ángulo α, se puede obtener las proyecciones a_x y a_y mediante las relaciones trigonométricas para un triángulo rectángulo conocidas de Matemática en noveno grado, es decir:

$$a_x = a \cos \alpha$$
$$a_y = a \text{ sen } \alpha.$$

Por otra parte, si se conocen los valores de a_x y a_y se puede determinar el valor del ángulo α mediante la expresión:

$$\tan \alpha = \frac{a_x}{a_y}.$$

Las proyecciones de un vector son cantidades escalares que pueden tener signo positivo o negativo. Ello depende de su componente. Si la componente $\vec{a}_x$ tiene el mismo sentido que el eje X, la proyección a_x es un número positivo. Si la componente $\vec{a}_x$ es de sentido contrario del eje X, entonces su proyección a_x es un número negativo. Así, por ejemplo, en la figura 1.16, las proyecciones de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ sobre el eje X, o sea, a_x, b_x y c_x son cantidades positivas, mientras que la proyección d_x sobre el mismo eje, es una cantidad negativa. Observa que la proyección del vector $\vec{e}$ sobre el eje X, o sea, e_x, es nula.

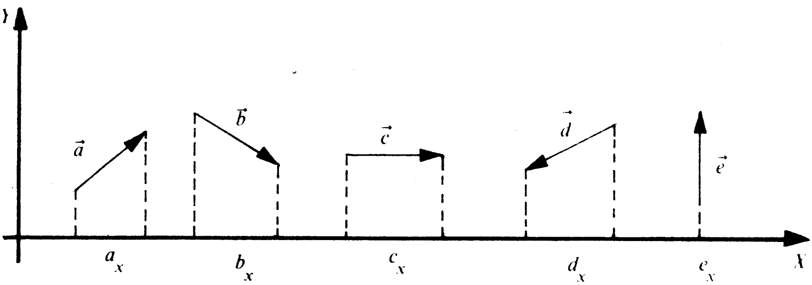


Fig. 1.16

Tarea

12. ¿Qué diferencias existen entre una magnitud escalar y una vectorial?
13. ¿En qué consiste el método para sumar vectores?
14. Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, representados en la figura 1.17, determina:
    a) la suma de ambos vectores,
    b) la diferencia de ambos vectores,
    c) con la ayuda de una regla graduada, los vectores: $2.5\ \vec{a}$; $-3\ \vec{b}$; $-0{,}5\ \vec{a}$.

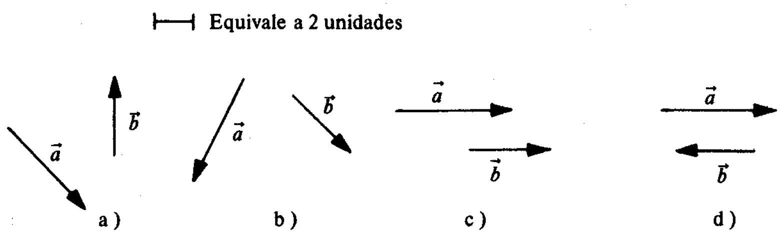


Fig. 1.17

15. Halla la suma de los vectores representados en la figura 1.18.

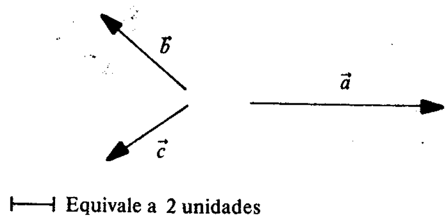


Fig. 1.18

16. ¿A qué denominamos proyección de un vector sobre un eje de coordenadas?

17. Determina el signo de la proyección sobre el eje X de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$ (fig. 1.19).

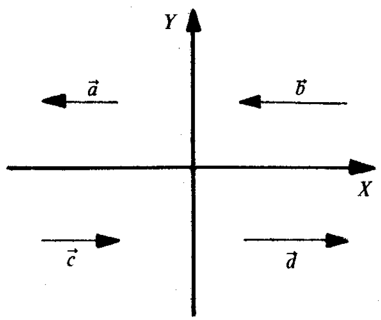


Fig. 1.19

18. Determina la componente de cada vector a lo largo de cada eje Y (fig. 1.20), si:

$$|\vec{A}| = 40 \text{ unidades}$$
$$|\vec{B}| = 50 \text{ unidades}$$
$$|\vec{C}| = 30 \text{ unidades.}$$

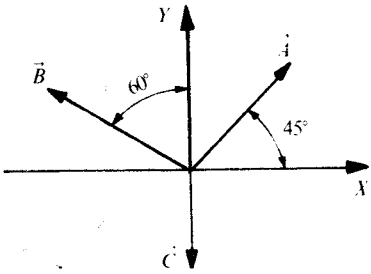


Fig. 1.20

19. Determina las proyecciones A_x y A_y siendo el $|\vec{A}|$ igual a 8 unidades (fig. 1.21).

20. Determina analíticamente el módulo del vector $\vec{A}$, conociendo que A_x y A_y equivalen a 3 y 4 unidades, respectivamente (fig. 1.22).

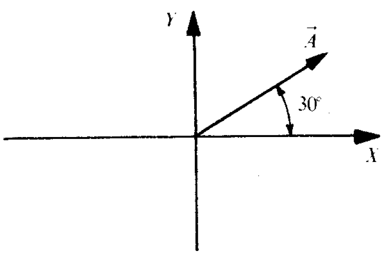


Fig. 1.21

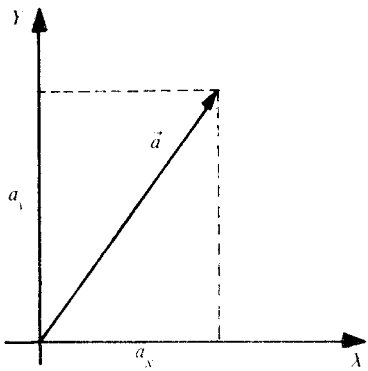


Fig. 1.22

Capítulo 2
CINEMÁTICA

Movimiento rectilíneo uniforme

2.1 *Movimiento mecánico de los cuerpos*

Todo fenómeno ocurre en el mundo en algún lugar y en algún momento. De todos los fenómenos de la naturaleza, el más asequible y el más conocido es el *movimiento mecánico.*

Se denomina movimiento mecánico de un cuerpo a la variación de su posición en el espacio en relación con otros cuerpos en el transcurso del tiempo.

Ejemplos de este tipo de movimiento lo constituyen el de los automóviles, el de las personas, el de los cohetes y aviones, el de la caída de una gota de lluvia y otros muchos más con los que te encuentras a diario. La parte de la Física que se encarga de estudiar los fenómenos propios del movimiento mecánico se denomina *mecánica.* Estudiar el movimiento de los cuerpos significa conocer cómo se moverá el cuerpo. Este estudio corresponde a la *cinemática* que es la parte de la Mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos sin considerar las causas que condicionan el carácter del movimiento.

La tarea fundamental de la cinemática consiste en determinar la posición y el estado de movimiento del cuerpo en cualquier instante. En el mundo circundante todo se encuentra en constante movimiento. Se mueven las personas por las calles de la ciudad, las aves y los animales en el campo, los peces en ríos y mares. Se mueven las máquinas creadas por el hombre, los electrones en las líneas de trasmisión eléctrica, los átomos y las moléculas de los cuales están compuestos los cuerpos.

Sin embargo, si observamos atentamente vemos que alrededor de nosotros existen cuerpos que aparentemente no se mueven. Un libro descansa sobre una mesa, los autos están detenidos en el parqueo, las casas y los edificios están inmóviles, etcétera.

Los ejemplos anteriores no refutan la idea de que todo en el mundo se encuentra en constante movimiento. El problema consiste en que todos los cuerpos inmóviles en relación con la superficie de la Tierra, rotan junto con ella alrededor de su eje y, a su vez, rotan alrededor del Sol y junto con él en el Universo. Además, dentro de todos estos cuerpos se mueven átomos y moléculas.

El *reposo* observado por nosotros en determinados cuerpos siempre es un *reposo relativo*. Los cuerpos en estado de reposo pueden estarse moviendo con relación a otros cuerpos. El movimiento y el reposo de los cuerpos son relativos.

No existe ni puede existir un cuerpo en reposo absoluto.

Te has preguntado alguna vez cómo se mueven las naves cósmicas y los satélites artificiales de la Tierra.

En el curso de Mecánica que se estudia en esta unidad, se brinda los fundamentos de las leyes que permiten calcular la trayectoria de los cohetes, satélites artificiales de la Tierra, de los planetas y de muchos otros cuerpos, y, en especial, la forma en que se procede para determinar la posición de un cuerpo, lo que constituye la tarea fundamental de esta parte de la Física.

Tareas

1. Ejemplifica la aseveración "Todo en el mundo se encuentra en movimiento".
2. ¿A qué se denomina movimiento mecánico?
3. ¿Cuál es la tarea fundamental de la Mecánica?

2.2 *Punto material*

Durante la Secundaria Básica estudiaste el movimiento de traslación de los cuerpos. Conoces que el movimiento de traslación de un cuerpo es aquel movimiento en el que todas las partes del cuerpo se mueven de igual modo.

En esta unidad solo nos referiremos al movimiento de traslación.

Resolver la tarea fundamental de la cinemática: la determinación de la posición de un cuerpo en cualquier instante, precisa que introduzcamos una serie de simplificaciones. Veamos.

Cuando analizamos el movimiento de un cuerpo que se traslada, no es necesario siempre conocer cómo se mueven cada una de las partes que lo componen. Por ejemplo, cuando estudiamos el movimiento de un avión no prestamos atención al movimiento de sus motores, de los pasajeros, etcétera.

Tampoco es necesario determinar la posición de cada una de sus partes cuando las dimensiones del cuerpo son pequeñas en comparación con la distancia que este recorre, o con respecto a la distancia que lo separa de otro cuerpo.

Imaginémonos que un avión vuela entre dos ciudades una distancia de 1 000 km. Como se ve, la distancia por él recorrida es aproximadamente 20 000 veces mayor que su longitud. Evidentemente en estas condiciones podemos representar al avión como un punto.

Así se procede en ocasiones en Astronomía durante la investigación del movimiento de la Tierra alrededor del Sol, ya que como el radio de la Tierra es 24 000 veces más pequeño que la distancia que lo separa del Sol, no incurrimos en un gran error si consideramos a la Tierra y al Sol como puntos.

Las consideraciones anteriores son posibles, pues como se aprecia, las dimensiones de los cuerpos (avión, Tierra, Sol) son en extremo pequeños en comparación con la distancia que recorren, o con respecto a la distancia que los separan, por eso se pueden despreciar las dimensiones de los cuerpos.

En los casos analizados debe tenerse presente que estos puntos representan cuerpos materiales que poseen todas las propiedades inherentes a los cuerpos ordinarios y que, además, poseen dimensiones.

El cuerpo cuyas dimensiones y forma pueden despreciarse y en consecuencia considerarlo como un punto se demonina *punto material.*

Un mismo cuerpo se puede considerar para algunos casos punto material y para otros no. En la figura 2.1a, el niño puede considerarse un punto material ya que su tamaño es despreciable con relación a la distancia que recorre, no así en el caso de la figura 2.1b.

El punto material es un concepto abstracto, *un modelo* cuya introducción facilita el estudio de los fenómenos que estamos realizando.

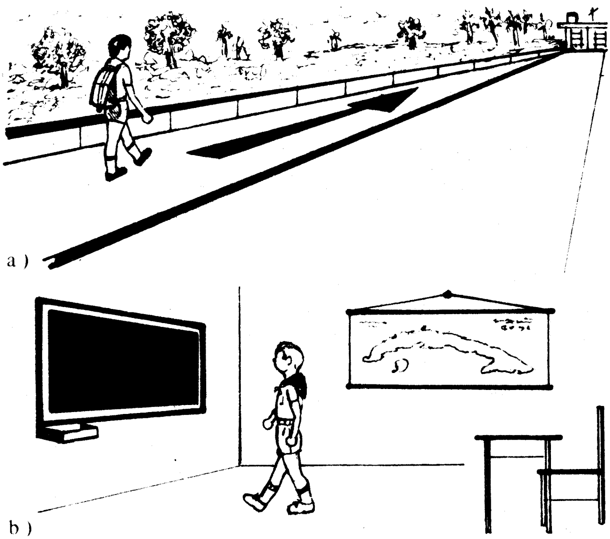


Fig. 2.1

Tareas

4. ¿A qué se denomina punto material?

5. Di en cuáles de los siguientes casos los cuerpos pueden considerarse como puntos materiales:
   a) Un disco de lanzamiento que se construye en un torno.
   b) Este mismo disco después de ser lanzado por un deportista vuela una distancia de 55 m.
   c) Un barco navega desde Ciudad de La Habana hasta Nicaragua.
   d) El barco realiza operaciones de atraque en la bahía.
   e) Se investiga el movimiento de una nave cósmica desde una estación terrestre.
   f) La nave es observada por un cosmonauta que realiza junto a ella una caminata espacial.

2.3 *Posición de un cuerpo en el espacio. Sistema de referencia*

Si observas atentamente a tu alrededor, comprobarás que los cuerpos en movimiento cambian su posición en relación con otros cuerpos. Así sucede, por ejemplo, cuando observas el movimiento de un automóvil, avión u otro medio de transporte.

Durante la Secundaria Básica aprendiste que para determinar la posición de un cuerpo o de un punto en el espacio era necesario referir dicha posición en relación con otro cuerpo, cuya posición se conocía con exactitud. A este cuerpo se le denomina *cuerpo de referencia*. La selección de este es arbitraria. Puede ser un árbol, una casa, el Sol, la Tierra, la Estrella Polar, etc. No obstante, resulta habitual seleccionar como cuerpos de referencia objetos que se encuentren fijos sobre la superficie de la Tierra.

Para poder describir el movimiento objeto de estudio se le "asocia" al cuerpo de referencia elegido un sistema de coordenadas, de forma tal que la posición del cuerpo en movimiento quede determinada por sus coordenadas. Del curso de Matemática conoces cómo se hace esto.

Determinemos, por ejemplo, la posición de dos automóviles que se mueven por una carretera (fig. 2.2). Tomemos como cuerpo de referencia el árbol A y tracemos, a lo largo de la carretera el eje de coordenadas OX que tiene su origen en el punto A (coordenada O de eje). Te resulta conocido que las coordenadas que se encuentran a la derecha del origen se consideran positivas y las que se encuentran a la izquierda, negativas. En estas condiciones la posición del automóvil 1 se determina por la coordenada $x_1 = 1\ 200$ m y la del automóvil 2 por la coordenada $x_2 = -400$ m.

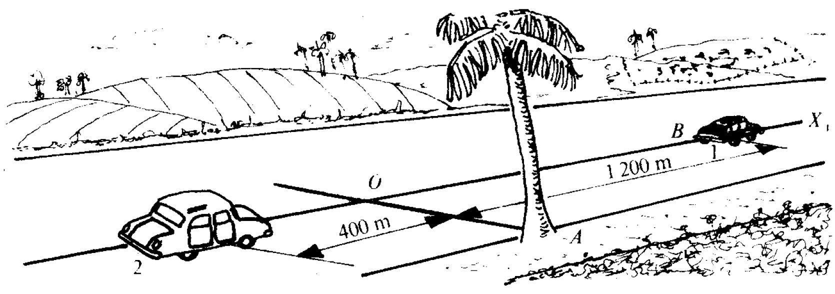


Fig. 2.2

Así, la posición de un cuerpo que se mueve según una dirección rectilínea está determinada por una sola coordenada, la cual representa la medida de la distancia que va desde el origen de coordenadas hasta el cuerpo en cuestión.

Si el cuerpo se mueve en un plano, entonces, a partir del cuerpo que se ha elegido como referencia (una piedra, un árbol, etc.) se trazan dos ejes de coordenadas OX y OY. En la figura 2.3, la posición del cuerpo (barco) en el plano se determina por las coordenadas x_0 y y_0.

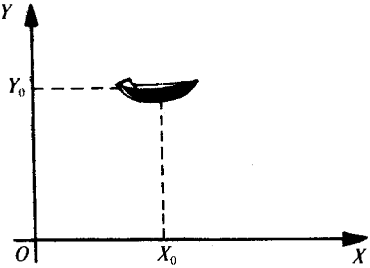


Fig. 2.3

El cuerpo de referencia, el sistema de coordenadas asociado a él y el instrumento de medición de tiempo, constituyen el sistema de referencia con respecto al cual se analiza el movimiento de un cuerpo.

La elección de uno u otro sistema de referencia (al igual que la selección del cuerpo de referencia) dependen de la persona que estudia el movimiento.

2.4 *Desplazamiento*

Analicemos, por ejemplo, el movimiento del barco de la figura 2.3. En el instante $t = 0$, sus coordenadas en relación con el sistema de referencia XY eran x_0, y_0. Supongamos que al cabo de un cierto intervalo de tiempo t fueran respectivamente iguales a x y y. Esto significa que en el período de tiempo transcurrido la coordenada x ha variado en una medida $x - x_0$, y la coordenada y, en una medida $y - y_0$. Las medidas $x - x_0$ y $y - y_0$ representan las variaciones de las coordenadas x y y.

Generalmente, a las variaciones de una medida se acostumbra a representarlas con el símbolo Δ (letra griega delta), luego en este caso: $\Delta x = x - x_0$ y $\Delta y = y - y_0$.

Determinar las distintas posiciones de un cuerpo en movimiento no siempre resulta ser una tarea fácil.

Supongamos que conocemos la ubicación inicial de un barco M_1 (fig. 2.4), y la distancia s navegada por este. Si quisiéramos conocer su posición en el mar a partir de estos datos, comprobaríamos que resulta imposible, pues el barco podría haber navegado por cualesquiera trayectorias marítimas.

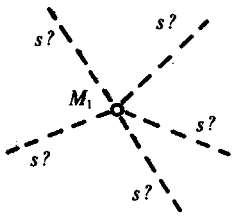


Fig. 2.4

De ahí, que si se quiere caracterizar la posición del barco en sus sucesivos cambios, se hace necesario precisar una magnitud física que lo posibilite y que nos ofrezca no solo la longitud del camino recorrido, sino otra magnitud: *el desplazamiento del cuerpo.* ¿Cómo podemos determinar esta magnitud?

Refiramos la posición inicial del cuerpo (barco) M_1 a un sistema de referencia XY. En estas condiciones, para $t = 0$, su posición estará caracterizada por las coordenadas x_0 y y_0. Sin embargo, esta posición puede también ser precisada si a partir del origen de coordenadas se traza un segmento de recta orientado $\vec{s}_0$ (vector) hasta el punto M_1 que denominaremos *vector de posición* (fig. 2.5).

El vector de posición es una magnitud física vectorial que caracteriza la ubicación del cuerpo en el espacio y está determinado por el segmento orientado que une el origen del sistema de coordenadas elegido con el punto que señala la posición que ocupa el cuerpo objeto de estudio.

Si se conoce el vector de posición de un cuerpo, entonces su posición con respecto al sistema de referencia queda perfectamente precisada, ya que sus coordenadas pueden determinarse proyectando sobre los ejes X y Y, el punto extremo del vector de posición del cuerpo.

Resulta evidente que cuando un cuerpo se mueve desde un punto a otro varía su vector de posición.

La variación que experimenta el vector de posición al trasladarse entre dos puntos se denomina *desplazamiento del cuerpo.*

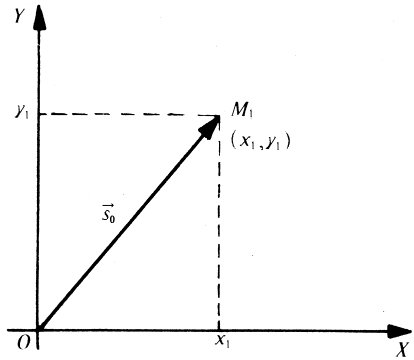


Fig. 2.5

El desplazamiento también puede definirse como la magnitud física vectorial que brinda la medida del cambio de posición del cuerpo en el espacio en un determinado intervalo de tiempo y que se representa por el segmento de recta orientado que une la posición inicial del cuerpo con su siguiente posición, o más exactamente como la variación que experimenta el vector de posición.

Así, en el ejemplo de la figura 2.5, si el barco se trasladó hasta el punto M_2, su nueva posición estará caracterizada por un nuevo vector de posición $\vec{s}$ (fig. 2.6), observándose que el vector de posición $\vec{s}_0$ correspondiente al punto M_1 sufrió una variación $\overrightarrow{\Delta s}$.

De la figura 2.6 se infiere que el vector de posición $\vec{s}$ que determina su nueva posición en el punto M_2, es el resultado de la suma del vector $\vec{s}_0$ más el vector desplazamiento $\overrightarrow{\Delta s}$ o sea:

$$\vec{s} = \vec{s}_0 + \overrightarrow{\Delta s}.$$

La expresión anterior es válida para cualquier tipo de movimiento mecánico, independientemente de la forma que adopte la trayectoria del cuerpo.

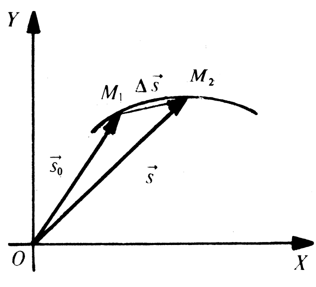


Fig. 2.6

Es importante destacar la diferencia sustancial que existe entre los conceptos *desplazamiento* y camino recorrido.

Analicemos el siguiente ejemplo:

En la figura 2.7 está representado el mapa geográfico de la Bahía de La Habana donde se aprecia el túnel que une al parque Máximo Gómez con la fortaleza del Morro. Se conoce que viajando a través de este, la distancia entre ambos es de aproximadamente 1 km. Sin embargo, bordeando la bahía también puede llegarse a la fortaleza desde el parque Máximo Gómez, aunque, claro está, el camino reocrrido en este caso es mucho mayor. El camino recorrido según esta vía no coincide con el desplazamiento, el cual está determinado por la recta que une los puntos "parque Máximo Gómez-Fortaleza del Morro" y que su módulo es igual a 1 km, información que resulta suficiente para conocer dónde se encuentra la posición final de un ómnibus con respecto al parque Máximo Gómez.

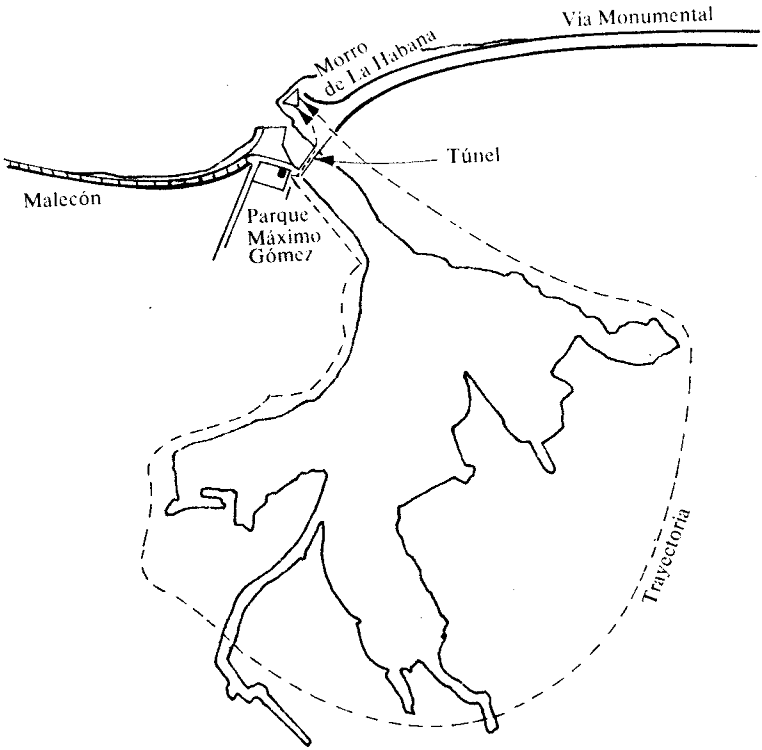


Fig. 2.7

Lo anterior resulta evidente, ya que si decimos que el ómnibus ha recorrido un camino equivalente a varios kilómetros, semejante dato no nos permite saber dónde estará el ómnibus, pues del parque pudo haberse movido por distintas trayectorias hasta llegar al destino antes mencionado.

El desplazamiento de un cuerpo depende de la posición final e inicial del cuerpo y no de la trayectoria que siga el cuerpo para ir de un punto a otro (fig. 2.8).

Solamente en el caso del movimiento rectilíneo la dirección de la trayectoria coincide con la del desplazamiento cuando se mantiene inalterable el sentido del movimiento (fig. 2.9).

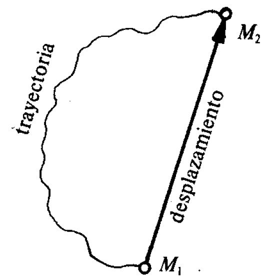


Fig. 2.8

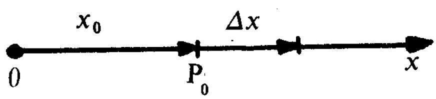


Fig. 2.9

Proyecciones del vector desplazamiento y sus coordenadas

En el capítulo 1 aprendiste a descomponer un vector o grupo de vectores según los ejes de coordenadas y hallar sus proyecciones a partir de sus componentes x y y.

Consideremos el caso de un cuerpo que en un intervalo de tiempo Δt ha realizado un desplazamiento $\Delta\vec{s}$ y que en el sistema de referencia XOY, los vectores de posición que determinan los puntos final e inicial son $\vec{s}$ y $\vec{s}_0$ respectivamente (ver figura 2.6).

Las coordenadas de la posición inicial del cuerpo caracterizadas por el vector de posición $\vec{s}_0$ son designadas por x_0, y_0; mientras que las coordenadas de la posición final definida por el vector de posición $\vec{s}$ son x, y.

Del análisis de la figura 2.9 vemos que $|OP_0| = x_0$; $|OP| = x$ y $|P_0P| = \Delta x$, de donde:

$$x = x_0 + \Delta x. \tag{2.1}$$

La proyección del vector desplazamiento en el eje Y puede obtenerse de la misma manera, de ahí que:

$$y = y_0 + \Delta y. \tag{2.2}$$

Las ecuaciones (2.1) y (2.2) son válidas para cualquier disposición del vector desplazamiento en el plano XOY.

A partir de estas ecuaciones se obtienen las expresiones de las proyecciones del vector desplazamiento sobre los ejes X y Y:

$$\Delta x = x - x_0 \tag{2.3}$$
$$\Delta y = y - y_0. \tag{2.4}$$

Tareas

6. ¿A qué se denomina vector de posición?
7. ¿Qué se entiende por vector desplazamiento?
8. Observando los movimientos de un jugador de balompié se demostró que este recorrió durante el partido aproximadamente 13 km. ¿Cómo nombrar la magnitud recorrida: módulo del desplazamiento o camino recorrido?
9. Un navegante, al determinar por la mañana la posición de su barco, detecta que este se encuentra en un punto distante 100 km al Sur del punto en el que se encontraba la noche anterior. ¿Qué expresa esta medición: el valor de la magnitud vectorial desplazamiento del buque o la longitud de la trayectorria recorrida?
10. Un chofer de taxi, al concluir su trabajo, observó que el contador de kilómetros recorridos de su automóvil indicaba un aumento

de 300 km en relación con el día anterior. ¿Qué representa este aumento: la longitud de la trayectoria recorrida o el módulo del desplazamiento?

11. ¿Cómo está relacionado el vector desplazamiento del cuerpo con sus coordenadas?

12. ¿Por qué generalmente es más importante el vector desplazamiento del cuerpo que el trayecto de camino recorrido por él?

13. ¿Puede ser pequeño el módulo del vector desplazamiento si el valor del camino recorrido es grande? Cita dos ejemplos.

14. En el instante inicial de tiempo, un cuerpo se encontraba en el punto de coordenadas $x_0 = -2$ m y $y_0 = 4$ m. Posteriormente el cuerpo se ha desplazado a un punto con coordenadas $x = 2$ m y $y = 1$ m. Halla las proyecciones del vector desplazamiento sobre los ejes X y Y. Traza el vector desplazamiento del cuerpo.

15. Un cuerpo ha recorrido cierto camino desde el punto inicial de su movimiento con coordenadas $x_0 = -3$ m y $y_0 = 1$ m, de forma que la proyección del vector desplazamiento sobre el eje X es igual a 5,2 m y sobre el eje Y igual a 3 m. Halla las coordenadas de la posición final del cuerpo. Trazar el vector desplazamiento. ¿Cuál es su módulo?

16. Una persona durante un paseo recorre 5 km en dirección sur, seguidamente 12 km en dirección este. ¿A qué es igual el módulo del desplazamiento realizado por dicha persona?

2.5 *Velocidad del movimiento rectilíneo uniforme*

De la gran diversidad de movimientos mecánicos que existen en la naturaleza, analizaremos el más sencillo de todos, que te resultará familiar de los estudios realizados en la Secundaria Básica: *el movimiento rectilíneo uniforme.*

Un cuerpo se mueve con movimiento rectilíneo uniforme cuando realiza iguales desplazamientos en el transcurso de iguales intervalos de tiempo.

Decir que un cuerpo realiza iguales desplazamientos en iguales intervalos de tiempo equivale a decir que el vector de posición experimenta variaciones iguales en iguales intervalos de tiempo. Estas variaciones pueden ocurrir de distinta manera.

Para conocer cómo varía la posición de un cuerpo con el tiempo, se introduce en Física la magnitud *velocidad del movimiento*, que se representa por la letra v y que caracteriza cuánto más rapido es un movimiento, o lo que es lo mismo: *la rapidez de cambio del vector desplazamiento en el transcurso del tiempo.*

Se denomina velocidad del movimiento rectilíneo uniforme a la magnitud física vectorial que caracteriza a la rapidez con que varía la posición de un cuerpo en el transcurso del tiempo y que es numéricamente igual a la relación entre el desplazamiento del cuerpo y el intervalo de tiempo en el que este se efectúa.

Como el desplazamiento $\overrightarrow{\Delta s}$ es una magnitud vectorial y el intervalo de tiempo Δt es una magnitud escalar, la velocidad del movimiento es una magnitud vectorial, por tanto:

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{\Delta s}}{\Delta t}. \tag{2.5}$$

La fórmula 2.5 en forma escalar puede determinarse hallando las proyecciones de los vectores sobre los ejes de coordenadas.

En el caso del movimiento rectilíneo uniforme es conveniente hacer coincidir el eje de coordenadas con la dirección de la trayectoria, por lo que en este caso variará sólo una coordenada. Si el eje seleccionado es el eje X, entonces, según conocemos del epígrafe 2.4, las proyecciones de los vectores $\overrightarrow{\Delta s}$ y $\vec{v}$ serán Δs_x y v_x respectivamente y la ecuación (2.5) puede escribirse:

$$v_x = \frac{\Delta s_x}{\Delta t}. \tag{2.6}$$

En este caso, los módulos de las proyecciones Δs_x y v_x son iguales a los módulos de los vectores $\overrightarrow{\Delta s}$ y $\vec{v}$. La coincidencia del eje X con la dirección del movimiento permite en lo adelante escribir:

$$\Delta s_x = \Delta s \qquad \text{y} \qquad v_x = v,$$

luego:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Unidades de velocidad

Como tú conoces, en el SI se toma como unidad de velocidad, la velocidad de un movimiento rectilíneo en el cual el cuerpo durante 1 s se desplaza 1 m. Por tanto, la unidad de velocidad es el metro por segundo (m/s).

2.6 *Desplazamiento durante el movimiento rectilíneo uniforme*

El desplazamiento de un cuerpo (punto material) al cabo de un determinado intervalo de tiempo puede calcularse a partir de la ecuación (2.5). Al igual que procedimos con la ecuación de la velocidad debemos trabajar no con la expresión vectorial (2.5) sino con su expresión escalar, luego:

$$\Delta s = v\ \Delta t. \tag{2.7}$$

Conocer la proyección del vector desplazamiento y la del vector velocidad nos permite calcular la coordenada x de un cuerpo o de un punto material en cualquier momento de tiempo.

Consideremos que un punto material se mueve uniformemente a lo largo de una trayectoria rectilínea con velocidad $\vec{v}$ y que en un instante de tiempo determinado se encuentra en el punto A (fig. 2.10).

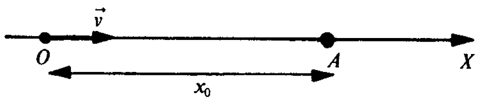


Fig. 2.10

Se precisa determinar su posición al cabo del intervalo de tiempo Δt. Elijamos un sistema de coordenadas a lo largo de la trayectoria del movimiento, en el que el origen de coordenadas coincida con el cuerpo de referencia elegido (fig. 2.10). Si la coordenada inicial OA se representa x_0, su coordenada al cabo del intervalo de tiempo Δt será igual a:

$$x = x_0 + \Delta s. \tag{2.8}$$

Pero según (2.7), $\Delta s = v\ \Delta t$, luego la coordenada del cuerpo en el instante Δt será:

$$x = x_0 + v_x\ \Delta t. \tag{2.9}$$

La ecuación (2.9) señala que la coordenada x del cuerpo depende del tiempo Δt transcurrido, lo que quiere decir que con su ayuda podemos describir el movimiento rectilíneo uniforme. En esta ecuación hay que tener presente que la proyección v_x del vector $\vec{v}$, puede ser positiva o negativa según el sentido que posea el vector $\vec{v}$ en relación con el eje de coordenadas X (fig. 2.11).

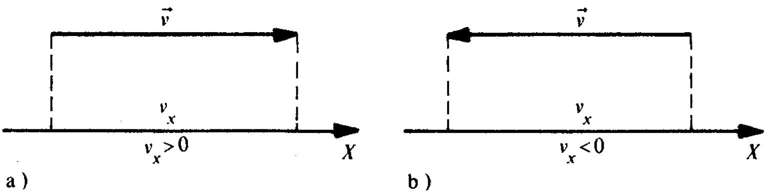


Fig. 2.11

Problemas resueltos

1. Un tren se desplaza uniformemente por una trayectoria rectilínea una distancia de 400 m durante un tiempo de 25 s. Calcula la velocidad del tren.

Solución

En las condiciones del problema se plantea que el tren se mueve rectilínea y uniformemente. Por tanto, resulta posible aplicar la fórmula de la velocidad para el movimiento rectilíneo uniforme, expresada a través de sus proyecciones:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Sustituyendo los valores numéricos dados en la ecuación anterior:

$$v = \frac{400 \text{ m}}{25 \text{ s}}$$

$$v = 16 \text{ m/s}.$$

2. Por una carretera se mueve un automóvil animado de un movimiento rectilíneo uniforme con una velocidad de 60 km/h. Al cabo de un cierto tiempo pasa frente a una estación de gasolina y continúa su camino. Determina la posición del automóvil 30 min después de haber pasado la estación (fig. 2.12).

Solución

Por origen de coordenadas elijamos la estación de gasolina y el momento en que el automóvil cruza la estación como el instante en que se comienza a contar el tiempo.

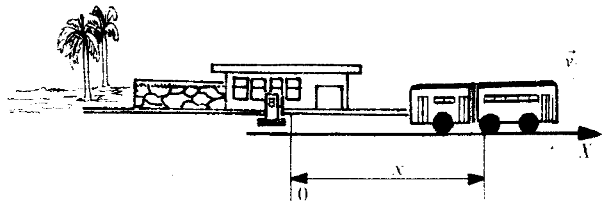


Fig. 2.12

El eje de coordenadas (representado por la letra X) lo orientamos en dirección del movimiento. Entonces, las coordenadas del automóvil al cabo de 30 min después de cruzar la estación, se puede calcular por la ecuación:

$$x = x_0 + v\,\Delta t.$$

De los datos del problema se conoce además que la velocidad del automóvil era de 60 km/h. La proyección v de esta velocidad es positiva, ya que el vector velocidad $\vec{v}_1$ está dirigido en el mismo sentido que el eje X e igual a 60 km/h. Además como el tiempo está expresado en minutos, es necesario expresarlo en horas. Por consiguiente:

$$x = 0 + 60\ \text{km/h} \cdot 0{,}5\ \text{h} = 30\ \text{km}.$$

3. Dos automóviles animados de movimiento rectilíneo uniforme se desplazan por una carretera uno al encuentro de otro, con velocidades 80 km/h y 100 km/h. En una estación de gasolina se cruzan y continúan su camino. Determina la posición de cada automóvil al cabo de 30 min del encuentro, así como la distancia entre ellos en ese momento (fig. 2.13).

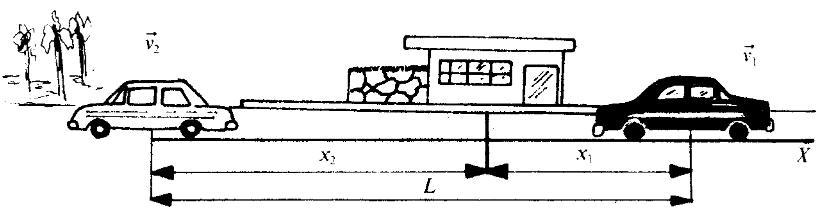


Fig. 2.13

Solución

Como origen de coordenadas elijamos la estación de gasolina y como origen de registro del tiempo el instante en que se cruzaron. El eje de coordenadas (representado por la letra X) lo dirigimos de izquierda a derecha. Entonces, las coordenadas de los automóviles al cabo de 0,5 h de haberse cruzado pueden calcularse por las ecuaciones:

$$x_1 = x_{01} + v_1 \Delta t \quad \text{y} \quad x_2 = x_{02} + v_2 \Delta t.$$

Según los datos del problema, las coordenadas iniciales x_{01} y x_{02} de los dos automóviles son nulas, luego:

$$x_1 = v_1 \Delta t \quad \text{y} \quad x_2 = v_2 \Delta t.$$

Las velocidades de los automóviles 1 y 2 son 80 km/h y 100 km/h, respectivamente. La proyección v_1 de la velocidad del automóvil 1 es positiva ya que su vector velocidad $\vec{v}_1$ está orientado en el mismo sentido que el eje X, e igual a 80 km/h.

La proyección v_2 de la velocidad del automóvil 2 es negativa ya que su vector velocidad está dirigido en sentido inverso a la dirección positiva del eje X, y, por tanto, igual a -100 km/h.

Expresando el tiempo en horas se tiene:

$$x_1 = 80 \text{ km/h} \cdot 0{,}5 \text{ h} = 40 \text{ km}$$
$$x_2 = -100 \text{ km/h} \cdot 0{,}5 \text{ h} = -50 \text{ km}.$$

Como se aprecia, la coordenada del automóvil 1 es positiva, mientras que la del automóvil 2, negativa; luego la diferencia entre sus coordenadas nos permitirá calcular la distancia l entre ambos automóviles:

$$l = x_1 - x_2 = 40 \text{ km} - (-50 \text{ km}) = 90 \text{ km}.$$

Tareas

17. En el problema 3, resuelto anteriormente, ¿es posible considerar la magnitud l como una magnitud vectorial?
18. Explica en qué se diferencian el desplazamiento y la longitud de la trayectoria en el movimiento rectilíneo uniforme.
19. Explica las diferencias entre las magnitudes determinadas por las ecuaciones:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{y} \quad \vec{v} = \frac{\vec{\Delta s}}{\Delta t}$$

y di qué tienen en común.

20. Conociendo la posición inicial del cuerpo y la longitud del camino recorrido, ¿podemos determinar la posición final del cuerpo?
21. ¿Qué relación existe entre la velocidad de un cuerpo y la variación de su posición en el espacio?
22. Un automovilista, viajando a una velocidad de 30 km/h, recorrió la mitad del trayecto hasta el lugar de destino en el transcurso de 2 h. ¿A qué velocidad debe continuar su movimiento para que durante ese mismo tiempo llegue a donde iba y regrese?

2.7 *Representación gráfica del movimiento*

Del curso de Física de la Secundaria Básica conoces que con ayuda de la representación gráfica se puede describir con mayor facilidad el movimiento de los cuerpos.

En efecto, si en un sistema de coordenadas rectangulares se representa en el eje horizontal, en una escala determinada, el tiempo, y en el eje vertical, también con una escala apropiada, el valor de las coordenadas del cuerpo, la gráfica que se obtiene representa la dependencia de las coordenadas del cuerpo en función del tiempo transcurrido. Esta gráfica se denomina *gráfica del movimiento.*

La gráfica del movimiento rectilíneo uniforme, como estudiamos, está representada por una línea recta.

En la figura 2.14 se representan los gráficos de varios movimientos rectilíneos.

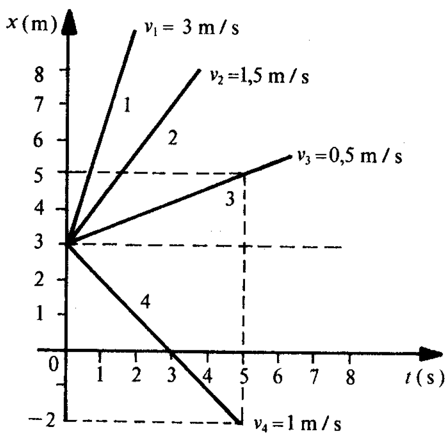


Fig. 2.14

Estudiando la forma de las gráficas del movimiento se puede juzgar sobre la velocidad del movimiento. Como el módulo de la velocidad es igual a la relación entre la ordenada y la abscisa de la figura, se observa que para un mismo intervalo de tiempo t, por ejemplo 6 s, tendrá mayor variación de las coordenadas aquel cuerpo cuya gráfica tenga una mayor pendiente (inclinación). Es decir, mientras mayor sea la inclinación de la recta (pendiente) con respecto al eje de los tiempos, mayor será la velocidad del cuerpo. En nuestro caso $v_1 > v_2 > v_3$.

Las gráficas del movimiento, en el caso del movimiento rectilíneo uniforme, brindan la posibilidad de resolver completamente los problemas de la Mecánica, ya que permiten encontrar la posición del cuerpo en cualquier instante, incluyendo aquellos instantes de tiempo anteriores al inicio del estudio del movimiento.

Analicemos por ejemplo el caso de la gráfica de la figura 2.15

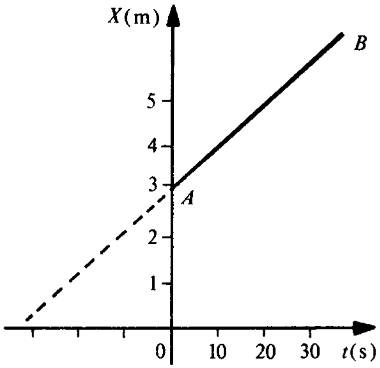


Fig. 2.15

Prolongando la recta AB en sentido contrario al tomado como positivo en el eje de los tiempos, encontramos que el cuerpo, 30 s antes de hallarse en el punto A, se encontraba en el origen de coordenadas ($x = 0$). Paralelamente al uso de las gráficas de movimiento, se utiliza frecuentemente un tipo de gráficas que permiten analizar como varía la velocidad de un cuerpo en el transcurso del tiempo. En esta ocasión, en lugar de colocar en las ordenadas los valores de las coordenadas, se trazan las proyecciones de las velocidades y por el eje de las abscisas, como antes, el tiempo. Tales gráficas reciben el nombre de *gráficas de la velocidad.*

Es conocido que en el caso de un movimiento rectilíneo uniforme la velocidad del cuerpo no varía en el transcurso del tiempo, luego la gráfica de la velocidad de este tipo de movimiento se representa por una recta paralela al eje de los tiempos. En la figura 2.16 se muestran las gráficas de los movimientos rectilíneos uniformes de dos cuerpos. El análisis de las gráficas permite conocer, además del valor con que se movió el cuerpo, el sentido de su movimiento.

La gráfica 1 corresponde al caso de un cuerpo que se mueve en el sentido positivo de las X, mientras que la gráfica 2 corresponde a un cuerpo que se mueve en sentido contrario, ya que el valor de la velocidad es negativo.

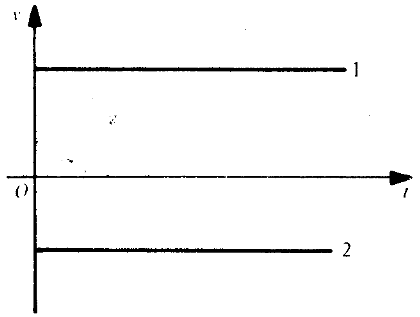


Fig. 2.16

Las gráficas de la velocidad permiten también conocer el valor absoluto del desplazamiento del cuerpo en un intervalo de tiempo dado.

De Matemática conoces que el área de un rectángulo es igual al producto de sus dos lados vecinos. Si observas la figura 2.17, te percatarás que el producto $v \cdot t$ es igual al valor absoluto del desplazamiento del cuerpo y que es numéricamente igual al área del rectángulo sombreado.

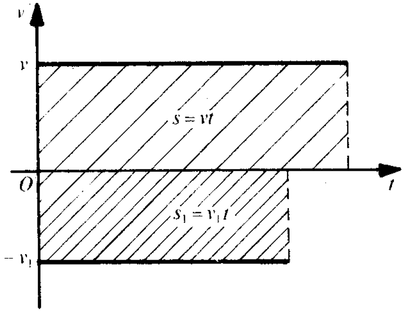


Fig. 2.17

Problemas resueltos

1. En la figura 2.18 están representadas las gráficas del movimiento de un automóvil y de un ciclista que se mueven al encuentro uno de otro. Empleando las gráficas, halla el lugar y el tiempo de su encuentro.

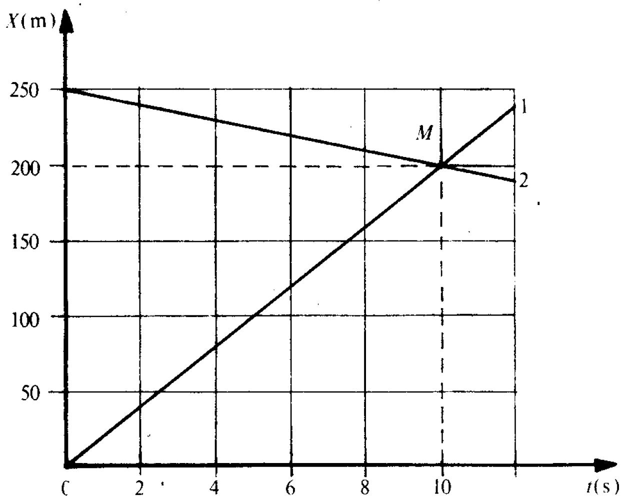


Fig. 2.18

Solución

Analizando la gráfica 1, podemos decir que el automóvil está en movimiento rectilíneo uniforme a lo largo del eje X a una velocidad de 20 m/s, mientras que del análisis de la gráfica 2, se desprende que el ciclista se mueve a su encuentro, también con un movimiento rectilíneo uniforme, pero a una velocidad de 5 m/s. En la figura 2.18 se observa, además, que en el instante inicial de tiempo, ambos cuerpos distaban 250 m entre sí. Las gráficas se cruzan en el punto M, lo que significa que el automóvil y el ciclista se encontraron. El encuentro se produjo después de 10 s desde que comenzamos a contar el tiempo, a una distancia de 200 m de la posición inicial del automóvil.

2. En la figura 2.14 se muestran varias gráficas de movimientos con diferentes velocidades. A partir de la figura:

a) di cómo se mueven los cuerpos con respecto al eje X,

b) halla el desplazamiento de los cuerpos 3 y 4 para $t = 5$ s,

c) calcula la velocidad del cuerpo 1.

Solución

a) Del análisis de las gráficas se observa que los cuerpos 1, 2 y 3 se mueven a lo largo del eje X en sentido positivo, mientras que el cuerpo 4 se mueve en sentido negativo.

b) El cuerpo 3 en el intervalo de 0 a 5 s experimentó un desplazamiento en el sentido positivo, de módulo igual a 2 m, y el cuerpo 4 en igual intervalo de tiempo experimentó un desplazamiento en sentido opuesto cuyo valor modular es 5 m.

c) El cuerpo realiza un movimiento rectilíneo uniforme, luego su velocidad puede calcularse como:

$$v = \frac{s}{t}.$$

En la gráfica se observa que por ejemplo para $s = 3$ m, el tiempo transcurrido es 1 s, luego $v = 3$ m/s.

Tareas

23. La figura 2.19 representa el movimiento de un tren entre Ciudad de La Habana y Matanzas. Determina:
    a) la velocidad del tren,
    b) a qué hora partió,
    c) si partió de Matanzas o de Ciudad de La Habana.

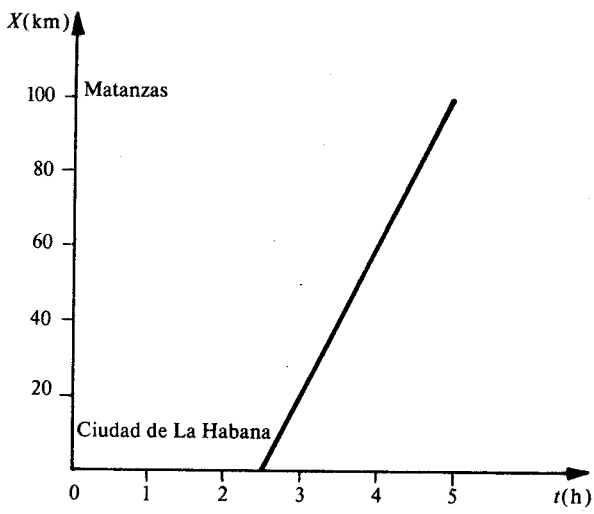


Fig. 2.19

24. La figura 2.20 representa la gráfica de los movimientos desarrollados por dos automóviles A y B. ¿Cuál tiene mayor velocidad? ¿Cuál es la velocidad de cada automóvil?

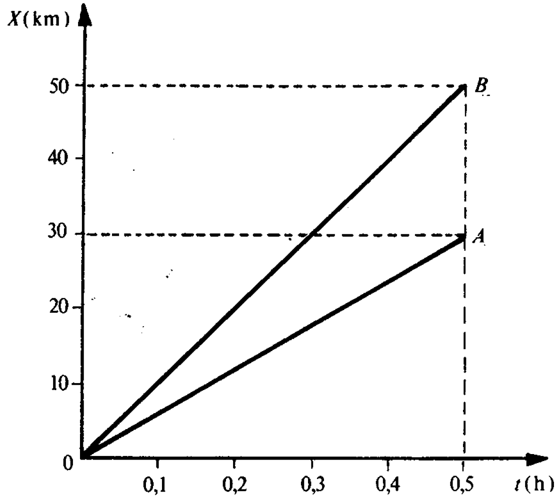


Fig. 2.20

2.8 *Relatividad del movimiento*

¿Es idéntica la posición de un cuerpo desde distintos sistemas de referencia?

Consideremos que se quiere ubicar la posición de un poblado. En este caso se podrá decir, por ejemplo, que este se encuentra a una distancia l_1 al norte del río (A) (fig. 2.21). Pero al mismo tiempo es posible decir que el poblado se halla a una distancia l_2 al este de un lago (B).

El ejemplo anterior nos pone de manifiesto que la posición de un cuerpo es *relativa:* es diferente respecto a distintos cuerpos de referencia y a distintos sistemas de referencias asociados a estos cuerpos.

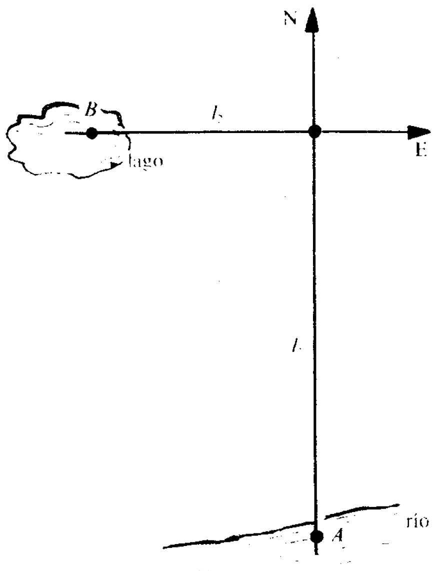


Fig. 2.21

Análisis de un movimiento desde distintos sistemas de referencia

Frecuentemente nos encontramos con movimientos de cuerpos que son observados desde distintos cuerpos de referencia, algunos de los cuales se mueven unos con respecto a otros.

Estudiemos el movimiento de un cuerpo en relación con otros dos cuerpos tomados como referencia, los que a su vez se mueven uno con respecto a otro. Supongamos que uno de los cuerpos de referencia está inmóvil y que el otro se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme respecto a otro cuerpo que se encuentra en movimiento.

En la figura 2.22 se representa un nadador que nada a favor de la corriente de un río con velocidad constante. Elijamos la orilla como sistema de referencia inmóvil y al agua como sistema de referencia en movimiento. Tracemos los sistemas de coordenadas XOY y $X'O'Y'$ los cuales son paralelos entre sí. ¿Cómo se moverá el nadador con respecto a un observador que se encuentra en la orilla y a otro que se encuentra en un bote que flota a favor de la corriente del río?

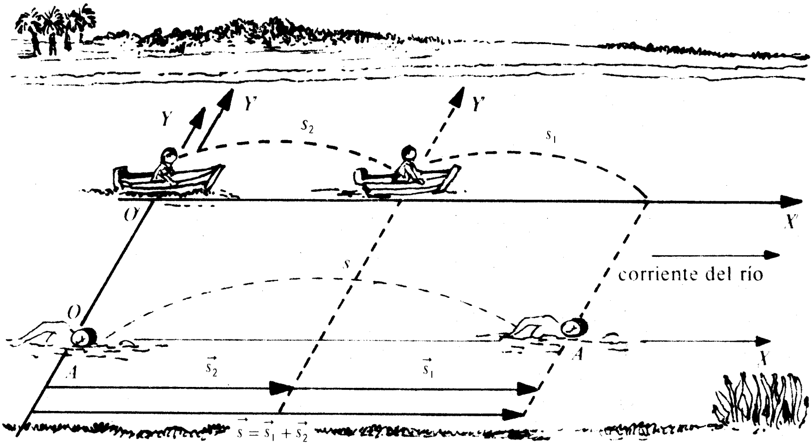


Fig. 2.22

Determinemos el desplazamiento del nadador con respecto a estos dos sistemas de referencia para un mismo intervalo de tiempo Δt.

Para el observador que se encuentra en el bote, el desplazamiento del nadador con respecto a él, en el intervalo Δt, es igual a $\vec{s}_1$. Para el observador que está en la orilla el desplazamiento del nadador fue igual a $\vec{s}$, mientras que durante ese intervalo Δt, el bote realizó el desplazamiento $\vec{s}_2$ con respecto a la orilla.

Analizando la figura 2.23 se comprende que el desplazamiento $\vec{s}$ del nadador con respecto a la orilla (sistema XOY) es igual a la suma de los desplazamientos $\vec{s}_1$ y $\vec{s}_2$, o sea:

$$\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2.$$

La velocidad $\vec{v}$ del nadador con respecto a la orilla es igual a:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \frac{\vec{s}_1 + \vec{s}_2}{\Delta t} = \frac{\vec{s}_1}{\Delta t} + \frac{\vec{s}_2}{\Delta t}.$$

El primer sumando $\frac{\vec{s}_1}{\Delta t}$ resulta ser la velocidad $\vec{v}_1$ del nadador en relación con el sistema de referencia móvil ($X\ O\ Y$), mientras que el segundo sumando $\frac{\vec{s}_2}{\Delta t}$ será la velocidad $\vec{v}_2$ del agua (bote) en relación con el sistema de referencia fijo (XOY) (orilla).

De lo anterior se obtiene:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

La expresión anterior recibe el nombre de *ecuación de composición de velocidades.*

La velocidad del movimiento de un cuerpo en relación con un sistema de referencia inmóvil es igual a la suma vectorial de dos velocidades: la velocidad del cuerpo en relación con el sistema de referencia en movimiento y la velocidad de este en relación con el sistema de referencia inmóvil.

Idéntica expresión hubiéramos obtenido si el nadador se desplazara en sentido contrario a la corriente del río (fig. 2.23), o lo hiciera perpendicular a la corriente del río (fig. 2.24).

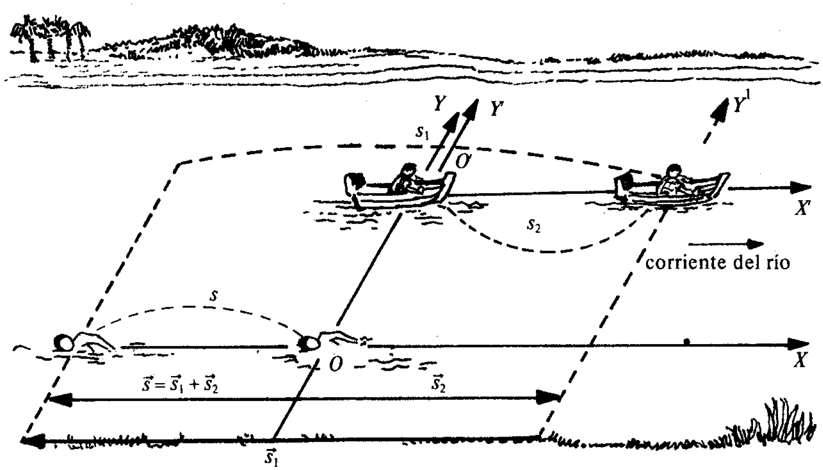


Fig. 2.23

De todo lo anterior se puede concluir que las velocidades de un cuerpo para distintos sistemas de referencia, en movimiento unos respecto a otros, *son diferentes.* En esto consiste la *relatividad del movimiento.*

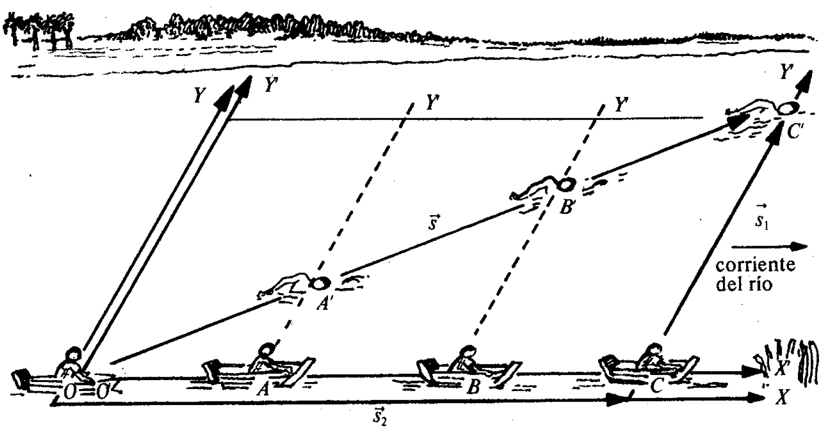


Fig. 2.24

Puede suceder que un cuerpo esté en movimiento en relación con un sistema de referencia y que permanezca en reposo en relación con otro sistema de referencia. Por tanto, no solo el movimiento es relativo, sino también lo es el reposo. Si un cuerpo se encuentra en reposo en relación con un determinado sistema de referencia, siempre es posible encontrar otros sistemas de referencia con respecto a los cuales el cuerpo se encuentra en movimiento.

Esto significa que el reposo absoluto no existe. El movimiento es una propiedad de todos los cuerpos y en general de todo lo que existe en la naturaleza.

Problema resuelto

Un nadador atraviesa un río perpendicularmente a la orilla. La velocidad de la corriente es de 2 km/h y el ancho del río es de 100 m. ¿Con qué velocidad se desplaza el nadador en relación con el agua si emplea 4 min en llegar al lado opuesto del río?

Solución

La velocidad $\vec{v}$ del nadador con respecto a la orilla es igual a la resultante vectorial de la velocidad de la corriente $\vec{v}_1$ y la velocidad del nadador en relación con el agua, $\vec{v}_2$ (fig. 2.25).

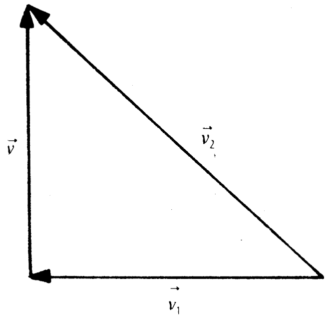


Fig. 2.25

El ancho del río es igual a 100 m y el nadador emplea 4 min en atravesarlo. Con estos valores resulta posible calcular el valor absoluto o módulo del vector $\vec{v}$. Sustituyendo los valores correspondientes, se tiene:

$$v = \frac{s}{\Delta t} = \frac{100 \text{ m}}{4 \text{ min}} = 25 \text{ m/min}.$$

De la figura 2.25 se aprecia que:

$$v_2^2 = v_1^2 + v^2,$$

por consiguiente: $v_2 = \sqrt{v_1^2 + v^2}$

Como la velocidad v_1 está expresada en kilómetros por hora, resulta necesario reducir el valor de la velocidad v a esta unidad. Luego:

$$v_2 = \sqrt{(2 \text{ km/h})^2 + (1{,}5 \text{ km/h})^2}$$

$$v_2 = 2{,}5 \text{ km/h}.$$

La velocidad del nadador con respecto al agua es de 2,5 km/h.

Tareas

25. ¿En qué consiste la relatividad del movimiento?

26. Un avión se mueve con respecto al aire con una velocidad de 900 km/h. ¿Con qué velocidad se moverá el avión con respecto a la Tierra si este vuela a favor del aire y se conoce que la ve-

locidad del aire en ese momento es de 50 km/h? ¿Cuál será la velocidad del avión si este vuela en contra del aire?

27. Un avión después de despegar, mantiene su curso en dirección norte, volando con una velocidad de 720 km/h. ¿Cuál será la velocidad del avión con respecto al aeropuerto al cabo de 2 h después de iniciado el vuelo, si durante el tiempo de vuelo sopla un viento del oeste con una velocidad de 10 m/s?

Movimiento rectilíneo variado

¿Son uniformes todos los movimientos mecánicos de la naturaleza?

De tus vivencias personales, cuando viajas en automóvil, en ómnibus, en tren o en avión, conoces que el movimiento de estos no se realiza uniformemente durante todo el recorrido, ya que para iguales intervalos de tiempo realizan diferentes desplazamientos. Este tipo de movimiento recibe el nombre de *movimiento variado*

Se denomina movimiento variado al movimiento de un cuerpo que en iguales intervalos de tiempo realiza diferentes desplazamientos.

En el caso del movimiento rectilíneo uniforme, la velocidad del cuerpo es constante para cualquier tramo del recorrido, por eso el desplazamiento del cuerpo puede calcularse por la ecuación: $\vec{s} = \vec{v} \cdot t$.

En el movimiento no uniforme, para calcular el desplazamiento de un cuerpo, no puede utilizarse la ecuación anterior, ya que en diferentes puntos de la trayectoria la velocidad del movimiento varía. En este caso, el concepto de velocidad que posees, necesita ser analizado en un sentido más amplio. Por ello resulta necesario que introduzcamos los conceptos velocidad media y velocidad instantánea del cuerpo.

2.9 *Velocidad del movimiento variado. Velocidad media y velocidad instantánea*

La distancia entre Ciudad de La Habana y Varadero es aproximadamente de 130 km; consideremos que un ómnibus demora en recorrerla 2 h. Resulta evidente que el movimiento del ómnibus entre estas ciudades no es uniforme. Al salir de la Estación, el ómnibus aumenta su velocidad; sin embargo, durante su recorrido al acercarse a los distintos pueblos disminuye su velocidad, o se detiene momentáneamente ante las señales de los semáforos, etc. ¿Cómo calcular en este caso la velocidad del ómnibus?

Para esto se utiliza el concepto *velocidad media*. Esta se obtiene al dividir el desplazamiento $\vec{s}$ que experimenta el cuerpo en el intervalo de tiempo que demoró en realizarlo:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{s}}{t}. \tag{2.10}$$

En nuestro ejemplo $v_m = \dfrac{130 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 65 \text{ km/h}.$

El conocimiento de la velocidad media nos permite calcular el desplazamiento del cuerpo mediante la ecuación:

$$\vec{s} = \vec{v}_m \cdot t. \tag{2.11}$$

La ecuación (2.11) nos brinda un resultado correcto sólo para el intervalo de tiempo considerado; en nuestro caso, la velocidad media fue definida para un intervalo de tiempo $t = 2$ h. Si se utiliza otro intervalo de tiempo, por ejemplo 1, 4 o 5 h, el resultado no sería correcto, ya que la velocidad media para esos intervalos de tiempo difiere con la que calculamos para $t = 2$ h.

De lo anterior se deduce que a partir de esta velocidad no resulta posible calcular el desplazamiento y las coordenadas del cuerpo en movimiento para cualquier instante. Resulta necesario, por tanto, que ampliemos aún más el concepto velocidad.

Velocidad instantánea

La velocidad media caracteriza el movimiento de un cuerpo durante un determinado tramo de la trayectoria, pero no brinda información sobre el movimiento para cada punto de la trayectoria, donde la velocidad puede estar variando continuamente. Sin embargo,

en cada punto de la trayectoria y en cada intervalo de tiempo, el cuerpo posee una determinada velocidad.
¿Cómo determinar esta velocidad?

Consideremos que estudiamos el movimiento de un automóvil que se mueve rectilíneamente y con movimiento variado (fig. 2.26), y que nos interesa conocer su velocidad en el punto C.

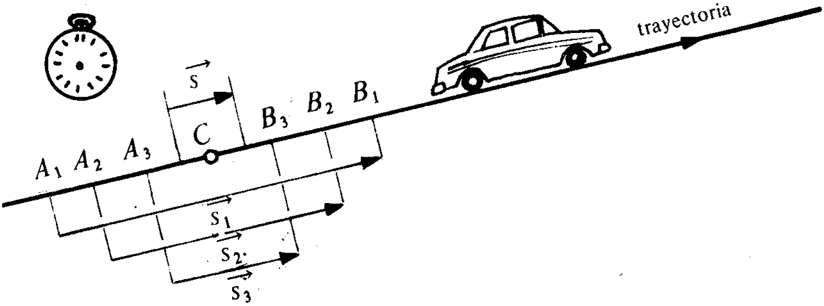


Fig. 2.26

Determinemos primeramente la velocidad media de su desplazamiento total. Para ello es necesario conocer el desplazamiento $\vec{s}$ y el tiempo t en el cual lo realizó. De acuerdo con la ecuación 2.10, la velocidad media en el tramo A_1B_1 es:

$$\vec{v}_{1m} = \frac{\vec{s}}{t}.$$

Disminuyamos el desplazamiento del automóvil hasta $\vec{s}_2 = A_2B_2$ de forma tal que contenga al punto C. Si el automóvil recorre el tramo A_2B_2 en un tiempo t_2, su velocidad media será:

$$\vec{v}_{2m} = \frac{\vec{s}_2}{t_2}.$$

Disminuyamos aún más el desplazamiento hasta $\vec{s}_3 = A_3B_3$ en el que el punto C continúe en el centro del tramo de trayectoria considerado. Su velocidad media será entonces:

$$\vec{v}_{3m} = \frac{s_3}{t_3}$$

donde $t_1 > t_2 > t_3$.

Continuemos disminuyendo la medida del desplazamiento y, en consecuencia, el intervalo de tiempo en el cual ocurre dicho desplazamiento, hasta que el valor de este último sea tan pequeño que s casi se confunda con el punto C. De esta forma obtendremos velocidades medias, las cuales se diferenciarán cada vez menos de la velocidad del movimiento del automóvil en el punto C.

La velocidad que posee un cuerpo en un instante determinado y en un punto dado de su trayectoria se denomina velocidad instantánea.

Luego, la velocidad determinada para el automóvil en el punto C representa su *velocidad instantánea.*

La velocidad instantánea es una magnitud física vectorial que caracteriza la velocidad en un punto dado de su trayectoria y es igual a la razón de cambio entre un desplazamiento lo suficientemente pequeño y el intervalo de tiempo durante el que se efectúa dicho desplazamiento.

En lo adelante siempre que nos refiramos a la velocidad de un cuerpo que se mueve con movimiento rectilíneo variado, tendremos en cuenta su velocidad instantánea.

Problema resuelto

Un automóvil se movió durante 6 h según una trayectoria rectilínea. Durante la primera hora de recorrido, su velocidad se mantuvo constante e igual a 30 m/s. Durante las restantes 5 h, se movió también con una velocidad constante igual a 13 m/s. Determina el valor de la velocidad media del automóvil durante todo el tiempo que este estuvo moviéndose.

Solución

Como el automóvil se trasladó a lo largo de una trayectoria rectilínea con un movimiento uniforme, durante la primera hora con una velocidad de 30 m/s recorrió una distancia $s_1 = v_1 \cdot t_1$. Por igual razón, durante las próximas 5 h, moviéndose con una velocidad de 13 m/s, recorrió una distancia $s_2 = v_2 \cdot t_2$. Luego, la distancia total que el automóvil recorrió durante todo el movimiento es:

$$s = s_1 + s_2.$$

Entonces, la velocidad media v_m del automóvil se calcula como:

$$v_m = \frac{s}{t}.$$

Sustituyendo los valores de s y de t, se obtiene:

$$v_m = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2}$$

$$v_m = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2}.$$

Como el tiempo está expresado en horas, es necesario reducirlas a segundos, luego:

$$v_m = \frac{30\ \text{m/s} \cdot 60\ \text{s} + 13\ \text{m/s} \cdot 300\ \text{s}}{60\ \text{s} + 300\ \text{s}}$$

$$v_m = 15{,}8\ \text{m/s}.$$

La velocidad del automóvil para el intervalo de 6 h fue de 15,8 m/s.

Tareas

28. ¿A qué se denomina velocidad media?
29. ¿Es posible, conociendo la velocidad media de un cuerpo, obtenida para un intervalo de tiempo determinado, calcular el desplazamiento realizado por el cuerpo en cualquier intervalo de tiempo?
30. ¿A qué se denomina velocidad instantánea del movimiento de un cuerpo?

2.10 *Movimiento rectilíneo uniformemente variado. Aceleración*

En el epígrafe anterior estudiamos cómo durante el movimiento variado de un cuerpo, la velocidad instantánea de dicho cuerpo cambiaba constantemente en cada punto y en cada instante de tiempo. ¿Cómo proceder entonces para calcular la velocidad instantánea de un cuerpo?

Dentro de la gran diversidad de movimientos variados, estudiaremos el más sencillo de todos: el movimiento variado de un cuerpo en el que la velocidad experimenta iguales variaciones en intervalos iguales de tiempo. Este tipo de movimiento se denomina *movimiento uniformemente variado.*

Se denomina movimiento uniformemente variado al movimiento de un cuerpo en el que su velocidad varía uniformemente con el transcurso de intervalos de tiempo iguales.

Ahora, ¿cómo calcular la magnitud que caracteriza la rapidez con que varía la velocidad?

Si en un movimiento rectilíneo variado se conoce que la velocidad inicial del cuerpo es $\vec{v}_0$ y que al cabo de un intervalo de tiempo Δt resulta igual a $\vec{v}$, entonces, en cada unidad de tiempo la velocidad variará en

$$(\vec{v} - \vec{v}_0)/\Delta t.$$

La relación $(v - v_0)/\Delta t$ que caracteriza cómo varía la velocidad en la unidad de tiempo se denomina *aceleración* y se representa por la letra a.

La aceleración de un cuerpo en un movimiento uniformemente variado es una magnitud física vectorial constante, que caracteriza la variación que experimenta la velocidad del cuerpo en el transcurso del tiempo en el que se produce dicha variación.

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{\Delta t}. \qquad (2.12)$$

Como $\vec{v} - \vec{v}_0$ es la variación de velocidad $\overrightarrow{\Delta v}$, la ecuación 2.12 puede escribirse como:

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}. \qquad (2.13)$$

De las operaciones con vectores conoces que el producto de una magnitud vectorial $(\vec{v} - \vec{v}_0)$ por un escalar $(1/\Delta t)$ es una magnitud vectorial. Por tanto, la dirección y el sentido de la aceleración coincide con la dirección de la variación de la velocidad.

Como unidad de aceleración en el SI, se emplea la aceleración de un movimiento uniformemente variado en el cual la velocidad del cuerpo en cada segundo varía en 1 m/s. Esto es:

$$\frac{1\ \text{m/s}}{1\ \text{s}} = 1\ \text{m/s}^2.$$

La aceleración se expresa en metros por segundo en cada segundo.

La importancia de conocer la aceleración del cuerpo consiste en que esta es necesaria para calcular la velocidad instantánea del cuerpo.

Si son conocidas la velocidad inicial del cuerpo $\vec{v}_0$ y su aceleración $\vec{a}$, la velocidad instantánea $\vec{v}$ del cuerpo puede ser calculada en cualquier instante de tiempo. De la ecuación 2.12 se obtiene que:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t. \qquad (2.14)$$

Proyecciones de las magnitudes físicas aceleración y velocidad

En el epígrafe 2.5 aprendiste que durante el movimiento rectilíneo resultaba conveniente hacer coincidir el eje de coordenadas, por ejemplo, el del eje *OX*, con el sentido de la trayectoria del movimiento.

Siendo el movimiento rectilíneo, los vectores $\vec{v}_0$ y $\vec{v}$ están dirigidos a lo largo de la misma línea recta, que en nuestro caso no es más que la trayectoria del movimiento.

Proyectando los vectores $\vec{v}_0$, $\vec{v}$ y $\vec{a}$ sobre el eje *OX*, obtenemos las proyecciones v_{0x}, v_x y a_x. Entonces, la ecuación 2.14 puede escribirse como:

$$v_x = v_{0x} + a_x \cdot t. \qquad (2.15)$$

Los vectores $\vec{v}_0$, $\vec{v}$ y $\vec{a}$ se encuentran sobre una misma recta (eje *OX*), luego los valores absolutos de sus proyecciones son iguales a los módulos de los propios vectores. Los signos de las proyecciones se determinan en dependencia del sentido de dichos vectores en relación con el sentido del eje elegido.

Si $v > v_0$, entonces la variación de la velocidad $\Delta v = v - v_0 > 0$, y el sentido del vector aceleración $\vec{a}$ coincide con el sentido del vector $\vec{v}$. En este caso se dice que el cuerpo se mueve con *un movimien-*

to uniformemente acelerado (a es constante y positiva). Tal es el caso, por ejemplo, del movimiento de un ómnibus que al arrancar desde una parada incremente su velocidad, acelerándose.

Si $v < v_0$, entonces la variación de la velocidad $\Delta v < 0$, y el sentido de aceleración es contrario a la del vector $\vec{v}_0$. Se dice entonces que el cuerpo se mueve con un movimiento uniformemente retardado (a es constante y negativa). Tal es el caso de un móvil cuando al aplicar los frenos disminuye su velocidad hasta detenerse.

2.11 *Representación gráfica de la velocidad en el movimiento rectilíneo uniformemente variado*

Al igual que hicimos en el movimiento rectilíneo uniforme, la velocidad de un movimiento variado puede ser representada gráficamente.

Durante el movimiento rectilíneo uniformemente variado la velocidad no se mantiene constante, sino que varía constantemente en el trancurso del tiempo de acuerdo con la ecuación 2.15:

$$v_x = v_0 + a_x t.$$

Si en un sistema de coordenadas representamos cómo varía la velocidad en relación con el tiempo, las gráficas de las proyecciones de la velocidad adoptan la forma de la figura 2.27, ya que de Matemática conoces que una ley de proporcionalidad directa se representa por una línea recta.

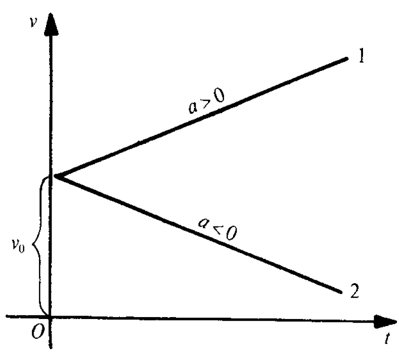


Fig. 2.27

En la figura se representa el movimiento de dos cuerpos que en el instante inicial ($t = 0$) poseen una velocidad inicial igual a v_0.

La recta 1 corresponde al movimiento de un cuerpo cuya velocidad aumenta (aceleración positiva), y la recta 2, al movimiento de un cuerpo cuya velocidad disminuye con el tiempo (aceleración negativa).

Si la velocidad inicial v_0 es igual a cero, entonces la ecuación 2.15 adopta la forma:

$$v = a\,t$$

y la gráfica que corresponde a ese movimiento tiene la forma que se ha representado en la figura 2.28.

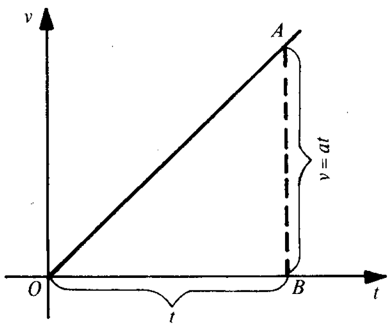


Fig. 2.28

Problemas resueltos

1. Un cuerpo se mueve en línea recta de manera tal que su velocidad aumenta continuamente. La aceleración es constante y su valor modular es igual a 4 m/s^2. En el instante en que se empezó a observar el movimiento, su velocidad era de 20 m/s. ¿Qué velocidad poseerá el cuerpo 4 s después?

Solución

Elijamos un eje de coordenadas y orientémoslo en el mismo sentido que el del movimiento del cuerpo. Al observar el movimiento, la velocidad del móvil era de 20 m/s, luego la proyección del vector velocidad inicial $\vec{v}_0$ es positiva e igual al módulo de ese vector, es decir $v_0 = 20$ m/s.

Para determinar la velocidad final del cuerpo al cabo de los 4 s utilizamos la ecuación 2.15:

$$v = v_0 + at.$$

Como la velocidad del cuerpo aumenta durante el movimiento, la proyección del vector aceleración $\vec{a}$ es positiva, o sea, del mismo signo que $\vec{v_0}$ e igual a 4 m/s^2. Por eso la velocidad del cuerpo al cabo de 4 s será:

$$v = 20\ m/s + 4\ m/s^2 \cdot 4\ s = 36\ m/s.$$

2. Un automóvil pasa cerca de un observador con una velocidad de 10 m/s. En ese instante el chofer aplica los frenos y el automóvil comienza a moverse con una aceleración de 1 m/s^2. ¿Qué tiempo debe transcurrir para que dicho automóvil se detenga?

Solución

Tomemos por origen de coordenadas el lugar donde se encuentra el observador y orientemos el eje de coordenadas en el sentido del movimiento del automóvil. Al pasar este frente al observador su velocidad era de 10 m/s, luego la proyección del vector velocidad del automóvil será positiva e igual a 10 m/s.

Como la velocidad del automóvil disminuye, la proyección del vector aceleración es negativa, o sea, de signo contrario al de la velocidad, por tanto, $a = -1\ m/s^2$.

Para calcular el tiempo, podemos utilizar la ecuación:

$$v = v_0 + a \cdot t,$$

de donde:

$$t = \frac{v - v_0}{a}.$$

Al cabo del intervalo de tiempo $\Delta t = t$, el automóvil se detiene, por lo que su velocidad final es cero, y por tanto:

$$t = -\frac{v_0}{a}.$$

Si sustituimos los valores numéricos, obtenemos:

$$t = -\frac{10\ m/s}{-1\ m/s^2} = 10\ s.$$

3. En la figura 2.29 se representan las gráficas de velocidad de tres cuerpos que se mueven rectilíneamente.

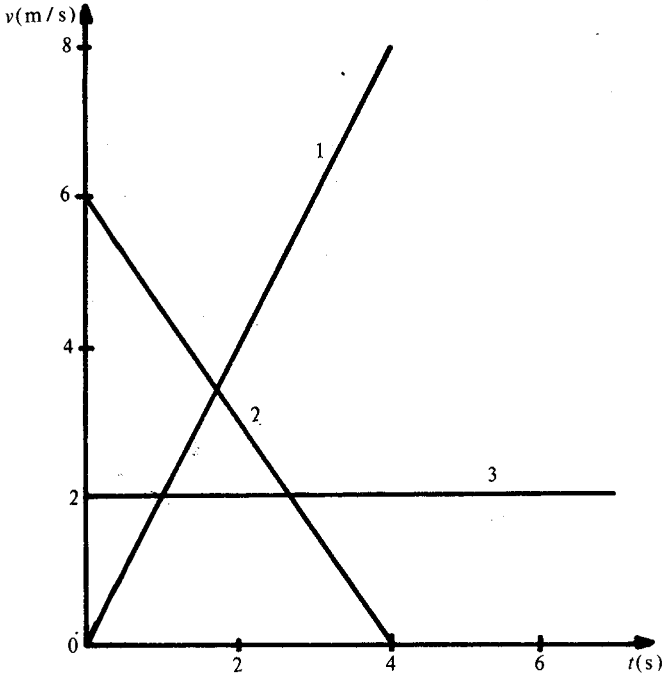


Fig. 2.29

a) ¿Cuál es el carácter de dichos movimientos?
b) A partir de las gráficas, determina la velocidad inicial de estos movimientos.
c) Calcula la aceleración del cuerpo 1.

Solución

a) El análisis de las gráficas de las velocidades de los tres cuerpos permite afirmar que las gráficas 1 y 2 corresponden a movimientos uniformemente acelerado y retardado, respectivamente, ya que la velocidad varía linealmente, con respecto al tiempo, mientras que la gráfica 3 corresponde a un cuerpo que se mueve con movimiento uniforme (v es constante).

b) Del análisis de la figura se aprecia que para $t = 0$, las velocidades de los cuerpos son:

$v_1 = 0$
$v_2 = 6$ m/s
$v_3 = 2$ m/s.

c) De la gráfica se obtienen los datos que permiten calcular la aceleración del cuerpo 1:

$v_0 = 0$
$v_0 = 8$ m/s
$t = 4$ s
$a = ?$

La aceleración en un movimiento rectilíneo uniformemente variado puede calcularse a partir de la ecuación:

$$a = \frac{v - v_0}{t}.$$

Sustituyendo los valores se tiene que:

$$a = \frac{8 \text{ m/s}}{4 \text{ s}} = 2 \text{ m/s}^2.$$

Tareas

31. ¿A qué se denomina aceleración? ¿Por qué es preciso conocerla?

32. ¿En qué se diferencia el movimiento rectilíneo acelerado de uno retardado?

33. ¿Cómo está dirigido el vector aceleración en el caso de un movimiento rectilíneo variado?

34. Un ómnibus se pone en movimiento con una aceleración constante de 1,5 m/s^2. ¿Después de qué intervalo de tiempo alcanzará una velocidad de 54 km/h?

35. Un automóvil que se mueve con una velocidad de 36 km/h se le aplican los frenos y, como consecuencia de esto, se detiene al cabo de 4 s. ¿Con qué aceleración se mueve el automóvil durante el frenado?

36. La gráfica de la figura 2.30 muestra las velocidades de un móvil en distintos intervalos de tiempo.
    a) ¿Cómo es el movimiento del cuerpo en los tramos *AB, BC, CD, DE* y *EF*?
    b) Determina la aceleración del móvil en el tramo *EF*.

37. En la figura 2.31 se representan las gráficas de las velocidades del movimiento de tres cuerpos. Según estas gráficas:
    a) determina qué significan los segmentos *OA, OB,* y *OC* sobre los ejes de coordenadas;
    b) determina las aceleraciones de los tres cuerpos.

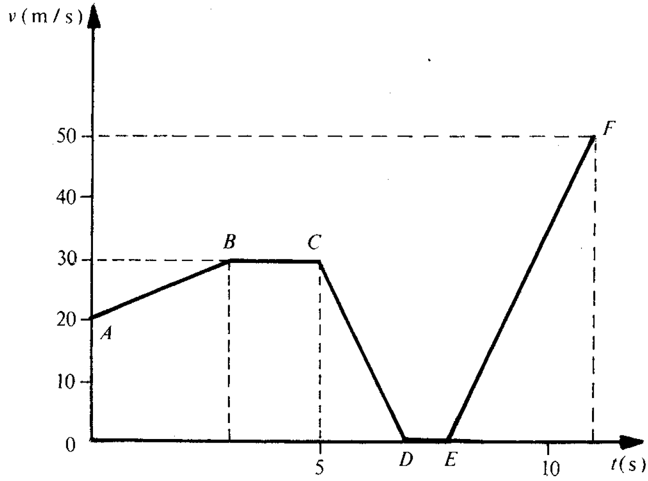


Fig. 2.30

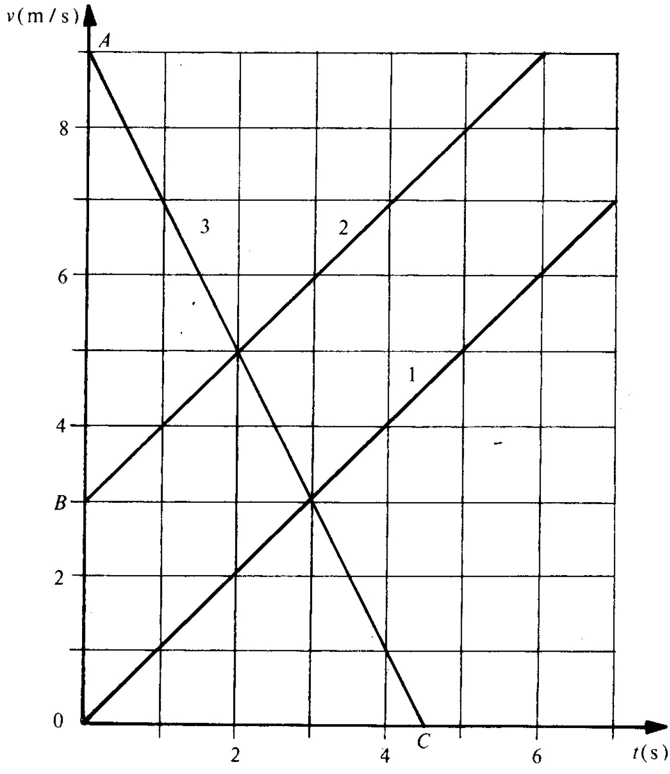


Fig. 2.31

38. Utilizando las gráficas de velocidades de tres cuerpos (fig. 2.32):
   a) determina la aceleración de cada cuerpo,
   b) calcula a partir del dato anterior, la velocidad que poseerá el cuerpo 1 para $t = 8$ s,
   c) ¿en qué coinciden y en qué se diferencian los movimientos representados por las gráficas 2 y 3?

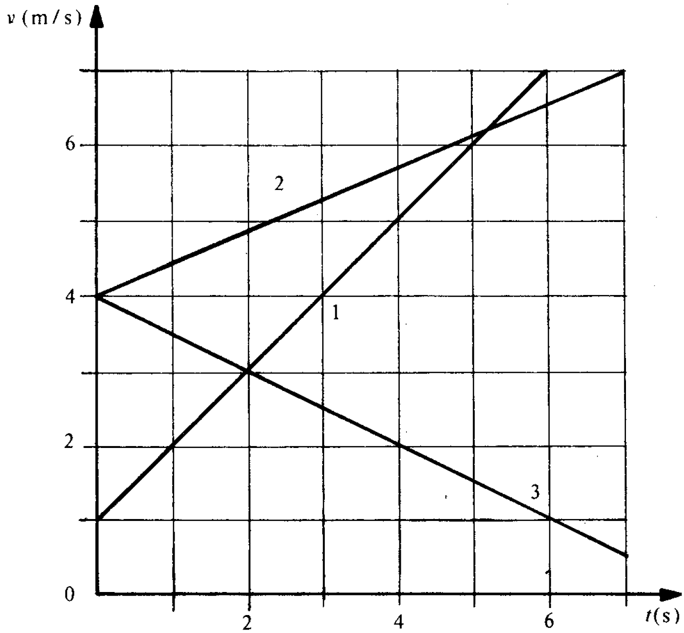


Fig. 2.32

2.12 *Desplazamiento de un cuerpo durante el movimiento uniformemente variado*

La tarea principal de la Cinemática consiste en determinar la posición del cuerpo en cualquier instante de tiempo; para ello resulta necesario conocer el desplazamiento del cuerpo. ¿Cómo calcular esta magnitud en el caso de un movimiento variado?

En el epígrafe 2.6 conociste que el desplazamiento de un cuerpo que se mueve con un movimiento uniforme se calcula a partir de la ecuación 2.7: $\Delta\vec{s} = \vec{v} \cdot \Delta t$ y que, además, mediante la utilización del método gráfico se puede también conocer el valor absoluto del desplazamiento de un cuerpo en un intervalo de tiempo dado, al ser este numéricamente igual al área de la figura (rectángulo de la figura 2.17).

Intentemos, a partir del método gráfico, obtener la ecuación para determinar el desplazamiento de un cuerpo que se mueve con un movimiento variado.

Sabemos que en el movimiento variado, la velocidad no se mantiene constante, sino que varía en el transcurso del tiempo desde una velocidad inicial $\vec{v}_0$ hasta una velocidad $\vec{v}$, cuya dependencia en relación con el tiempo se podía representar gráficamente como se muestra en la figura 2.33.

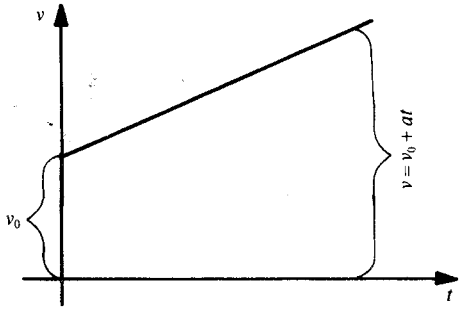


Fig. 2.33

Limitemos en la gráfica de movimiento de la figura 2.33 un pequeño segmento ab (fig. 2.34) y proyectemos sobre el eje de los tiempos, los puntos a y b. La longitud del segmento cd así obtenido es numéricamente igual al pequeño intervalo de tiempo para el cual la velocidad varía entre v_a y v_b. Bajo el segmento ab de la gráfica se obtiene una franja estrecha $abdc$ (sombreada).

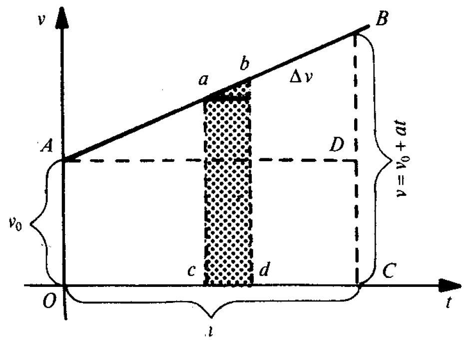


Fig. 2.34

Si en nuestro análisis hacemos el segmento *ab* lo suficientemente pequeño, se comprende que la variación de la velocidad será también lo suficientemente pequeña como para que podamos considerar que el movimiento, en tan pequeño intervalo de tiempo, es uniforme (ya que la velocidad prácticamente es constante); por lo que la franja estrecha poco diferirá de un rectángulo, cuya área según conocemos es numéricamente igual al valor absoluto del desplazamiento.

A partir de lo anterior, si dividimos toda el área de la figura en infinitas franjas, el desplazamiento realizado por el cuerpo durante el tiempo t es numéricamente igual al área de la figura bajo la gráfica y que en nuestro caso corresponde al área del trapecio *OABC*.

De la figura 2.34 se observa que esta área puede obtenerse sumando el área del rectángulo *OACD* con el área del triángulo rectángulo *ABD*. De Matemática conoces que el área de un rectángulo es igual al producto de la base por la altura, y que el área de un triángulo rectángulo es igual a la mitad del producto de la base por la altura; luego el área del trapecio será:

$$b \cdot h + \frac{b \cdot h}{2};$$

por tanto, a partir de los datos de la figura 2.34, se obtiene:

base del rectángulo: $OC = t$
altura del rectángulo: $OA = v_{0x}$
base del triángulo: $OC = t$
altura del triángulo: at.

Sustituyendo estos valores:

$$s_x = v_{0x} \cdot t + \frac{a_x \cdot t \cdot t}{2}$$

o sea: $$s_x = v_{0x} \cdot t + \frac{a_x \cdot t^2}{2} \tag{2.16}$$

Es necesario recordar que s_x, v_{0x} y a_x pueden ser positivas o negativas, es decir, son las proyecciones de los vectores $\vec{s}$, $\vec{v_0}$ y $\vec{a}$ sobre el eje X.

De la ecuación 2.16 se observa que si la velocidad inicial del cuerpo es igual a cero, el desplazamiento del cuerpo es igual a:

$$s_x = \frac{a_x \cdot t^2}{2}.$$

Conocida la ecuación 2.16 que permite calcular el desplazamiento del cuerpo, estamos en condiciones de poder conocer con facilidad la fórmula de cálculo de las coordenadas x del cuerpo en cualquier momento de tiempo. Según la ecuación 2.8, para determinar la coordenada x de un cuerpo en cualquier instante de tiempo t, hay que añadir a la coordenada inicial x_0 la proyección del vector desplazamiento del cuerpo sobre el eje de coordenadas, esto es:

$$x = x_0 + s_x.$$

Por tanto, sustituyendo en esta expresión el valor de s_x determinado a partir de la ecuación (2.16), se obtiene:

$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{a_x \cdot t^2}{2} \qquad (2.17)$$

La ecuación (2.17) permite calcular la posición del cuerpo en cualquier instante de tiempo para el movimiento rectilíneo uniformemente variado.

TRABAJO DE LABORATORIO 2
Estudio del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

En este trabajo de laboratorio analizarás cómo varía el desplazamiento de un cuerpo que se mueve con movimiento uniformemente acelerado en función del tiempo.

Instrumento y materiales: Carro, cronometrador de cinta, fuente de corriente directa (C.D.), cables de conexión, banda de goma, regla o varilla de 1 m de longitud, regla de 30 cm graduada en milímetros, cinta adhesiva, mordaza.

Indicaciones para el trabajo

1. Fija en uno de los extremos de la mesa el cronometrador de cinta mediante una mordaza y conéctalo con la fuente de la corriente directa (C.D.). La tensión de salida de la fuente debe ser de 2-3 V.
2. Toma una porción de cinta de unos 2 m largo; fija uno de sus extremos a la parte posterior del carro; utiliza para ello la cinta adhesiva; traza una marca con el lápiz sobre la cinta a unos 20 cm de la zona de sujeción; pasa el otro extremo por la zona de registro del cronometrador.

3. Fija la banda elástica en uno de los extremos de la regla de 1 m de longitud, y colócala en posición vertical; registra sobre la regla mediante una marca apropiada, la posición del extremo libre de la banda de goma, después estira la liga una longitud de 10 a 15 cm; marca también en la regla esta nueva posición del extremo de la liga. Fija este extremo al tornillo de sujeción que tiene el carro en su parte anterior. Desplaza el conjunto, de manera que el carro quede situado a unos 20 cm del cronometrador. Con una mano mantén fijo el carro y con la otra empuja la regla hasta lograr una deformación en la liga de la misma medida que la señalada en la regla.
4. Libera el carro y muévete junto a él de manera que la deformación de la liga permanezca constante (fig. 2.35). Repite esta actividad varias veces hasta que logres mantener la deformación de la liga mientras te mueves. Prepara nuevamente el conjunto y cuando la liga esté deformada la medida indicada y el carro fijo, un compañero debe tirar suavemente de la cinta de forma que esta quede bien extendida. Pon en funcionamiento el cronometrador y posteriormente libera el carro y muévete junto con él de forma que se mantenga la deformación de la liga.

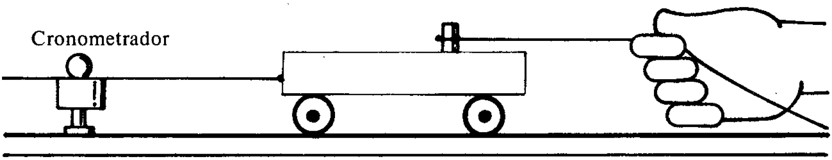


Fig. 2.35

5. Desprende la cinta, y con la regla graduada en milímetros determina los desplazamientos que a partir del origen de la cinta, el carro realiza para los intervalos de tiempo 1, 2, 3,... Toma como intervalo de tiempo 5 marcas. Confecciona, con las medidas realizadas, una tabla similar a la 2.1 con los valores de los desplazamientos y del tiempo.
6. Con estos datos construye una gráfica del desplazamiento en función del tiempo. ¿Qué te sugiere la forma de la gráfica?
7. Eleva cada uno de los intervalos de tiempo al cuadrado. Anota estos resultados en la columna de t^2 en la tabla. Con estos datos confecciona una gráfica del desplazamiento en función del tiempo al cuadrado. ¿Qué conclusiones se deducen de la forma de la nueva gráfica? ¿Coincide este resultado con lo establecido por la ecuación 2.17?

Tarea adicional. Calibra el cronometrador. Con el valor de calibración calcula la aceleración con que se mueve el carro en este experimento.

Tabla 2.1

Desplazamiento	*Tiempo empleado*	$(\Delta t)^2$	*Aceleración*
s (m)	Δt (s)	$(\Delta t)^2$ (s^2)	a (m/s^2)
0,50			
0,75			
1,0			
1,25			
aceleración			

Problema resuelto

El chofer de un automóvil que se mueve rectilíneamente con una velocidad de 72 km/h, ve la luz roja de un semáforo y aplica los frenos, por lo que el automóvil comienza a disminuir su velocidad con una aceleración de 5 m/s^2. ¿Qué distancia recorrió el automóvil al cabo de 2 s de haberse aplicado los frenos? ¿Qué distancia recorrió hasta detenerse?

Solución

Tracemos el eje de coordenadas X en la misma dirección que la del movimiento y escojamos como origen de coordenadas el punto de la carretera en el cual el automóvil comenzó a frenar. El tiempo lo referimos al momento en el cual el chofer aplicó los frenos.

De acuerdo con la orientación del sistema de coordenadas, el sentido de la velocidad $\overrightarrow{v_0}$ del automóvil coincide con el del eje X, mientras que la aceleración tiene sentido contrario. Luego la proyección del vector velocidad será positiva y la del vector aceleración será negativa.

La coordenada del automóvil se calcula mediante la expresión (2.17):

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}.$$

Según los datos del problema, $x_0 = 0$, $v_0 = 72$ km/h $= 20$ m/s, $a = -5$ m/s^2 y $t = 2$ s. Por tanto:

$$x = 0 + 20 \text{ m/s} \cdot 2 \text{ s} - \frac{5 \text{ m/s}^2 \cdot (2 \text{ s})^2}{2}$$

$$x = 20 \text{ m/s}^2 \cdot 2 \text{ s} - \frac{5 \text{ m/s}^2 \cdot 4 \text{ s}^2}{2}$$

$$x = 30 \text{ m}.$$

Obtengamos ahora la distancia que recorrió el automóvil hasta detenerse. Para ello es necesario conocer el tiempo que este estuvo moviéndose hasta que se detuvo. Utilizando la ecuación (2.15), obtenemos:

$$v = v_0 + a\ t, \text{ luego } t = \frac{v - v_0}{a},$$

pero su velocidad final es cero (momento en que se detuvo), por tanto:

$$t = -\frac{v_0}{a}.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de la coordenada

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}.$$

tenemos:

$$x = x_0 + v_0(-v_0/a) + \frac{a(-v_0/a)^2}{2}$$

$$x = x_0 - \frac{v_0^2}{a} + \frac{a}{2} \cdot \frac{v_0^2}{a^2}$$

$$x = x_0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{a}.$$

Al sustituir los valores numéricos, se obtiene:

$$x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(20 \text{ m/s})^2}{-5 \text{ m/s}^2} = 40 \text{ m}.$$

2.13 *Velocidad media en el movimiento rectilíneo uniformemente variado*

Frecuentemente, en la práctica se precisa conocer la velocidad media en un movimiento rectilíneo uniformemente variado.

A partir de los conocimientos que poseemos determinemos cómo calcularla.

Conocemos que la velocidad media de un movimiento uniforme se calcula por la ecuación:

$$v_m = \frac{s}{t}\,.$$

En un movimiento rectilíneo uniformemente variado, el valor del desplazamiento se calcula por la ecuación:

$$s = v_0 t + \frac{a \cdot t^2}{2}.$$

Sustituyamos en esta ecuación el valor absoluto de la aceleración luego:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{\frac{v - v_0}{t} \cdot t^2}{2}$$

$$s = v_0 t + \frac{(v - v_0)t}{2}$$

$$s = \frac{2v_0 t + v \cdot t - v_0 \cdot t}{2}$$

de donde: $s = \dfrac{(v_0 + v)\, t}{2}$. (2.18)

Sustituyendo este valor en la expresión de la velocidad media, tenemos que:

$$v_m = \frac{(v_0 + v)}{2}. \qquad (2.19)$$

En un movimiento rectilíneo uniformemente variado, la velocidad media para un determinado intervalo de tiempo *es igual a la semisuma de las velocidades inicial y final en ese intervalo.*

2.14 *Relación entre el desplazamiento y la velocidad de un cuerpo en el movimiento rectilíneo uniformemente variado*

En ocasiones, es necesario calcular el desplazamiento de un cuerpo, cuando se desconoce el tiempo en que se ha desarrollado el movimiento y son conocidas las velocidades final e inicial del cuerpo.

La expresión que en estas condiciones nos permite calcular el desplazamiento del cuerpo, se puede obtener si combinamos las ecuaciones (2.18) y (2.15).
Despejemos el valor de t en la ecuación (2.15):

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

y sustituyámosla en la ecuación (2.18):

$$s = \frac{v + v_0}{2} \cdot \frac{v - v_0}{a}$$

$$s = \frac{(v + v_0)(v - v_0)}{2a}$$

de donde se obtiene: $s = \dfrac{v^2 - v_0^2}{2a}$. (2.20)

Conocido el valor del desplazamiento se puede calcular también la coordenada, conocidas las velocidades inicial y final, y la aceleración, ya que:

$$x = x_0 + s.$$

A partir de la ecuación (2.20), se puede hallar el valor de la velocidad del cuerpo para cualquier punto de la trayectoria:

$$v^2 - v_0^2 = 2as$$

$$v^2 = v_0^2 + 2as. \qquad (2.21)$$

Problema resuelto

Al acercarse un tren a la estación, el maquinista desconectó el motor de la locomotora la cual continuó después su movimiento con una aceleración constante e igual a 0,1 m/s^2. ¿Cuál es el valor del desplazamiento del tren hasta detenerse si en el momento de desconectar el motor la velocidad del tren era de 20 m/s? ¿Qué tiempo demoró el tren en detenerse?

Solución

Dirijamos el eje de coordenadas en el sentido del vector velocidad inicial del tren. De esta forma la proyección de la velocidad es positiva e igual a 20 m/s.

Al desconectar el motor, la velocidad del tren disminuye hasta detenerse, por tanto la proyección del vector aceleración es negativa e igual a $-0{,}1$ m/s^2.

El desplazamiento del tren puede calcularse despejando s a partir de la ecuación (2.21):

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}.$$

Sustituyendo los datos del problema y tomando en consideración que en el instante en que el tren se detiene, su velocidad es cero, obtenemos:

$$s = \frac{0 - (20 \text{ m/s})^2}{-2 \cdot 0{,}1 \text{ m/s}} = \frac{400 \text{ m}}{0{,}2} = 2\,000 \text{ m}.$$

El tiempo transcurrido hasta que el tren se detuvo se puede hallar mediante la ecuación: $v = v_0 + at$, ya que $v = 0$, tenemos:

$$t = -\frac{v_0}{a}.$$

Sustituyendo los valores:

$$t = -\frac{20 \text{ m/s}}{-0{,}1 \text{ m/s}^2}$$

$$t = 200 \text{ s}.$$

Movimiento curvilíneo

¿Son todos los movimientos rectilíneos?

Hasta el presente, durante los dos temas anteriores, estudiamos movimientos cuyas trayectorias eran líneas rectas. Sin embargo, en la naturaleza y en la técnica encontramos con frecuencia movimientos cuyas trayectorias no son líneas rectas, sino curvas. Así, por ejemplo, se mueven los cuerpos lanzados formando un ángulo con el horizonte, los planetas, los satélites, los automóviles y demás medios de transportes, las distintas partes de las maquinarias, el agua de los ríos, etcétera. Todos estos tipos de movimientos reciben el nombre de *curvilíneos.*

2.15 *Velocidad del movimiento curvilíneo*

Durante el estudio del movimiento rectilíneo, las variaciones del vector de posición ocurrían sin que variara la dirección del movimiento. También, en este movimiento siempre coincidían la dirección y el sentido de los vectores velocidad y desplazamiento. ¿Mantendrán este mismo carácter los vectores de posición, desplazamiento y velocidad durante el movimiento curvilíneo?

En la figura 2.36 se representa la trayectoria curvilínea de un cuerpo moviéndose en un plano. En esta se destacan los vectores de posición $\vec{s}_1$ y $\vec{s}_2$ de los puntos A y B, respectivamente, sus coordenadas y el vector desplazamiento $\Delta\vec{s}$.

Al analizar la figura 2.36a se aprecia que al trasladarse el cuerpo por una trayectoria curvilínea entre los puntos A y B varían las dos coordenadas.

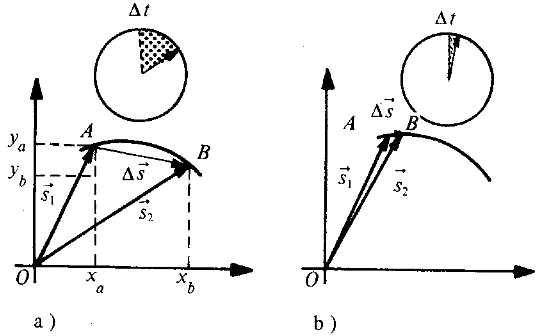


Fig. 2.36

Para conocer la dirección de la velocidad del cuerpo en cada instante, determinemos inicialmente la velocidad instantánea. Para ello, analicemos la variación que sufre el vector de posición en un intervalo de tiempo extremadamente pequeño (fig. 2.36b). En esta se aprecia como el vector $\overrightarrow{\Delta s}$ tiende a hacerse tangente a la curva.

Resulta claro que si se analiza la variación que experimenta el vector de posición en cada uno de los puntos de la trayectoria *AB*, la variación instantánea de Δs tenderá a hacerse tangente a la curva (fig. 2.37). Esto significa que el vector velocidad instantánea $\vec{v}$ también será tangente a la curva en cada uno de sus puntos.

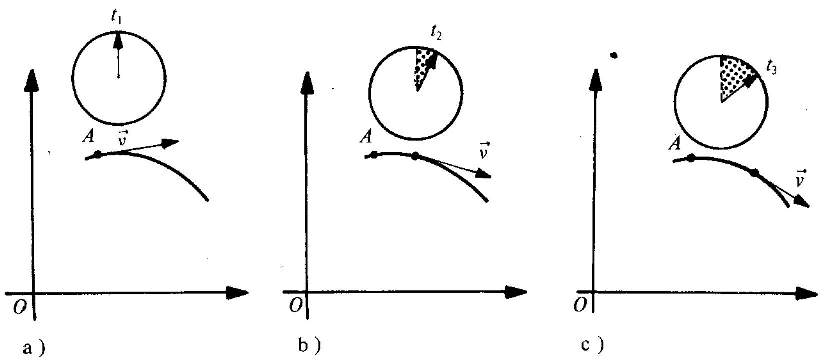


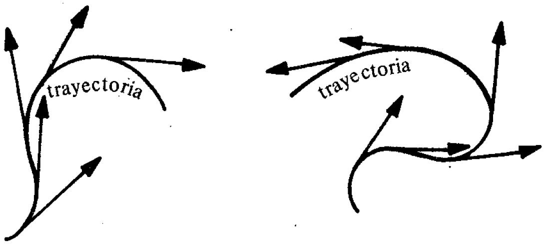
Fig. 2.37

La velocidad de un cuerpo en cualquier punto de una trayectoria curvilínea, está dirigida tangencialmente a la trayectoria en cada punto y su sentido coincide con el del movimiento en dichos puntos.

Los ejemplos de la figura 2.38 permiten percatarnos de que la velocidad en un punto cualquiera de la trayectoria de un cuerpo con movimiento curvilíneo es realmente tangencial.

Fig. 2.38

Así pues, la velocidad instanánea del cuerpo en distintos puntos de la trayectoria curvilínea tiene diferentes direcciones tal como se muestra en la figura 2.39. No obstante, en esta se aprecia que el módulo de la velocidad puede permanecer constante (fig. 2.39a) o variar de un punto a otro (fig. 2.39b).



a)   b)

Fig. 2.39

2.16 *Movimiento de proyectiles*

Un interesante ejemplo de un movimiento curvilíneo lo constituye el movimiento de un cuerpo que se lanza formando un ángulo con la horizontal.

Durante la Secundaria Básica estudiaste el movimiento de un cuerpo en caída libre. Estudiemos ahora el comportamiento de un cuerpo cuando es lanzado formando un ángulo α con la horizontal.

En Física, para designar cualquier cuerpo lanzado y cuyo movimiento se realice bajo la acción de la fuerza de gravedad se utiliza la palabra *proyectil.* Por eso en este epígrafe al analizar el movimiento de un cuerpo lanzado nos referiremos al *movimiento de un proyectil.*

Supongamos que un proyectil de masa m es lanzado desde un punto O con una velocidad inicial $\vec{v}_0$ cuya dirección forma un ángulo α con la horizontal y deseamos conocer la posición del proyectil en el espacio, así como su velocidad, en cualquier instante de tiempo.

Consideraremos que la única interacción que experimenta el proyectil durante su movimiento es la gravitatoria, la cual está dirigida en dirección vertical y sentido hacia abajo. En Secundaria

Básica, durante la resolución de problemas sobre caída libre, aprendiste que el eje de las ordenadas de un sistema de ejes rectangulares podía dirigirse hacia arriba o hacia abajo, en dependencia de las condiciones del problema, eligiéndose como cuerpo de referencia a la Tierra. Por ello, analizando que en nuestro caso el proyectil parte del punto O situado sobre la superficie de la Tierra y que su movimiento se realiza hacia arriba, dirigimos los ejes coordenadas tal y como se muestra en la figura 2.40.

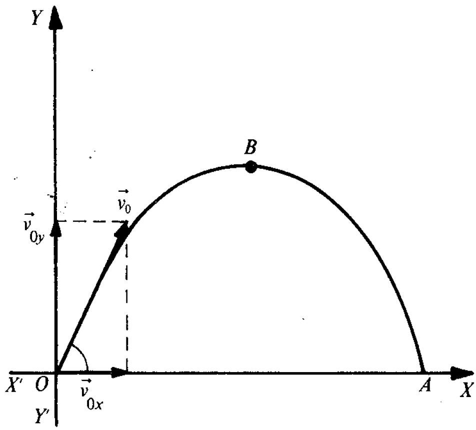


Fig. 2.40

Analicemos bajo qué condiciones se mueve el proyectil. Como sabemos, el movimiento de un cuerpo está determinado entre otros, por las condiciones iniciales, es decir, su posición y su velocidad en el instante inicial ($t = 0$).

Las condiciones iniciales del proyectil de la figura 2.40 son las siguientes:

En el instante $t = 0$ el proyectil se encuentra en el punto O y posee una velocidad inicial $\vec{v}_0$, tangente en ese punto a la trayectoria curvilínea que describe el proyectil y que puede descomponerse tal como aprendiste en el capítulo 1, en dos componentes: una vertical $\vec{v}_{0y}$ y una componente horizontal $\vec{v}_{0x}$.

Las componentes $\vec{v}_{0y}$ y $\vec{v}_{0x}$ *sobre los ejes pueden calcularse como:*

$v_{0x} = v_0 \cos \alpha$ (componente horizontal) (2.22)

$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} \alpha$ (componente vertical). (2.23)

Consideremos que el movimiento del proyectil se realiza en un plano. Como sabemos, entonces variarán dos coordenadas: una horizontal y una vertical.

Para facilitar el estudio del movimiento de un proyectil, frecuentemente este se descompone en las direcciones horizontal y vertical.

En la dirección horizontal el movimiento del proyectil es rectilíneo y uniforme, ya que en esa dirección la acción de la gravedad es nula y consecuentemente, la aceleración. Por tanto, conocida la velocidad inicial del proyectil, puede calcularse su posición en cualquier instante de tiempo t, a partir de la ecuación:

$$x = v_{0x} \cdot t,$$

pero:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha$$

luego:

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t \qquad (2.24)$$

donde:

x es la posición del proyectil en el eje X;
$v_0 \cos \alpha$, el valor de la componente de la velocidad v_{0x};
t, el tiempo transcurrido desde el instante $t = 0$.

Como en la dirección horizontal el movimiento es rectilíneo y uniforme (v = constante), luego la velocidad en cualquier instante de tiempo será:

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha = \text{(constante)}. \qquad (2.25)$$

Como hemos observado, en la dirección vertical; sobre el proyectil actúa la fuerza de gravedad que hace que el movimiento en esa dirección sea uniformemente variado; por tanto, la posición del proyectil en la dirección vertical se determina por las mismas ecuaciones que utilizaste para el movimiento uniformemente variado en la dirección horizontal. Expresando estas en función de sus proyecciones en la dirección vertical, tenemos:

$$y = v_{0y} t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v = v_{0y} + at$$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2ay$$

y como:

$$v_{0y} = v_0 \text{ sen } \alpha .$$

$$v = (v_0 0 \text{ sen } \alpha) \cdot t + \frac{1}{2} at^2 \qquad (2.26)$$

$$v_y = v_0 \text{ sen } \alpha + at \qquad (2.27)$$

$$v_y^2 = (v_0 \text{ sen } \alpha)^2 + 2a_y. \qquad (2.28)$$

Al trabajar con las ecuaciones (2.26), (2.27) y (2.28), debemos recordar que en la dirección vertical, la aceleración $\vec{a}$ es igual a la aceleración de la gravedad $\vec{g}$, cuyo valor es igual a 9,8 m/s².

Conocidas las componentes v_x y v_y en un instante cualquiera, puede calcularse el valor modular de la velocidad v como:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} . \qquad (2.29)$$

El conjunto de las ecuaciones (2.24) a la (2.29) permiten determinar la posición y la velocidad del proyectil en cualquier instante de tiempo; *ellas son las ecuaciones generales del movimiento.* Al utilizar dichas ecuaciones es necesario tomar en consideración la disposición de los ejes de coordenadas rectangulares de forma similar a como se hizo en la Secundaria Básica. A partir de esto, las proyecciones $\vec{v_x}$, $\vec{v_y}$ y $\vec{a}$ sobre los ejes respectivos serán positivas o negativas según sus sentidos coincidan o no con la dirección positiva de los ejes rectangulares.

El proyectil puede ser también lanzado en dirección horizontal. En este caso, la velocidad inicial $\vec{v_0}$ forma un ángulo $\alpha = 0$ con el horizonte. Así, por ejemplo, está dirigida la velocidad inicial de un proyectil que ha sido lanzado desde un avión en vuelo horizontal (fig. 2.41).

La trayectoria del movimiento de un cuerpo que es lanzado en sentido horizontal o bien formando un ángulo con el horizonte, puede ser observada con evidencia en un sencillo experimento. Un recipiente lleno de agua se coloca a cierta altura sobre una mesa y se une con una manguera de goma (fig. 2.42). Los chorros de agua que salen desde distintas posiciones y con distintos ángulos muestran la trayectoria de las partículas de agua. Variando el ángulo, bajo el que sale el chorro de agua, podemos cerciorarnos de que la máxima distancia se alcanza con un ángulo de 45°. El conocimiento de esta particularidad sirve de base a los artilleros cuando realizan un tiro con un arma de fuego (fig. 2.43).

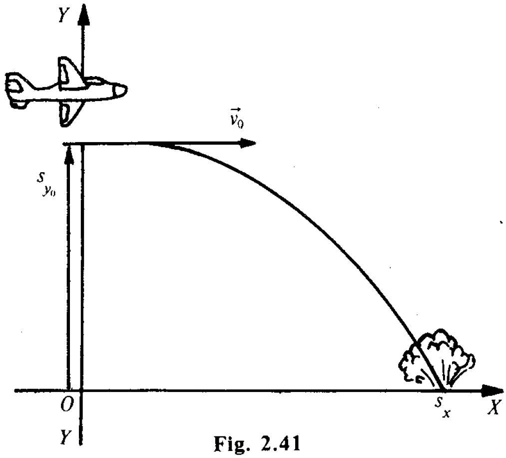


Fig. 2.41

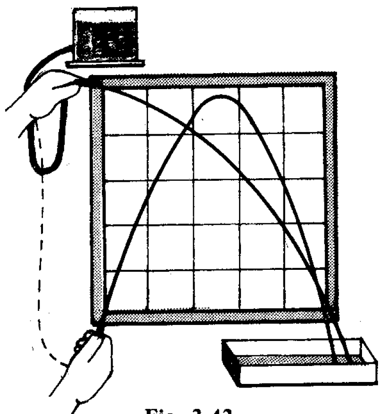


Fig. 2.42

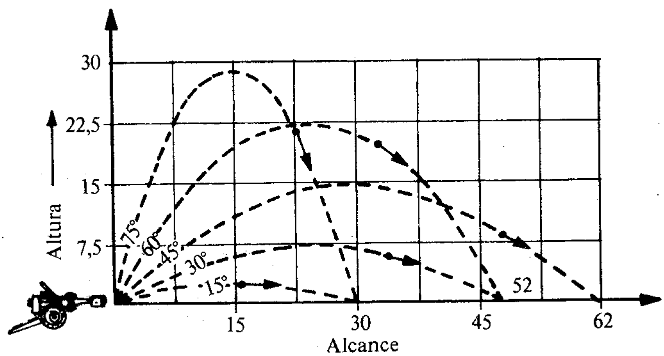


Fig. 2.43

Veamos sobre la base de la resolución de algunos problemas, la forma de aplicar los conocimientos hasta aquí aprendidos.

Problemas resueltos

1. Un proyectil se lanza formando un ángulo de 30° con respecto a la horizontal, con una velocidad de 25 m/s. Despreciando la resistencia del aire, determina al cabo de 1 s:
a) la posición del proyectil,
b) su velocidad.

Solución

Como el proyectil se lanza con una velocidad inicial $v_0 = 25$ m/s, formando un ángulo $\alpha = 30°$ con la horizontal, bajo la acción de la atracción terrestre, el proyectil describirá una trayectoria parabólica.

Con ayuda de un esquema como el que se muestra en la figura 2.44, analizaremos con mayor detalle las condiciones que se brindan en el enunciado del problema.

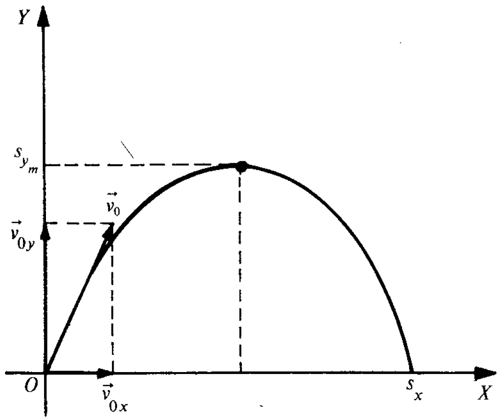


Fig. 2.44

Situemos el origen de nuestro sistema de coordenadas en la posición desde la cual se lanza el proyectil, orientado como se indica en la figura.

Debido a la atracción terrestre, el proyectil experimenta, según la dirección vertical, un movimiento uniformemente variado, y en la dirección horizontal, el proyectil se desplaza con movimiento uniforme; esto es, con velocidad constante. Se precisa determinar la posición del proyectil al cabo de 1 s después de ser lanzado, así como su velocidad.

Es evidente que en este caso el movimiento del proyectil ocurre en un plano y que para determinar su posición en un instante cualquiera, hay que determinar la proyección de su vector de posición para el instante deseado.

La posición del proyectil x en la dirección horizontal puede ser determinada a partir de la ecuación (2.24):

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t.$$

a) La posición del proyectil y en la dirección vertical puede ser determinada a partir de la ecuación (2.26):

$$y = (v_0 \operatorname{sen} \alpha)\, t + \frac{1}{2} a t^2.$$

Sustituyendo en estas expresiones los valores numéricos y tomando en consideración que la proyección de $\vec{a}$ es negativa:

$x = (25 \text{ m/s} \cdot \cos 30°)\ 1 \text{ s}.$

Conociendo que $\cos 30° = 0{,}86$,

$x = 21{,}5 \text{ m}$

$$y = (25 \text{ m/s} \cdot \operatorname{sen} 30°)\ 1 \text{ s} + \frac{1}{2}\ (-9{,}8 \text{ m/s}^2) \cdot 1 \text{ s}.$$

Conociendo que $\operatorname{sen} 30° = 0{,}5$,

$y = 12{,}5 \text{ m} - 4{,}9 \text{ m}$

$y = 7{,}6 \text{ m}.$

Al cabo de 1 s, el proyectil se encuentra en una posición que dista 21,5 m, en dirección horizontal del lugar en que fue lanzado y a una altura de 7,6 m.

b) Las velocidades v_x y v_y pueden calcularse a partir de las ecuaciones (2.25) y (2.27), respectivamente: $v_x = v_0 \cos \alpha$ y $v_y = v_0 \operatorname{sen} \alpha + at.$

Sustituyendo los valores numéricos:

$v_x = 25 \text{ m/s} \cdot \cos 30°$

$v_x = 25 \text{ m/s} \cdot 0{,}86$

$v_x = 21{,}5 \text{ m/s}$

$$v_y = 25\ m/s \cdot sen\ 30° + (-9{,}8\ m/s^2) \cdot 1\ s$$
$$v_y = 25\ m/s \cdot 0{,}5 - 9{,}8\ m/s^2$$
$$v_y = 2{,}7\ m/s.$$

El módulo de la velocidad puede determinarse a partir de:

$$v = \sqrt{(v_{0x})^2 + (v_{0y})^2}$$

$$v = \sqrt{(21{,}5\ m/s)^2 + (2{,}7\ m/s)^2}$$

$$v = \sqrt{480{,}5\ m^2/s^2}$$
$$v = 21{,}7\ m/s.$$

La dirección de la velocidad puede calcularse como:

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{2{,}7\ m/s}{21{,}5\ m/s}$$

$$\alpha = \tan^{-1} 0{,}13$$
$$\alpha = 7{,}4°.$$

En la posición antes mencionada, el módulo de la velocidad es de 21,7 m/s y su dirección forma un ángulo de 7,4° con la horizontal.

2. Sobre el análisis de la figura 2.44 y los datos del ejercicio anterior, calcula:

a) altura máxima alcanzada por el proyectil.
b) tiempo de vuelo del proyectil,
c) alcance del proyectil.

Solución

a) Para determinar la altura máxima emplearemos, la ecuación general para el cálculo de la posición en un movimiento uniformemente variado (2.17), o sea:

$$x = x_0 + v_0\, t + \frac{1}{2}\, a\, t^2,$$

que adaptando a las condiciones del problema, resulta:

$$y = v_{0y} + \frac{1}{2} a t^2 \qquad (1)$$

donde $v_{0y} = v_0 \, sen \, \alpha$.
Para calcular la altura máxima a partir de la ecuación (1) hace falta determinar el tiempo en que el proyectil alcanza dicha altura. Con esta finalidad nos valdremos de la ecuación de la velocidad para un movimiento rectilíneo uniformemente variado, teniendo en cuenta que cuando llega el proyectil a su altura máxima, su velocidad es cero.

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \qquad (2)$$

Proyectando sobre el eje Y y adaptando la ecuación (2) a las condiciones del problema, resulta:

$$0 = v_{0y} + at$$

$$-v_{0y} = at$$

$$t = -\frac{v_{0y}}{a}$$

pero $v_{0y} = v_0 \, sen \, \alpha$ y $a = -g$, luego:

$$t = \frac{v_0 \, sen \, \alpha}{g}. \qquad (3)$$

Con las ecuaciones (1) y (3) podemos calcular la altura máxima.

b) Para determinar el tiempo de vuelo, es decir, el tiempo que tarda el proyectil en subir y bajar según la dirección vertical, podemos emplear la ecuación general para la posición del cuerpo en un movimiento uniformemente variado escrito para el eje Y, teniendo en cuenta que cuando el proyectil regresa al suelo, su posición vertical y es nula.

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2} a_y t^2.$$

$$0 = v_{0y} t + \frac{1}{2} at^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot at^2 = -v_{0y} t$$

$$t = -\frac{2 v_{0y}}{a} \qquad (4)$$

como $v_{0y} = v_0 \, sen \; \alpha$ y $a = -g$

$$t = \frac{2 \, v_0 \, sen \; \alpha}{g}. \tag{5}$$

c) El alcance del proyectil x es la distancia que separa del lugar desde donde fue lanzando. Como en la dirección horizontal el proyectil se mueve con movimiento rectilíneo uniforme, entonces el alcance lo calcularemos mediante la ecuación de la posición para este tipo de movimiento, es decir:

$$x = x_0 + v_{0x}t$$

$$x = v_{0x} \, t, \tag{6}$$

donde t es el tiempo de vuelo y como:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha \tag{7}$$

si se sustituye (7) en (6), tenemos:

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t \tag{8}$$

Tareas

39. Una pelota ha sido lanzada con un ángulo de 30° con respecto al horizonte con una velocidad de 10 m/s. Determina la altura a que esta se eleva, tiempo de duración y distancia alcanzada.
40. Una bala es disparada en sentido horizontal y vuela a una velocidad de 800 m/s. ¿Cuánto descenderá la bala en dirección vertical si se conoce que la distancia hasta el objetivo es de 600 m?

TRABAJO DE LABORATORIO 3. Estudio del movimiento de los cuerpos lanzados horizontalmente

Mediante este trabajo de laboratorio comprobarás las características fundamentales del movimiento de cuerpos lanzados horizontalmente: trayectoria parabólica respecto a un observador fijo a la superficie de la Tierra; carácter uniforme del movimiento en dirección horizontal; dependencia del alcance del proyectil de la velocidad.

Instrumentos y *materiales*: Canal guía del conjunto para el estudio del choque bidimensional, esfera de acero, mordaza, base con su varilla, doblenuez, pinzas, hojas de papel blanco y carbón, cinta adhesiva, papel milimetrado, semicírculo graduado, regla graduada, cuña de madera.

Indicaciones para el trabajo

1. Toma el soporte y colócalo en uno de los bordes de la mesa, como se muestra en la figura 2.45. Acopla a la varilla del soporte la base metálica que posee la forma de paleta, empleando para ello una pinza.

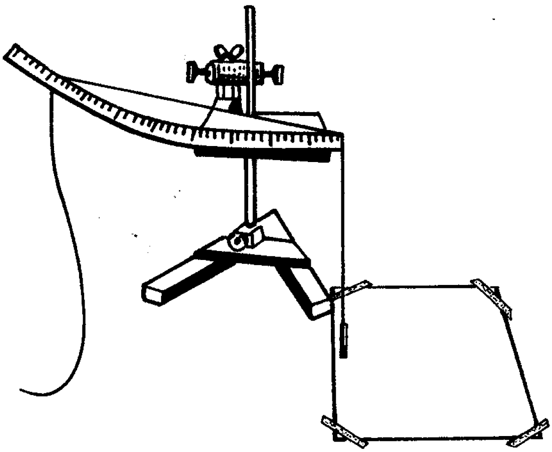


Fig. 2.45

   Mediante la manipulación de la pinza y la utilización de un nivel, eleva la base antes mencionada hasta una posición horizontal, según su dirección longitudinal. Fija esta posición apretando el tornillo de la doblenuez que sujeta a la pinza.
   Busca después la horizontalidad de la base según su dirección transversal. Para lograr esto último, introduce la cuña de madera bajo la base del soporte hasta que el nivel indique tal condición. Fija esta posición mediante el empleo de la mordaza.
2. Coloca el hilo de la plomada, de forma que la pesa de ese instrumento cuelque de la zona ancha de la paleta, a la vez reposa a lo largo del cuerpo de esta. Coloca la regla de forma que comprima al hilo contra la paleta. Encorva el brazo de dicho aparato un ángulo aproximadamente de 20°.
3. Desplaza la canal hasta un nivel de 4,9 cm sobre la superficie de la mesa. Manipula el hilo de la plomada de forma que su longitud sea tal, que su pesa roce la superficie de la mesa. Es necesario que el hilo quede colgado del punto medio de la ranura de la regla, es decir, del punto de salida de la canal.

4. Toma una hoja de papel, dóblala a la mitad, según su mayor longitud. Introduce en el interior del doblez de papel, la tira de papel carbón. Fija el conjunto sobre la superficie de la mesa. Emplea para ello la cinta adhesiva, como se muestra en la figura 2.45.
5. Localiza sobre el papel, el punto de proyección de la zona de salida de la canal, el cual es indicado por el extremo agudo de la pesa de la plomada. Utilizando como referencia la zona donde se estrecha la paleta que constituye la base de la canal, deja rodar la esfera por la rampa desde una distancia de 5 cm de dicho punto. Repite este experimento dos veces más.
6. Procede de igual forma a la descrita anteriormente, pero colocando sucesivamente la canal a niveles de 19,6 cm y 44,1 cm sobre la superficie de la mesa. Procura en cada caso, mantener la horizontalidad de la base de la rampa y la posición del hilo de la plomada sobre el punto de proyección de la zona de salida de la canal.
7. Toma el papel sobre la cual se han registrado los puntos de caída de la esferita. Traza en cada caso un triángulo tomando como vértices los puntos de impacto. Determina sus baricentros aproximados y mide la distancia que separa al punto de proyección de la zona de salida de la canal, de los baricentros antes determinados.
8. Lleva estos resultados a una tabla semejante a la representada en la tabla 2.2. En las columna 1 aparecen anotados los tiempos que demora en caer la esferita desde el borde inferior de la canal hasta la superficie de la mesa, para las alturas indicadas, que se han registrado previamente en la columna 2. En la columna 3 se anotarán los alcances x que corresponden a cada una de las posiciones y, a los cuales se situó la base de la canal respecto a la superficie de la mesa. Eleva cada uno de los valores x al cuadrado y anota los resultados en la columna 4 de dicha tabla.

Tabla 2.2

1	2	3	4
Tiempo de caída (s)	y (cm)	x (cm)	x^2 (cm^2)
0,1	4,9		
0,2	19,6		
0,3	44,1		

9. Traza una gráfica de y en función de x. ¿Qué te sugiere la forma de la gráfica trazada? ¿Está de acuerdo la forma de la trayectoria que describe la esfera-proyectil durante su vuelo con los resultados obtenidos?
10. Plantea la ecuación general que describe la trayectoria de la esferita en el plano x,y.
11. Traza la segunda gráfica, pero en este caso de x en función de t. ¿Qué puedes decir sobre las características de la componente horizontal del movimiento de la esferita?

2.17 *Movimiento circular uniforme. Ángulo de giro. El radián*

Hasta el presente hemos observado que durante un movimiento curvilíneo pueden variar tanto el módulo de su velocidad como su dirección. Sin embargo, por el momento sólo nos limitaremos a estudiar el movimiento curvilíneo de un cuerpo en que sólo varía la dirección de la velocidad, mientras que su módulo permanece constante.

Cualquier movimiento curvilíneo puede ser representado, con aproximación, como una suma de movimientos por arcos de circunferencias. En la figura 2.46 se muestra el recorrido que hace una cinta de película en un proyector de cine.

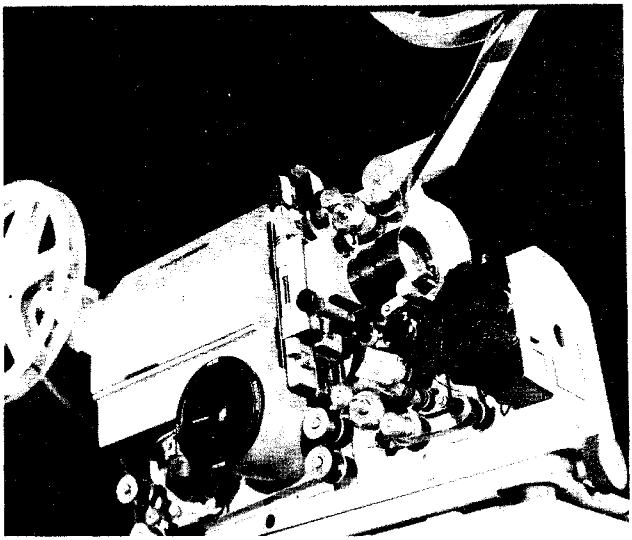
En nuestro estudio centraremos la atención al movimiento uniforme por una circunferencia en el que solo consideraremos la variación de la dirección de la velocidad. Este tipo de movimiento recibe el nombre de *movimiento circular uniforme.*

El movimiento de un cuerpo que al trasladarse describe una circunferencia se puede describir a partir del ángulo de giro que experimenta el vector de posición (fig. 2.47).

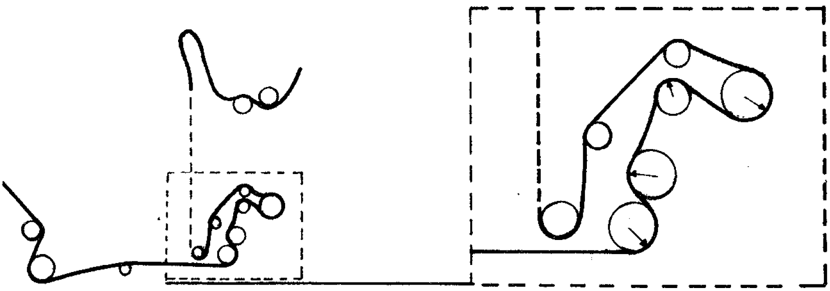
En la figura, en el instante $t = 0$ el cuerpo se encuentra en la posición A y un intervalo de tiempo Δt después se encuentra en el punto B. Durante ese intervalo, el vector de posición $\vec{r}$ gira un ángulo φ.

Al ser uniforme el movimiento por la circunferencia, el vector de posición describirá ángulos iguales en cualesquiera iguales intervalos.

El ángulo φ que describe el vector de posición $\vec{r}$ con respecto a uno de los ejes del sistema de referencia se denomina ángulo de giro.



a)



b)

Fig. 2.46

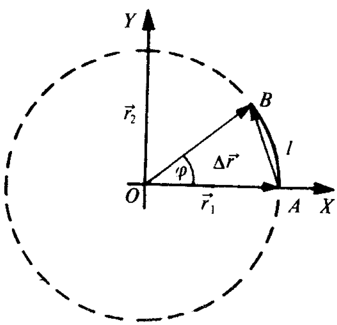


Fig. 2.47

El ángulo de giro se puede medir en grados, aunque es más conveniente emplear otra unidad de medición: *el radián.*

Se denomina radián (rad) al ángulo plano con vértice en el centro de un círculo y cuyos lados delimitan sobre la circunferencia correspondiente, un arco de longitud igual a la del radio.

A partir de la definición de radián determinemos la equivalencia entre este y el grado. Cuando un cuerpo al moverse por una circunferencia recorre una vuelta completa respecto a un eje, ha barrido un ángulo de 360° o 2π radianes, luego:

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

$$1 \text{ rad} = \frac{360}{2\pi}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2 \cdot 3{,}14}$$

$$1 \text{ rad} \approx 57^\circ 18'$$

$$1^\circ = \pi/180 \text{ rad.}$$

Si expresamos el ángulo entre dos radios en radianes, la longitud l del arco limitado por este ángulo en una circunferencia de radio r será igual a:

$$l = r\varphi. \qquad (2.30)$$

2.18 *Velocidad angular y velocidad lineal*

En el epígrafe anterior analizamos el movimiento de un cuerpo cuya trayectoria era una circunferencia. Este movimiento estaba caracterizado por el ángulo de giro φ descrito por el vector de posición.

En un movimiento circular uniforme, el vector de posición del cuerpo describe ángulos de giros iguales en iguales intervalos de tiempo.

De lo antes expuesto y por analogía con el movimiento rectilíneo uniforme, la rapidez con que cambia de posición un cuerpo se puede caracterizar por una magnitud física que se denomina *velocidad angular*. El módulo de la velocidad angular se representa por la letra ω y se determina mediante la ecuación:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \tag{2.31}$$

Por módulo de la velocidad angular de un punto en movimiento circular uniforme sobre una circunferencia, se entiende la razón de la variación que experimenta el ángulo de giro descrito por el vector de posición, con origen en el centro de la circunferencia, y el intervalo de tiempo en el cual transcurre dicha variación.

Si el ángulo φ se expresa en radianes (rad) y el tiempo t en segundos, el módulo de la velocidad angular ω se expresa en radianes por segundo (rad/s).

En el movimiento circular uniforme, además de la velocidad angular, se toma en consideración la rapidez con que el cuerpo se desplaza desde un punto a otro de su trayectoria. A esta velocidad se la denomina *velocidad lineal*, cuya representación, al igual que en el movimiento rectilíneo uniforme, se designa por la letra v.

El módulo de la velocidad lineal expresa la longitud de arco l que el cuerpo describe en la unidad de tiempo:

$$v = \frac{l}{t}.$$

Entre el módulo de la velocidad angular ω y de la velocidad lineal existe un determinada relación.

Si en la expresión de la velocidad lineal ponemos en lugar de la longitud del arco l la ecuación 2.30, tenemos:

$$v = \frac{r\varphi}{t};$$

pero $$\omega = \frac{\varphi}{t},$$

luego: $$v = \omega r. \tag{2.32}$$

El módulo de la velocidad angular de un cuerpo puede expresarse en función del número de vueltas o revoluciones que el cuerpo realice en la unidad de tiempo. Para ello se utilizan dos magnitudes físicas estudiadas durante la Secundaria Básica: *período* y *frecuencia de un movimiento*.

El número de vueltas ν realizadas en la unidad de tiempo se denomina *frecuencia de rotación.* La unidad de frecuencia en el Sistema Internacional de Unidades se denomina hertz y se representa Hz.

La magnitud física cuya medida es igual al inverso de la frecuencia se denomina *período.* El período representa el tiempo que demora un cuerpo en realizar una vuelta completa y se representa por la letra T:

$$T = \frac{1}{\nu}. \qquad (2.33)$$

Cada vez que el cuerpo dé una vuelta completa a la circunferencia, su vector de posición gira un ángulo de 2π rad. Esto significa que si el cuerpo da γ vueltas en la unidad de tiempo, entonces el vector de posición gira un ángulo de $2\pi\nu$ rad, o sea:

$$\omega = 2\pi\nu \qquad (2.34)$$

y como $\nu = \frac{1}{T}$, la expresión (2.34) puede escribirse:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \qquad (2.35)$$

Tareas

41. ¿Cuál es el significado físico de la magnitud velocidad angular?

42. ¿Cómo están relacionados los módulos de las magnitudes físicas velocidad angular y velocidad lineal?

2.19 *Aceleración en el movimiento circular uniforme*

En el epígrafe anterior analizamos el desplazamiento de un cuerpo que se mueve por una circunferencia con una velocidad lineal, cuyo módulo permanecía constante y que variaba de dirección en cada punto de la trayectoria.

Además, conocemos que para caracterizar la variación de la velocidad, se introdujo la magnitud aceleración. Durante el movimiento de un punto por una circunferencia varía constantemente la dirección del vector velocidad. Esta variación del vector velocidad presupone la existencia de una aceleración. Determinemos esta aceleración.

Consideremos que un cuerpo se mueve por una circunferencia de radio R y que en un instante determinado se encuentra en el punto A (fig. 2.48) cuyo vector de posición es $\vec{r}_A$. En este punto la velocidad lineal del cuerpo $\vec{v}_A$ es, como sabemos, tangente a la trayectoria. Al cabo de un pequeño intervalo de tiempo Δt el cuerpo se encontrará en el punto B, y su velocidad será $\vec{v}_B$ igual en valor modular a $\vec{v}_A$ y cuya dirección es tangente al punto B.

¿Cómo proceder para calcular la variación de la velocidad durante el tiempo Δt?

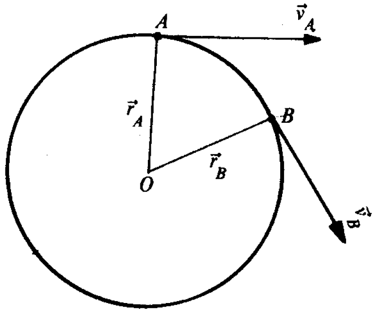


Fig. 2.48

Trasladando el vector $\vec{v}_A$, el vector diferencia $\vec{\Delta v}$ será: $\vec{\Delta v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ (fig. 2.49a). Restar el vector $\vec{v}_A$ del vector $\vec{v}_B$ se puede hacer gráficamente tal como hicimos en el capítulo 1. Para ello basta con que invirtamos el sentido del vector $\vec{v}_A$ (fig. 2.49b).

Aplicando el método del paralelogramo, determinamos el vector $\vec{\Delta v}$. El vector resultante $\vec{\Delta v}$ como se aprecia en la figura 2.49b estará dirigido hacia dentro de la circunferencia. Como la dirección y el sentido del vector aceleración $\vec{a}$ coinciden con las del vector $\vec{\Delta v}$, entonces se puede concluir que en el movimiento circular uniforme, la dirección del vector aceleración coincide con la del vector de posición, y el sentido es hacia el centro de la circunferencia; por lo que esta aceleración recibe el nombre de *aceleración centrípeta*. Ahora, ¿cómo calcular el valor absoluto de esta aceleración? Según conocemos, la aceleración se calcula por la ecuación (2.13):

$$\vec{a} = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t}.$$

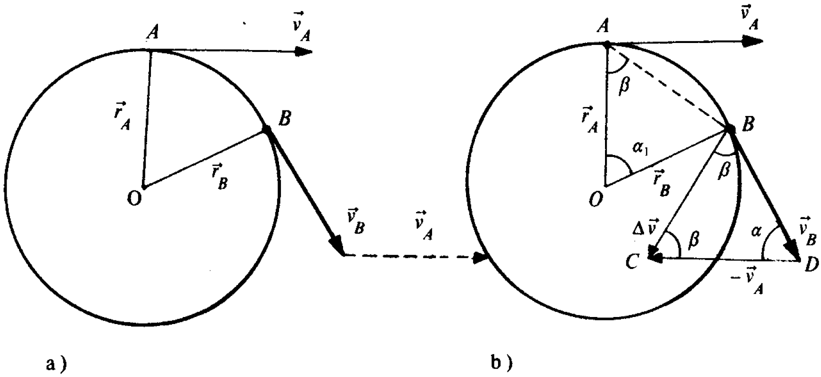


Fig. 2.49

Analicemos los triángulos *AOB* y *BCD* (fig. 2.49b). Estos triángulos son semejantes, ya que son triángulos isósceles: $OA = OB = R$ y $BD = CD = v$, y tienen iguales ángulos: $AOB = BCD$ (ángulos con lados perpendiculares).
De Matemática conoces que por la propiedad de dichos triángulos podemos establecer la siguiente relación:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\overline{AB}}{R},$$

de donde:

$$\Delta v = \frac{\overline{AB} \cdot v}{R}.$$

Dividamos ambas partes por Δt:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v \cdot \overline{AB}}{R \cdot \Delta t}.$$

Si el intervalo de tiempo tiende a cero, entonces el punto *B* tiende a confundirse con el punto *A*, por lo cual la longitud de la cuerda *AB* prácticamente no se distingue de la longitud del arco *AB*, la cual es igual a $v \cdot \Delta t$.

Entonces, sustituyendo la cuerda AB por el valor del arco AB tenemos:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v \cdot v \cdot \Delta t}{R \cdot \Delta t} = \frac{v^2}{R}.$$

Pero, $\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = a$;

luego: $$a = \frac{v^2}{R}. \tag{2.36}$$

Demostremos cómo será la dirección del vector aceleración durante el movimiento de un punto por una circunferencia.
Del triángulo BCD obtenemos:

$$<\beta + <\beta + <\alpha = 180°; \qquad 2\beta = 180° - \alpha,$$

por tanto: $\beta = 90° - \alpha/2.$

Cuando Δt tiende a cero, el ángulo α tiende a cero, y el ángulo $\beta = 90°$. De lo anterior se concluye que el vector $\Delta \vec{v}$ es perpendicular al vector velocidad $\vec{v}$. El vector aceleración $\vec{a}$ tendrá la misma dirección que el vector $\Delta \vec{v}$.

Conociendo que el módulo de la velocidad lineal se puede expresar en función del de la velocidad angular ω, la ecuación (2.36) queda:

$$a = \omega^2 R. \tag{2.37}$$

Las expresiones (2.36) y (2.37) permiten calcular el valor absoluto de la aceleración centrípeta.

El valor absoluto de la aceleración centrípeta de un cuerpo que se mueve con movimiento circular uniforme, es igual a la razón entre el cuadrado de la velocidad lineal del cuerpo y el radio de la circunferencia.

En conclusión, podemos decir que en un movimiento circular uniforme el cuerpo se mueve con una aceleración cuya dirección coincide con la dirección radial de la circunferencia y cuyo sentido es hacia el centro de la circunferencia. Además, el vector aceleración centrípeta $\vec{a}$ es en todo momento perpendicular al vector velocidad instantánea $\vec{v}$ (fig. 2.50).

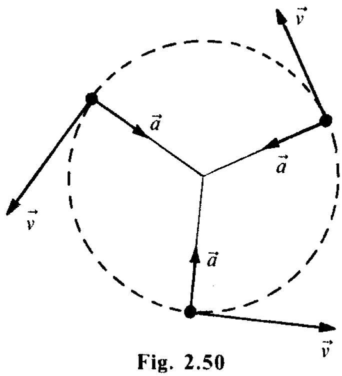


Fig. 2.50

Problema resuelto

Un avión, al salir de una picada, se mueve describiendo una trayectoria, la cual en su punto más bajo, adopta la forma de un arco de circunferencia, cuyo radio es de 500 m. Calcula el valor de la aceleración del avión en el punto más bajo si su velocidad es igual a 800 km/h.

Solución

El módulo de la aceleración del avión se calcula por la expresión:

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

Sustituyendo los valores correspondientes y reduciendo la velocidad a metro por segundo, tenemos:

$$a = \frac{(222 \text{ m/s})^2}{500 \text{ m}}$$

$$a = 98 \text{ m/s}^2.$$

Tareas

43. ¿Cómo está dirigida la aceleración de un cuerpo que se mueve por una circunferencia con velocidad de módulo constante?

44. Una piedra de esmeril de 10 cm de radio, durante su rotación, realiza una vuelta cada 0,2 s. Halla la velocidad tangencial de los puntos más alejados del eje de rotación.

45. Un automóvil se mueve por una carretera curva de radio 100 m con una velocidad de 54 km/h. ¿Cuál es el módulo de la aceleración centrípeta que experimenta el automóvil?

Tareas generales del capítulo

1. Un turista al recorrer a pie una ciudad, realiza los siguientes desplazamientos: 3 m hacia el este, 2 m hacia el norte y 3 m hacia el oeste. Determina el vector desplazamiento total:
   a) en el orden dado,
   b) en orden inverso al dado.
2. En la arena de un circo, un caballo realiza 3/4 de vuelta sobre una pista de radio igual a 6 m.
   a) Determina la longitud de la trayectoria recorrida y el desplazamiento.
   b) ¿Serán iguales el desplazamiento y la longitud de la trayectoria cuando haya recorrido 1/4 de circunferencia?
3. Un ciclista que viaja a una velocidad constante de 30 km/h, desde una ciudad *A* hasta una *B*, emplea 2 h en realizar su recorrido.
   a) ¿Cuál es la distancia entre las ciudades?
   b) ¿Qué velocidad debe desarrollar el ciclista para regresar al punto de partida en la mitad del tiempo de ida?
4. Un automovilista viajando a 30 km/h, recorrió la mitad del trayecto desde el lugar de origen en 2 h. ¿A qué velocidad él debe continuar el movimiento, si en igual tiempo debe terminar su recorrido y regresar al lugar de origen.
5. Dos trenes parten de una estación y avanzan por una línea recta en el mismo sentido, animados de movimiento rectilíneo uniforme. La velocidad del primero es de 30 km/h y la del segundo de 40 km/h. Si el segundo sale 2 h después que el primero:
   a) determina sus posiciones 5 h después de salir el primer tren;
   b) ¿qué tiempo emplea el segundo tren en alcanzar al primero?
   c) ¿a qué distancia de la estación lo alcanza?
6. Un automóvil emplea 8 h en recorrer una distancia de 350 km. En este recorrido el chofer ha tomado descansos. Si en cada tramo mantiene una velocidad constante de 50 km/h, ¿cuántos descansos de 10 min pudo tomar durante el viaje? Haz una gráfica de x contra t y otra de v contra t donde se represente la situación dada.

7. El motor de un avión le comunica a este una velocidad con respecto al aire igual a 900 km/h. ¿Con qué velocidad se mueve el avión con respecto a Tierra con el aire a su favor si la velocidad del aire es de 50 km/h?, ¿y con el aire en contra?

8. Por dos carreteras mutuamente perpendiculares se mueven uniformemente un camión y un automóvil con velocidades de 54 km/h y 72 km/h, respectivamente. ¿A qué distancia se encontrarán el uno del otro, trancurridos 10 min después de encontrarse en una intersección?

9. Un ómnibus avanza por una carretera y un muchacho que observa a través de la ventanilla ve pasar 5 árboles cada 10 s de norte a sur.
   a) ¿Hacia dónde viaja el ómnibus?
   b) ¿Qué velocidad posee el ómnibus si los árboles están uniformemente espaciados a distancias de 5 m.

10. Un tren de 600 m de largo avanza con una velocidad de 18 km/h. El maquinista, que se encuentra en la locomotora, envía a un muchacho a recorrer el tren y este va hasta el último vagón y regresa en 1 min 40 s. Determina la velocidad, la longitud de la trayectoria y el desplazamiento del muchacho:
    a) respecto al tren,
    b) respecto a Tierra.

11. Un tren viaja a 60 km/h durante 0,52 h, a 30 km/h durante las 0,24 h siguientes y luego a 70 km/h durante las siguientes 0,71 h. ¿Cuál es la velocidad media en ese trayecto?

12. Un automóvil desarrolló una velocidad de 80 km/h durante la primera mitad de tiempo de su movimiento y una velocidad de 40 km/h durante la segunda mitad. ¿Cuál fue la velocidad media del automóvil?

13. Un vagón avanza con una aceleración de 0,5 m/s^2. La velocidad inicial del vagón es de 54 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará en detenerse el vagón y a qué distancia del punto inicial?

14. Un tren subterráneo sale de una estación a partir del reposo y se mueve con una aceleración constante igual a 1,5 m/s^2 durante 10 s.
    a) ¿Cuál es su velocidad al cabo de ese tiempo?
    b) Calcula el módulo del desplazamiento que experimentó el tren en los 10 s.

15. Un tren que avanza con una velocidad constante e igual a 20 m/s llega a una pendiente y al subir por esta experimenta una aceleración constante cuyo valor modular es de 2 m/s^2.
a) ¿Cuál es su velocidad a los 6 s de ir por la pendiente?
b) ¿Qué distancia ha recorrido el tren en ese tiempo?
c) ¿Qué tiempo emplea en detenerse?

16. Un tren viaja a una velocidad de 30 m/s en el instante en que se le aplican los frenos y continúa moviéndose con movimiento uniformemente retartado con aceleración constante durante 5 s hasta que adquiere una velocidad de 5 m/s.
a) Calcula su aceleración.
b) Calcula el módulo de su desplazamiento al cabo de 5 s.

17. Un ferrocarril urbano parte de una estación y se acelera durante 10 s con una aceleración constante de 1,2 m/s^2. Después marcha a velocidad constante durante 30 s y, a continuación, comienza a frenar a razón de 2,4 m/s^2 hasta detenerse. ¿Cuál es la posición del ferrocarril cuando se detiene?

18. Un avión al efectuar el despegue, se desplaza sobre la pista de aterrizaje con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado durante 15 s y en el momento de separarse de la pista, posee una velocidad de 10 m/s. ¿Con qué aceleración se movió el avión y cuál es la longitud recorrida sobre la pista de aterrizaje?

19. Un automóvil se detuvo ante un semáforo. Después de proyectada la luz verde comienza a moverse con una aceleración de 1,5 m/s^2, hasta que alcanza una velocidad de 16 m/s; después continúa moviéndose con velocidad constante. ¿A qué distancia del semáforo se encontrará el automóvil después de 15 s de haber sido proyectada la luz verde.

20. Un proyectil cuya velocidad es de 1 000 m/s, atraviesa una pared blindada en 10^{-3} s; al salir de la pared su velocidad es de 200 m/s. Considerando que el movimiento del proyectil dentro de la pared blindada es uniformemente acelerado, determina el grueso de la pared.

21. Un cohete se mueve con una aceleración de 45 m/s^2 y en un instante determinado alcanza una velocidad de 900 m/s. ¿Qué distancia recorrerá en los 2,5 s siguientes?

22. ¿A qué distancia de la Tierra se encontrará una nave cósmica después de 30 min del lanzamiento, suponiendo que todo el

tiempo se movió con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado con aceleración de 9,8 m/s^2?

23. Un ómnibus arranca con una aceleración constante de 1,5 m/s^2. ¿Qué distancia habrá recorrido cuando su velocidad sea igual a 54 km/h?

24. Las observaciones mostraron que un caballo de carrera que se mueve con movimiento uniformemente acelerado alcanza su mayor velocidad, que es de 15 m/s, a los 30 m de su salida. ¿Con qué aceleración corre el caballo ese tramo?

25. Un avión para despegar de la pista debe poseer una velocidad de 180 km/h. ¿A qué distancia del punto de partida se encontrará el avión cuando alcance esta velocidad si recorre la pista con una aceleración constante de 2,5 m/s^2?

26. Un tren de pasajeros se mueve frenando con una aceleración constante de 0,15 m/s^2. ¿A qué distancia del lugar de aplicación de los frenos la velocidad es de 3,87 m/s si en el instante de frenar la velocidad era de 54 km/h?

27. Las componentes rectangulares de la velocidad inicial de un proyectil tienen como valor v_{0x} = 8 m/s y v_{0y} = 6 m/s. Calcula:
   a) el valor de la velocidad en el instante de pasar por el punto de altura máxima;
   b) el valor de la velocidad con que llega al plano horizontal desde donde fue lanzado;
   c) la distancia horizontal recorrida durante el tiempo de vuelo.

28. El alcance de un proyectil es de 100 m y el tiempo de vuelo es de 2 s. ¿Cuáles serán su posición y el valor de la velocidad al pasar por el punto de máxima altura?

29. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 25 m/s. Determina:
   a) cuál es la altura máxima que alcanza;
   b) a qué altura está la pelota a los 0,25 s después de haberla lanzado;
   c) qué velocidad tiene en ese instante;
   d) qué velocidad tiene la pelota cuando está a una altura de 18 m.

30. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 60 m/s desde una altura de 250 m. ¿Al cabo de qué

tiempo estará 225 m por debajo del punto de lanzamiento y qué velocidad poseerá en ese momento?

31. Un cuerpo es lanzado horizontalmente desde una altitud de 20 m sobre la Tierra con una velocidad de 11 m/s. ¿Qué distancia recorrerá a lo largo de la dirección horizontal?

32. Un aeroplano de abastecimiento que vuela a una velocidad de 270 km/h desciende a 100 m de altitud, donde en vuelo recto y horizontal deja caer un bulto de alimentos para que caiga sobre una señal en el suelo. ¿A qué distancia de la señal medida en el suelo se deberá soltar el bulto? Desprecia la resistencia del aire.

33. Se lanza un proyectil con una velocidad 50 m/s formando un ángulo de 30° con la horizontal. ¿En qué posición estará y qué velocidad tendrá al cabo de 5 s de haberlo lanzado?

34. Calcula el alcance teórico máximo de una pieza de artillería que tiene una velocidad en la boca del cañón de 500 m/s. ¿Cuál es el tiempo de vuelo y la altura máxima para dicho alcance?

35. Una pelota de béisbol es arrojada con una velocidad de 35 m/s, y un ángulo de inclinación de 42°. Encuentra el valor de la velocidad y la posición de la pelota al cabo de 2 s de haberla lanzado?

36. Un proyectil lanzado desde un cañón de artillería destruye un objetivo a una distancia de 25 km. ¿Cuál es la velocidad de salida si al ángulo de inclinación de la pieza es de 45°?

37. Una pelota de béisbol lanzada por un jugador a otro está en el aire durante 7 s. ¿A qué altura se elevará? Si el ángulo de lanzamiento fue de 45°, ¿a qué distancia estarán los jugadores? Desprecia la resistencia del aire.

38. Cuando un avión que volaba a una altura de 400 m y con una velocidad de 500 m/s pasó por encima de una batería antiaérea, un cañón disparó un proyectil con velocidad inicial de 100 m/s y una inclinación de 60°. Si el impacto del proyectil sobre el avión ocurrió 0,5 s después de haber sido lanzado:
   a) calcula la posición del avión en el momento de ser impactado;
   b) calcula la altura a la que debe volar el avión para no ser impactado.
   c) ¿se hubiera producido el impacto con otro ángulo de inclinación? Explica.

39. Calcula las velocidades angular y lineal del movimiento de la Tierra alrededor del Sol. El radio de la órbita de la Tierra se puede considerar igual a 150 000 000 km.

40. ¿Cuál es la velocidad lineal del extremo del minutero del reloj de la torre de Spaska que se encuentra en el Kremlin de Moscú si la longitud de la manecilla es de 3,5 m?

41. El período de la primera nave satelite "Vostok" alrededor de la Tierra era de 90 min aproximadamente. La altura media de la nave sobre la Tierra fue de 320 km. Si se conoce que el radio de la Tierra es igual a 6 400 km, calcula la velocidad tangencial de la nave.

42. La Luna se mueve alrededor de la Tierra a una distancia de 385 000 km, realizando una vuelta cada 27,3 días. Calcula la aceleración centrípeta que experimenta la Luna.

43. La Tierra emplea 86 400 s en dar una vuelta sobre su eje; el radio terrestre es de 6 370 km. Calcula la velocidad lineal de cualquier punto situado en el Ecuador.

44. Halla la velocidad angular de:
   a) la rotación diaria de la Tierra,
   b) un satélite artificial de la Tierra que gira siguiendo una órbita circular con un período de revolución de 88 min. Halla la velocidad lineal del movimiento de ese satélite si se sabe que su órbita se encuentra a una distancia de 200 km de la superficie de la Tierra.

45. En primera aproximación se puede considerar que el electrón del átomo de hidrógeno se mueve siguiendo una órbita circular con una velocidad modularmente constante. Halla la velocidad angular del electrón alrededor de su núcleo y la aceleración centrípeta si se conoce que el radio de la órbita se puede considerar igual a $0,5 \cdot 10^{-10}$ y que la velocidad del electrón en esa órbita es igual $2,2 \cdot 10^{6}$ m/s.

46. Si la velocidad angular de una masa que gira se duplica, ¿qué le ocurre a su aceleración centrípeta?

47. Calcula el valor de la aceleración centrípeta de una pequeña partícula que gira en la punta de un aspa de 0,30 cm de diámetro, y que rota a 1 200 rev/min.

48. ¿Con qué aceleración centrípeta se mueven los puntos más alejados del eje de rotación de las aspas de un helicóptero si el largo de ellas es de 5 m y su período de rotación es de 0,25 s.

49. Un carro de la "montaña rusa" se mueve con una velocidad modularmente constante de 5 m/s.

a) Determina la aceleración centrípeta del carro cuando corre por el punto más alto de la montaña si esta parte puede considerarse como un arco de circunferencia de radio 5 m.

b) Determina la aceleración cuando corre por el punto más bajo de la montaña si esta posee un radio de 10 m.

Capítulo 3
LEYES DEL MOVIMIENTO MECÁNICO

En el capítulo anterior estudiamos los principales conceptos de la cinemática que nos permitieron describir el movimiento mecánico de un cuerpo, con respecto a un sistema de referencia previamente seleccionado. También hemos aprendido que para calcular las velocidades de los cuerpos, sus desplazamientos y, por último, sus coordenadas, en cualquier intervalo de tiempo, hay que conocer la aceleración, ya que precisamente esta es la que diferencia un movimiento de otro. Por ejemplo, el movimiento rectilíneo uniforme se distingue de los demás, en que posee aceleración nula; el movimiento rectilíneo uniformemente variado, en que su aceleración es constante en módulo y dirección; el movimiento circular, en que en cualquier punto de este la aceleración tiene dirección hacia su centro.

Conocemos que la manifestación de un cambio en el estado de movimiento de un cuerpo o sea el surgimiento de una determinada aceleración es el resultado de la acción de un cuerpo sobre otro. Ahora podemos plantearnos la pregunta: ¿cómo caracterizar la acción que ejercen los cuerpos que interactúan unos con otros?

La respuesta a nuestra pregunta la brinda la *dinámica* que es la parte de la mecánica que estudia la interacción de los cuerpos y las causas de la aceleración.

Las leyes que constituyen las bases de la dinámica se conocen bajo el nombre de *leyes del movimiento mecánico* y fueron formuladas en 1687 por el físico inglés Isaac Newton, por ello también se les conoce como leyes de Newton.

Estas leyes permitieron comprender el comportamiento de los fenómenos mecánicos y dar explicación a fenómenos tan diferentes como el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, el movimiento de los péndulos, de los cuerpos suspendidos de muelles, y hoy en día permiten determinar con exactitud el movimiento de los vehículos espaciales e incluso predecir su futuro comportamiento.

En síntesis, nos permiten responder a la pregunta: ¿por qué los cuerpos se mueven de tal o cual forma y no de otra?

Las leyes del movimiento se han formulado en tres leyes que se les conoce bajo la denominación de: *ley de la inercia, ley de la fuerza* y *ley de la acción y reacción.*

3.1 *Primera ley: ley de la inercia*

En esta ley, I. Newton generalizó los conocimientos desarrollados por Galileo Galilei sobre el fenómeno de la inercia; en ella se establecen las condiciones bajo las cuales un cuerpo se mantiene en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme.

De grados anteriores conoces que un cuerpo no puede modificar su velocidad por sí mismo, o sea, sin la acción de otros cuerpos. Así, por ejemplo, una pelota o un carro pequeño, situado sobre otro carro mayor, mantiene su estado de reposo con respecto al suelo (su aceleración es nula debido a que su velocidad se mantiene constante) si no se produce una acción sobre él (fig. 3.1).

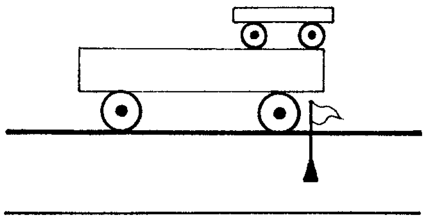


Fig. 3.1

Si se le imprime un impulso al carro mayor, este se desplazará, mientras el carro más pequeño conservará su posición con respecto al suelo, o sea, su estado de reposo (fig. 3.2).

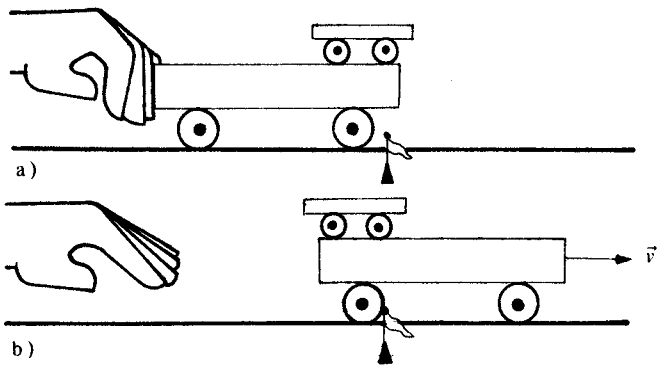


Fig. 3.2

Por otra parte, si hacemos primero que ambos carros se muevan con movimiento rectilíneo uniforme y después detenemos el carro mayor, el más pequeño mantiene su estado de movimiento con respecto a la mesa, sin variar el valor de su velocidad, o sea, sin experimentar aceleración hasta que sea afectado por la acción de otros cuerpos (un objeto que le detenga o el rozamiento de sus ruedas con los ejes que la sostiene) (fig. 3.3).

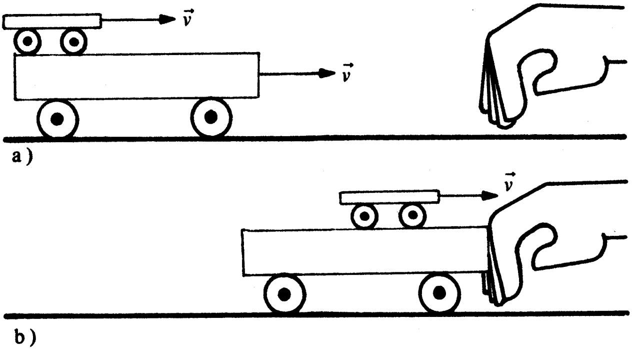


Fig. 3.3

Estos ejemplos ponen en evidencia un fenómeno que recibe el nombre de *inercia*.

La inercia consiste en el hecho de que los cuerpos conservan su estado de movimiento.

La manifestación de este fenómeno es más evidente en la medida en que se reduzcan al máximo posible las acciones que otros cuerpos puedan ejercer sobre él.

¿Por qué el carro más pequeño, después de recibir cierto impulso, no conserva, en la práctica, su velocidad constante?

¿Cómo lograr que un cuerpo se mueva sin aceleración, o sea, que conserve su velocidad constante?

En principio, una forma de lograr este propósito sería consiguiendo un estado especial del cuerpo, en el cual sobre él no se produjesen acciones algunas de otros cuerpos. Pero este estado es prácticamente imposible de lograr, por ejemplo, sobre el carro pequeño ejercen sus acciones otros cuerpos, tanto los cercanos como los lejanos, los grandes o los pequeños.

No obstante, la influencia de uno es más notable que la de otros. Cerca del carro pequeño se hallan muchos cuerpos: el carro mayor sobre el cual se apoya, las paredes del laboratorio, la mesa y por supuesto la Tierra por citar algunos.

Pero no todos actúan por igual sobre el carro pequeño; si se cambian de posición los pupitres o nos movemos de un lado a otro, esto no influye apreciablemente sobre el carro, su estado mecánico no se modifica.

Si le damos un impulso al carro mayor en dirección horizontal, observaremos que el carro pequeño conserva su estado de reposo respecto a la mesa, mientras se encuentre sobre el carro mayor, hasta que finalmente caerá con un movimiento acelerado. Esto es debido, como conoces, a la influencia que la Tierra ejerce sobre todos los cuerpos que se encuentran en su proximidad. No obstante, en nuestro caso, mientras el carro ligero se mantuvo sobre el mayor, él conservó su estado de reposo. Este experimento muestra que de todos los cuerpos presentes en el laboratorio solo dos influyen notablemente sobre él: el carro mayor y la Tierra.

Es evidente que cuando existe la acción conjunta de ambos cuerpos, se dan las condiciones que garantizan el estado de reposo del carro pequeño. Cuando se elimina la acción de uno de estos cuerpos, el carro pequeño altera su estado de reposo.

Esto nos lleva a concluir que las acciones de los cuerpos sobre el carro pequeño (de la Tierra y del carro mayor) se compensan mutuamente.

En general, cuando las acciones de dos o más cuerpos sobre un cuerpo determinado se compensan unas con otras, el resultado de dichas acciones es tal como si no existieran esos cuerpos. En estas condiciones, el cuerpo conservará su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme. ¿Puedes justificar sobre la base de lo antes expuesto, por qué el carro pequeño se mueve con movimiento rectilíneo uniforme con respecto a la mesa, cuando se encuentra sobre el carro mayor que se mueve con la misma velocidad con respecto a ella?

A partir de estos resultados se puede establecer la formulación más general de la primera ley de Newton.

El estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme de un cuerpo se mantiene mientras sobre él no actúan otros cuerpos o las acciones de estos se compensan.

Tareas

1. El sabio italiano Galileo Galilei afirmaba que cualquier velocidad, una vez impartida a un cuerpo, se mantendrá constante en

tanto no existan causas de aceleración o retardamiento, fenómeno que sólo se observará aproximadamente en planos horizontales donde el rozamiento se halla reducido a un mínimo.
Supongamos que desde un plano inclinado de altura *h*, dejamos rodar una esfera. La superficie inmediatamente delante del plano está cubierta por:
a) una capa delgada de arena (fig. 3.4a);
b) una superficie de madera (fig. 3.4b);
c) una superficie de vidrio (fig. 3.4c).

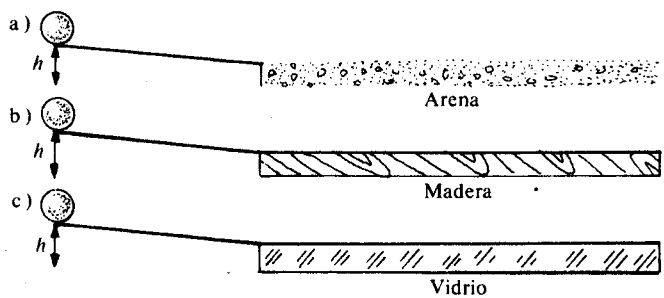


Fig. 3.4

¿En cuál de los casos la esfera realiza un mayor desplazamiento sobre la superficie horizontal? Justifica tu respuesta.

2. En una serie de experiencias, Galileo demostró que si situaba dos de sus planos inclinados con sus pendientes invertidas, tal como se muestra en la figura 3.5, un cuerpo, que parte de la parte alta de uno de los planos, caería por la pendiente y subiría por el otro hasta alcanzar casi su altura original.
Supongamos que tenemos una pelota, inicialmente en reposo, y se deja caer por el plano inclinado de la figura 3.5 desde una altura de 10 cm.

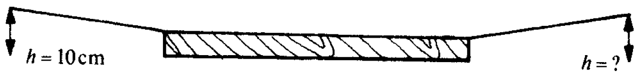


Fig. 3.5

a) Suponiendo que no existe obstáculo al movimiento (rozamiento), ¿a qué altura llegará en el plano inclinado de la derecha?

b) Si el plano inclinado de la derecha posee una pendiente de 1 cm por cada 10 cm de recorrido horizontal, ¿cuál será la distancia horizontal que recorrerá la pelota cuando asciende por este plano?
c) Si la pendiente del plano inclinado de la derecha es sólo de 0,5 cm por cada 10 cm de recorrido horizontal, ¿cuál será la distancia horizontal que recorre la pelota cuando asciende por el plano?
d) Si la pendiente es nula, ¿qué sucederá?

3. Cita tres ejemplos de cuerpos que se encuentran en reposo respecto a Tierra. Menciona en cada caso las acciones de los cuerpos que se compensan.

4. Explica con tus palabras el contenido de la primera ley de Newton.

5. Critica las siguientes afirmaciones:
   a) Si sobre un cuerpo no actúan otros cuerpos, el cuerpo se moverá sin aceleración.
   b) El movimiento de un cuerpo a lo largo de un plano horizontal sin obstáculo, es permanente.
   c) Para que un cuerpo se mantenga animado de movimiento rectilíneo uniforme, sobre él siempre deben actuar otros cuerpos.

6. Explica por qué cuando entramos en una habitación cuyo piso está bien pulido o cuando caminamos sobre una superficie muy lisa, resbalamos, cosa que no ocurre cuando caminamos sobre una superficie áspera. ¿Por qué también podemos sujetar fácilmente un trozo pequeño de metal con nuestros dedos y, sin embargo, es más difícil un trozo de hielo?

7. Para mantener animado de movimiento rectilíneo uniforme un carro del laboratorio se emplea una cinta sinfín accionada por un motor (fig. 3.6). Explica sobre la base de la primera ley de Newton por qué el carro se mueve de la forma señalada.

8. Cuando viajamos en un ómnibus que se mueve a lo largo de una trayectoria rectilínea con velocidad constante, mantenemos nuestra posición sin la necesidad de realizar esfuerzo alguno. Explica por qué esto es así.

9. ¿Qué sucede cuando viajamos de pie, sin sujetarnos, en un ómnibus que marcha con velocidad constante y de pronto el ómnibus toma una curva? ¿Cómo se explica este fenómeno?

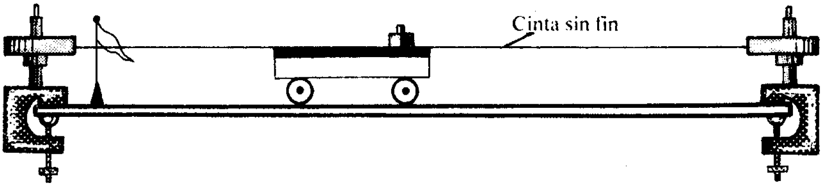


Fig. 3.6

3.2 *Inercialidad de los cuerpos*

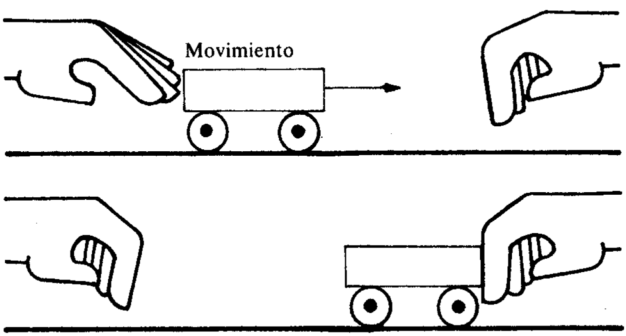
De acuerdo con la primera ley de Newton, un cuerpo conserva su estado de movimiento cuando sobre él no actúan otros cuerpos o las acciones de estos se compensan. Cuando no se cumplen estas condiciones, el estado de movimiento mecánico del cuerpo varía.

Analicemos qué papel desempeñan los propios cuerpos cuando se ejerce una acción sobre él.

Con esta finalidad realicemos el siguiente experimento.

Primero comparemos la oposición al cambio del estado del movimiento de dos carros, uno ligero y otro pesado.

Con ayuda de las palmas de las manos hagamos mover el carro ligero (fig. 3.7a) alternativamente hacia un lado y hacia otro. Posteriormente tomemos el carro más pesado y repitamos la acción (fig. 3.7b).



a)

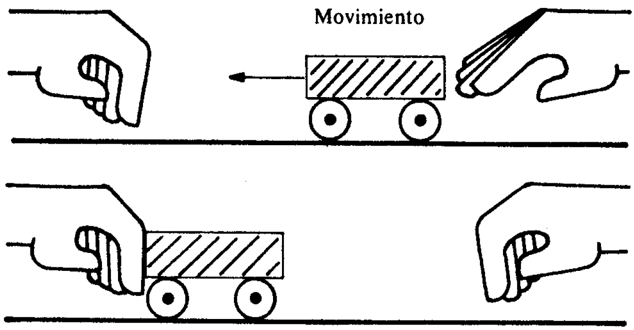


Fig. 3.7

Notarás que el carro más pesado presenta mayor oposición a variar su estado de movimiento. Podríamos entonces preguntarnos: ¿cuál es la causa de la diferencia en el comportamiento de los carros? La respuesta está presente en los propios carros.

Analicemos con mayor detenimiento este comportamiento realizando el experimento siguiente.

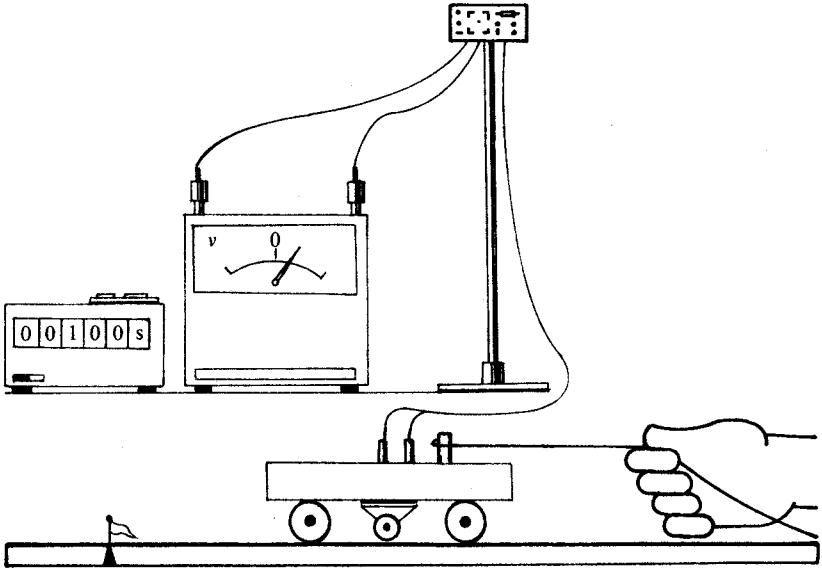
Tomemos un carro y actuemos sobre él mediante una banda de goma deformada una longitud fija, de modo que varíe su estado de movimiento, el cual podemos valorar con un medidor de velocidad (fig. 3.8a).

Si colocamos sobre el carro, otro carro y actuamos sobre el conjunto, mediante la liga deformada en la misma medida, de forma que las acciones sean iguales, comprobaremos que la velocidad varía más lentamente, es decir, el cuerpo requiere de la acción de la liga un tiempo más prolongado para variar su velocidad en un valor (fig. 3.8b).

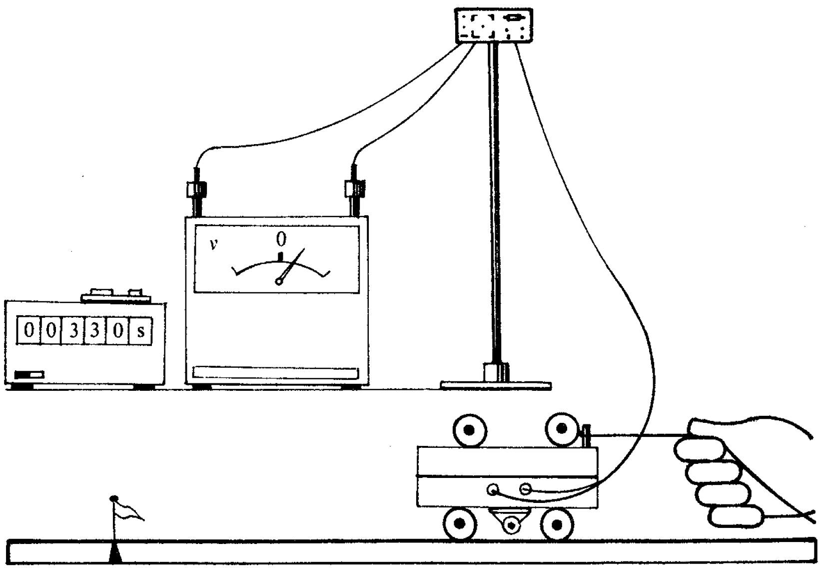
De las observaciones realizadas se deduce que en cada cuerpo está presente una propiedad que es general y extensible para todos, y recibe el nombre de *inercialidad.*

La inercialidad se manifiesta en que para variar la velocidad de un cuerpo en un determinado valor, es necesario que sobre él actúe otro cuerpo durante un intervalo de tiempo dado.

Cuanto mayor sea el tiempo que demora en variar su velocidad en un valor determinado, durante una interacción, más inerte resulta el cuerpo, o sea, su inercialidad es mayor.



a)



b)

Fig. 3.8

Tareas

10. ¿Puede la velocidad de un cuerpo cambiar de forma instantánea?
11. ¿En qué consiste la propiedad de los cuerpos llamada inercialidad?
12. Realiza el experimento siguiente:
    Coloca un cuerpo de 3 kg de masa suspendido de un soporte mediante una cuerda *A*; una segunda cuerda *B* del mismo material se coloca en la parte inferior del cuerpo (fig. 3.9).

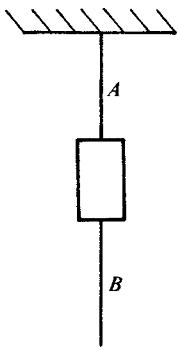


Fig. 3.9

a) Si la cuerda *B* se hala súbitamente con un tirón, la cuerda *B* se rompe.
b) Si la cuerda *B* no se hala súbitamente sino en forma continua y con intensidad progresiva, se rompe la cuerda *A*.
Explica la causa de la diferencia de este comportamiento.

3.3 *Masa de los cuerpos*

Hemos visto que la inercialidad es una propiedad que poseen todos los cuerpos, su importancia radica en que de ella depende la aceleración adquirida por un cuerpo como resultado de su interacción con otros cuerpos. También comprobamos experimentalmente que distintos cuerpos manifiestan su inercialidad en distintos grados.

Surge entonces una pregunta: ¿cómo podemos medir la inercialidad de los cuerpos? Sabemos que toda propiedad física de un cuerpo se caracteriza mediante una magnitud, la cual permite expresar la medida de esa propiedad. Por ejemplo, la propiedad que posee un cuerpo de ocupar determinada porción del espacio, se expresa por medio de la magnitud volumen, mientras que la velocidad es la magnitud que caracteriza la rapidez, dirección y sentido del movimiento mecánico de un cuerpo. Entonces, para caracterizar la inercialidad de los cuerpos, se introduce una magnitud particular denominada *masa*.

¿Cómo determinar la masa de un cuerpo que mida la inercialidad que se manifiesta durante la interacción de él con otro cuerpo?

Con esta finalidad realicemos el siguiente experimento.

Tomemos dos carros, uno mayor y pesado, el cual tiene acoplado un resorte, y el otro menor y ligero. Coloquemos estos carros uno frente al otro con el resorte comprimido (fig. 3.10a). Situemos la barrera fotoeléctrica acoplada al contador de tiempo de modo de poder determinar la velocidad final que adquiere cada carro después de la interacción que se produce al liberar el resorte (fig. 3.10b).

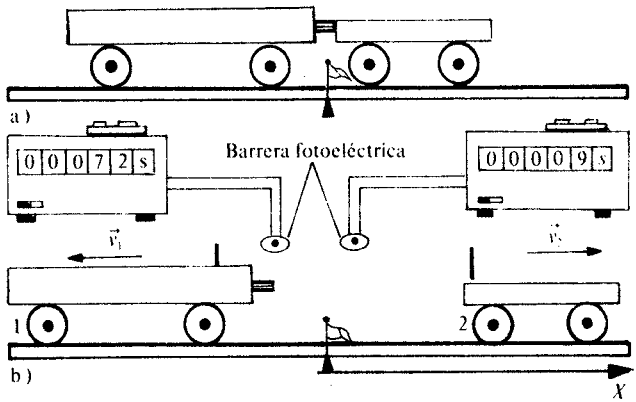


Fig. 3.10

Durante el tiempo en que el resorte se estira, este actúa simultáneamente sobre ambos carros; por esta razón la velocidad de cada uno de ellos varía hasta alcanzar los valores que mediremos gracias a la barrera fotoeléctrica.

En la tabla 3.1 se han compilado los resultados obtenidos en el experimento realizado.

Tabla 3.1

Carro	*Velocidad final (m/s)*
ligero 1,12	3
pesado 0,14	0,3

De estos resultados se puede concluir que el carro que adquiere una menor velocidad es más inerte, mientras que el que alcanza una velocidad mucho mayor es menos inerte. Entonces podemos decir que aquel de los cuerpos en interacción que adquiera menor velocidad final, es decir, el más inerte, tiene mayor masa. Si designamos la masa de dichos cuerpos por m_1 y m_2, no resulta difícil comprobar experimentalmente que se cumple la siguiente relación:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1}. \tag{3.1}$$

Esta ecuación nos indica que la relación entre las velocidades adquiridas por los cuerpos depende exclusivamente de los cuerpos que interactúan.

Por otra parte, las velocidades v_1 y v_2 son consecuencia de las aceleraciones medias que experimentan los carros durante el tiempo que dura la interacción. Luego, si nos valemos de la expresión de la velocidad del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado para cuerpos que parten del reposo, es decir, $v = at$ y teniendo en cuenta que el tiempo de interacción es el mismo para ambos carros, podemos obtener:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{a_1}{a_2}, \tag{3.2}$$

y por consiguiente

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}. \tag{3.3}$$

La relación de los módulos de las aceleraciones de los cuerpos que interactúan es igual a la relación del inverso de sus masas.

A partir de la expresión (3.3) se puede determinar la masa de un cuerpo cualquiera si lo hacemos interactuar con otro cuerpo de masa conocida que se toma como patrón. Para ello tenemos que medir las aceleraciones que adquieren ambos cuerpos y sustituir los valores conocidos en la relación (3.3).

Por ejemplo, si tomamos el cuerpo de masa m_1 como cuerpo patrón y le llamamos unidad de masa, la de cualquier otro cuerpo podría medirse por el método indicado y su valor sería:

$$m_2 = \frac{a_1}{a_2} \cdot (1 \text{ unidad de masa patrón}).$$

Los experimentos muestran que esta forma de medir la masa de un cuerpo es independiente de su modo de interactuar, así como también es independiente de qué cuerpo se toma como patrón de masa.

La masa de un cuerpo es la magnitud física escalar que expresa su inercialidad y se determina por la relación de la aceleración del cuerpo patrón y la aceleración del cuerpo en cuestión durante la interacción.

De grados anteriores conoces que mediante la balanza se puede medir la masa de un cuerpo. Como recordarás, el patrón de medida de masa utilizado internacionalmente es el kilogramo (kg). No obstante, en dinámica determinamos la masa de un cuerpo sobre la base de sus propiedades inerciales, la cual se manifiesta durante la interacción de él con otro cuerpo[1]. En la práctica, semejante método es incómodo, pero en algunos casos, la medición de la masa calculando las aceleraciones durante la interacción es el único procedimiento posible. Por ejemplo, resulta imposible determinar por medio de la balanza la masa de los planetas, estrellas y otros cuerpos celestes. La experiencia demuestra que los valores de la medida de la masa de un cuerpo que se obtiene por el método del cáclulo de las aceleraciones coincide con el valor obtenido con la balanza.

Una propiedad fundamental de la masa es su aditividad.

[1] La masa medida de esta forma recibe el nombre de *masa inercial* y mediante la balanza, *masa gravitatoria*. Mediciones realizadas experimentalmente con una precisión de 10^{-13} no han manifestado diferencia en sus valores. No obstante, la masa inercial y la masa gravitatoria reflejan propiedades diferentes de un cuerpo, pero todo indica que ambas magnitudes son directamente proporcionales.

Esto significa que si tomamos dos cuerpos cuyas masas son m_1 y m_2, y los unimos, la masa total del sistema integrado por ambos cuerpos es:

$$m_t = m_1 + m_2. \quad (3.4)$$

La veracidad de la expresión (3.4) es fácil de comprobar experimentalmente. Basta con tomar tres carros de igual masas, unir dos de ellos rígidamente y hacerlos interactuar con el tercero (fig. 3.11a). La aceleración que adquiere el sistema de los dos carros unidos es la mitad de la del carro sencillo (fig. 3.11b). Esto significa, si tenemos en cuenta la relación (3.4), que la masa del sistema es el doble de la de uno de los carros, es decir:

$$m_{sist} = m_1 + m_2 = 2\ m.$$

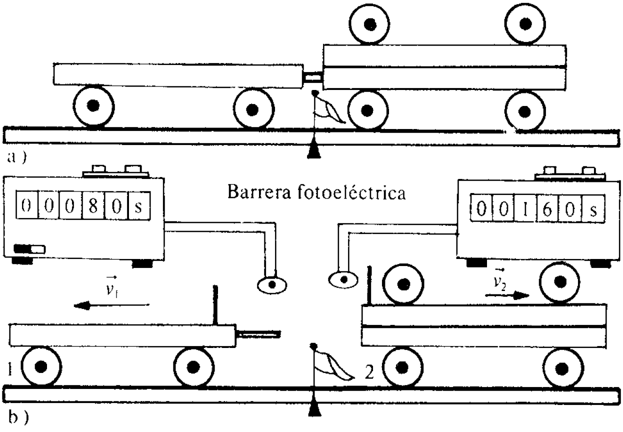


Fig. 3.11

Esta propiedad de la masa se cumple para cualquier sistema de cuerpos, así si tuviéramos n cuerpos, entonces la masa total será:

$$m_t = m_1 + m_2 + ... + m_n.$$

Tareas

13. ¿Qué magnitud caracteriza la inercialidad de un cuerpo?
14. ¿Qué relación existe entre la masa de los cuerpos y los módulos de las aceleraciones que ellos reciban durante la interacción?

15. Un cuerpo posee una masa de 2 kg y otro de una masa de 5 kg. ¿Cuántas veces es más inerte un cuerpo en relación con el otro?

16. A partir de los datos reflejados en la tabla 3.1, comprueba la certeza de la relación:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Solicita a tu profesor el valor de las masas de ambos carros.

17. Explica con tus palabras, en qué casos se utilizan el método de la determinación de la masa:
   a) por medio de la interacción de los cuerpos;
   b) por medio de la balanza.

18. ¿Qué significa que la masa de un cuerpo posee la propiedad de aditividad?

19. En la figura 3.12 se muestra la asociación de varios cuerpos. Determina en cada caso la masa total de los sistemas representados si los valores de las masas de los cuerpos A y B son: $m_A = 3$ kg y $m_B = 4$ kg. Desprecia la masa del hilo y la polea.

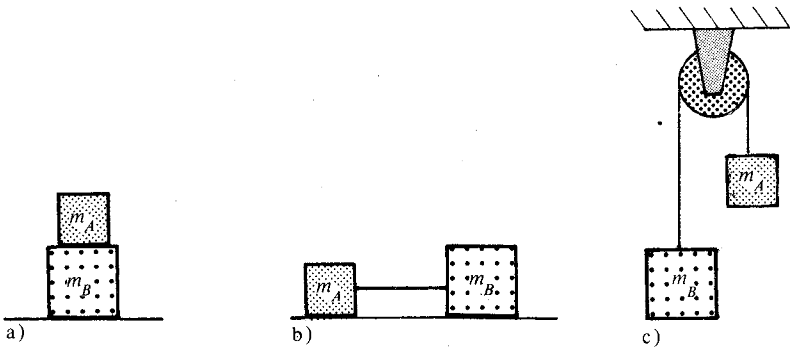


Fig. 3.12

3.4 *Segunda ley: ley de la fuerza*

La segunda ley del movimiento mecánico da respuesta a la pregunta: ¿Cuál es la causa de la aceleración que experimenta un cuerpo?

Hemos comprobado que durante la interacción de dos cuerpos cualesquiera, la aceleración que ellos adquieren está relacionada con sus masas respectivas mediante la relación:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Esto significa que cuando el cuerpo, cuya masa es igual a m_1, adquiere una aceleración a_1; esto es el resultado de que sobre él actúa otro cuerpo de masa m_2 que a su vez también adquiere la aceleración a_2.

Esta relación parece indicar que no se puede estudiar el movimiento y calcular la aceleración de un solo cuerpo. Obligatoriamente hay que conocer la masa y la aceleración del otro cuerpo que interactúa.

Afortunadamente en la práctica nos interesa solamente el movimiento de uno de ellos, del cuerpo que se acelera y no del cuerpo o los cuerpos que sobre él actúan comunicándole la aceleración. Por esta razón, generalmente se calcula solo la aceleración de un cuerpo, o sea, de aquel cuyo estado de movimiento se estudia.

Este razonamiento nos hace pensar que la medida de la interacción de los cuerpos, o sea, la acción de un cuerpo sobre el otro, podemos caracterizarlo por una magnitud física que está estrechamente relacionada con la masa y la aceleración que adquiere el cuerpo sobre el que se actúa.

Esta magnitud recibe el nombre de *fuerza*. Desde este momento diremos que la aceleración adquirida por el cuerpo, es el resultado de una fuerza aplicada sobre él. Es por esta razón que en los ejemplos ilustrados en la figura 3.10 ambos carros adquieren determinada aceleración porque sobre el carro pequeño actúa una fuerza provocada por el resorte deformado del carro grande.

Como conoces de estudios anteriores, en todo cuerpo deformado surge una fuerza cuyo valor depende del grado de deformación del cuerpo.

Recordado esto, pasemos a estudiar experimentalmente la relación existente entre la fuerza, la masa y la aceleración.

Este experimento consistirá en que bajo la acción de una misma fuerza, provocamos un cambio del estado de movimiento de diferentes cuerpos, es decir, de distintas masas, y medimos su aceleración.

Con esta finalidad primero tenemos que elegir un cuerpo que actúe sobre otros cuerpos con igual fuerza. Este cuerpo puede ser una banda de goma o liga. La cual alargada a una longitud determinada, actúa con una misma fuerza cualquiera que sea la masa del cuerpo.

Aplicaremos a un carro de masa m una fuerza de valor constante mateniendo la liga con una misma deformación Δl y analicemos cómo varia la aceleración.

En la figura 3.13a se muestra el montaje que emplearemos en el experimento. La aceleración que adquiere el carro la determinaremos mediante un medidor de aceleración y observaremos su valor en la escala del instrumento de medición que se señala en el esquema (fig. 3.13b).

Si repetimos el experimento para dos carros unidos entre sí (fig. 3.14) de forma que su masa sea el doble y mantenemos el mismo alargamiento de la liga, la aceleración del cuerpo de masa $2m$ será igual a $a/2$.

Podemos hacerlo para cuerpos de $3m$ y $4m$, y así sucesivamente con la condición de mantener fijo el alargamiento de la liga, obtendremos como conclusión que al aumentar la masa del carro cierto número de veces, la aceleración que se le trasmite por una misma fuerza, disminuye ese mismo número de veces de modo que:

$$m_1 a_1 = m_2 a_2 = \ldots = \text{constante.}$$

Esto significa que el producto ma expresa precisamente el valor numérico de la fuerza que actúa sobre el cuerpo de masa m y que provoca la aceleración a.

La fuerza que actúa sobre un cuerpo dado, es igual al producto de la masa de este por la aceleración que dicha fuerza comunica al cuerpo.

Esta afirmación recibe el nombre de *segunda ley de Newton* y su expresión matemática escalar es:

$$\boxed{F = ma.} \tag{3.5}$$

Como recordarás, en el SI se toma como unidad de fuerza el *newton*, que es aquella que a un cuerpo de un kilogramo le proporciona una aceleración de un metro por segundo al cuadrado, o sea:

$$1 \text{ newton} = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

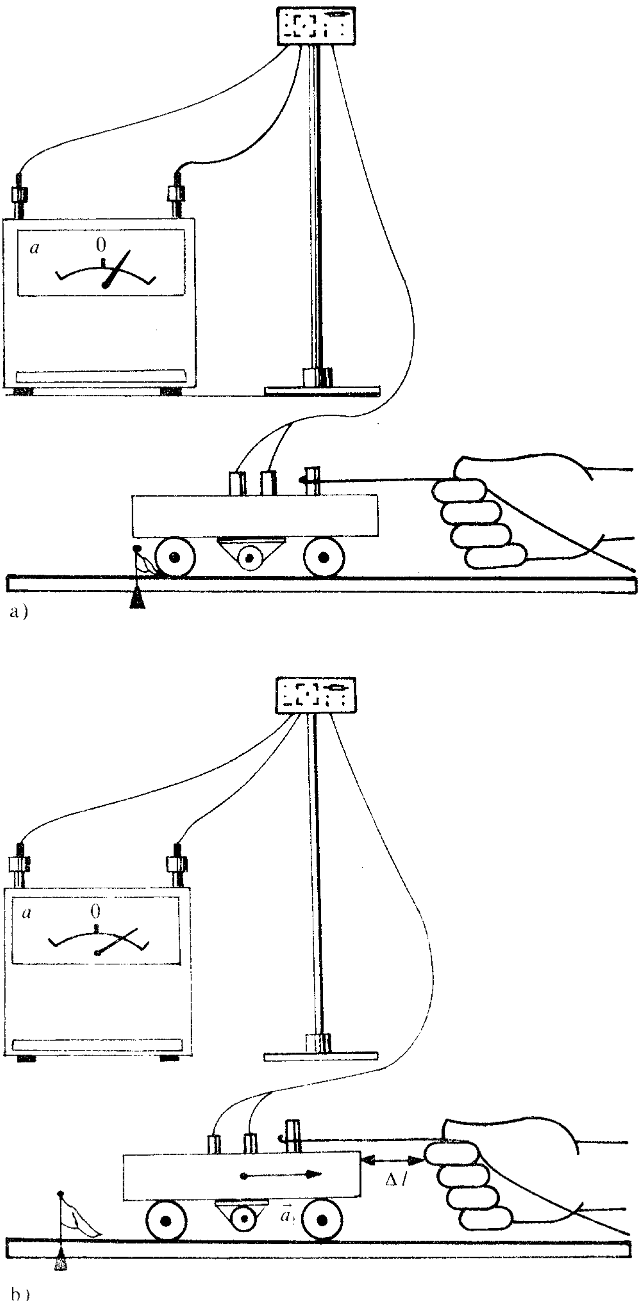


Fig. 3.13

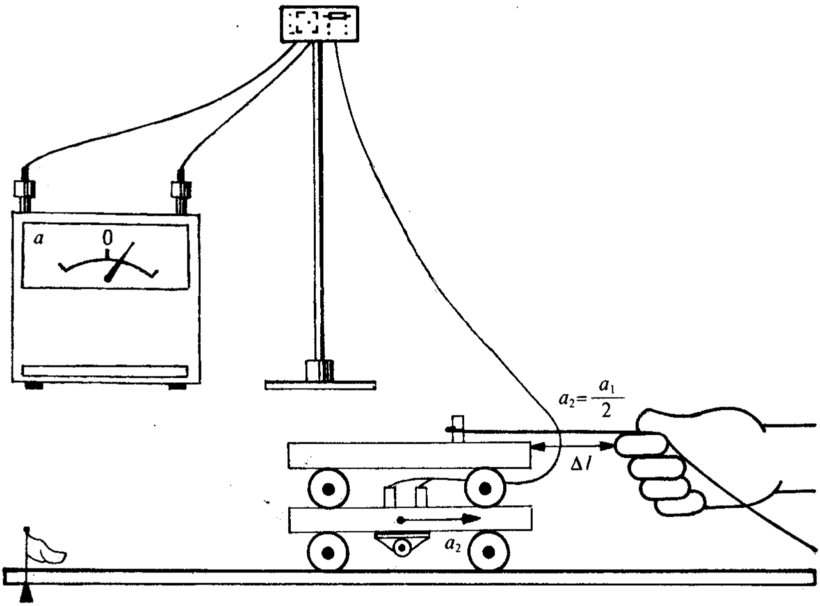


Fig. 3.14

Analicemos una característica importante de la magnitud física fuerza.

Si aplicamos mediante la ayuda de un dinamómetro una fuerza de determinado valor sobre un carrito cualquiera que inicialmente se encuentra en reposo, este comienza a moverse con cierta aceleración en la misma dirección y sentido de la fuerza aplicada (fig. 3.15a).

Si en un segundo experimento aplicamos con el dinamómetro una fuerza sobre un carro en movimiento, de forma que el sentido de la fuerza sea contrario al del movimiento del carro, este adquiere una aceleración del mismo sentido de la fuerza, o sea contrario al del movimiento (fig. 3.15b). Por esta razón, el carro disminuye su velocidad hasta detenerse momentáneamente y luego comienza a moverse en sentido contrario al de su movimiento inicial, es decir, ahora en el sentido de la aceleración provocada por la fuerza (fig. 3.15c).

Hasta ahora hemos aplicado una fuerza solo en la dirección del movimiento del cuerpo, en un mismo sentido o en sentidos opuestos. En consecuencia, la velocidad del cuerpo cambia, pero la dirección de su movimiento permanece invariable. Sin embargo, las fuerzas pueden aplicarse en otras direcciones.

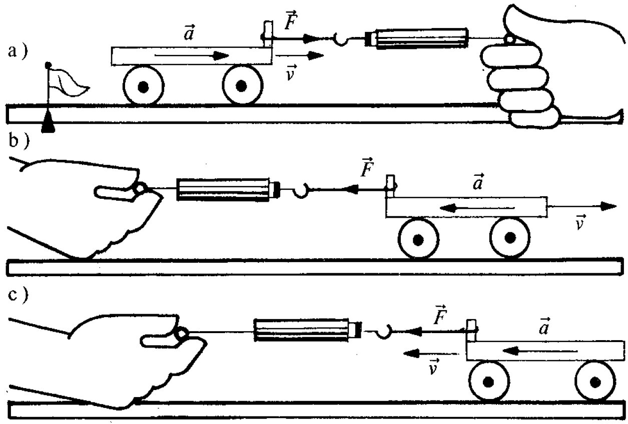


Fig. 3.15

Un carro de mecánica puede desviarse de su curso mediante un empuje normal a la dirección de su movimiento.

En general, vemos que la fuerza cambia el vector velocidad que describe el movimiento de un objeto en intensidad, dirección y sentido. La fuerza posee carácter vectorial y la segunda ley de Newton puede expresarse de forma más precisa de la siguiente manera:

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}} \tag{3.6}$$

y significa que la fuerza no solo produce un cambio en el valor de la aceleración sino que establece también que la dirección y sentido de la aceleración son los mismos que los de la fuerza.

La naturaleza vectorial de esta ley es un hecho establecido empíricamente que se puede verificar al tratar de contestar la siguiente pregunta: ¿Cómo se mueve un cuerpo sometido a la acción de dos fuerzas que forman cierto ángulo θ entre sí?

Supongamos que tenemos un cuerpo C de masa m y sobre él actúan simultáneamente las fuerzas $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$ como se ve en la figura 3.16.

Experimentalmente podemos llegar a las siguientes conclusiones:

a) el movimiento del cuerpo C es acelerado,

b) la aceleración del cuerpo C es la misma que le produciría una sola fuera $\vec{F_R}$ la cual es determinada por la resultante de $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$:

$$\vec{F_R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}.$$

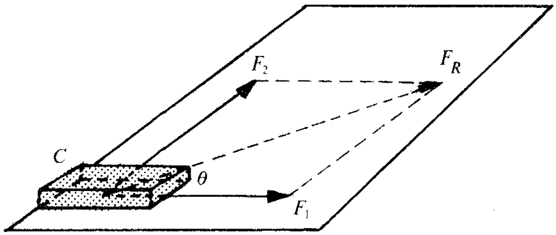


Fig. 3.16

Esto significa lo siguiente:

Si sobre el cuerpo C actuara la fuerza $\vec{F}_R$ en lugar de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, el movimiento de C sería idéntico al producido por la acción simultánea de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$.

Es evidente que si llamamos $\vec{a}$, $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$ a las aceleraciones producidas por las fuerzas $\vec{F}_R$, $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, respectivamente, entre ellas existe la relación:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2.$$

Esto significa que cada fuerza ejerce su acción sobre el cuerpo con independencia de la acción de las demás. Esta propiedad es muy importante porque permite analizar el movimiento del cuerpo como combinación de los movimientos producidos independientemente por $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$. Por ejemplo, representemos el cuerpo C por el punto A; supongamos que por la acción de la fuerza $\vec{F}_R$, el punto, al cabo de 1 s, esté en la posición a (fig. 3.17); la acción independiente de las fuerzas significa que al cabo de 1 s y por las acciones de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ el punto estaría en la posiciones b y c, respectivamente, las cuales permiten determinar la posición de a como se ve en dicha figura.

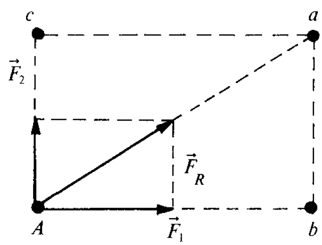


Fig. 3.17

A modo de resumen podemos afirmar que:

La suma vectorial de las fuerzas permite determinar la dirección, así como el valor numérico de la aceleración del cuerpo. Así, la aceleración del cuerpo de masa m sometido simultáneamente a la acción de varias fuerzas es:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F_1} + \vec{F_2} + \dots + \vec{F_n}}{m} = \frac{\vec{F_R}}{m}. \tag{3.8}$$

expresión que podemos escribir en la forma:

$$\boxed{\vec{F_R} = m\,\vec{a}.} \tag{3.9}$$

Esta ecuación constituye la expresión vectorial de la segunda ley de Newton.

Observa que en el caso de la figura 3.17 la resultante F_R la hemos obtenido gráficamente por el método del paralelogramo. La resultante $\vec{F_R}$ también se puede determinar por el método de proyecciones ortogonales, o sea, de la misma forma que empleamos, en el capítulo 1, la composición de vectores (fig. 3.18).

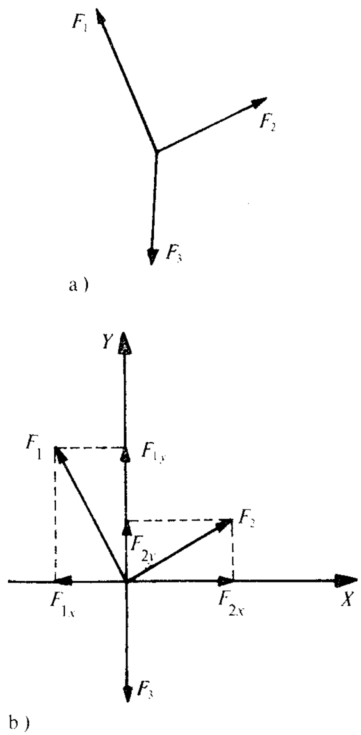


Fig. 3.18

TRABAJO DE LABORATORIO 4.
Comprobación de la segunda ley de Newton

En este trabajo comprobarás que la fuerza provoca un cambio en el estado de movimiento del cuerpo ($F \alpha a$).

Instrumentos y materiales: carro de mecánica, registrador de tiempo con su cinta, fuente de corriente directa, 2 cables de conexión, liga o banda de goma, regla de 50 cm de longitud graduada en milímetros, dinamómetro 0-3 N, papel milimetrado.

Indicaciones para el trabajo

1. Fija la banda de goma en el extremo de la regla de manera que coincida con el cero de la escala.
2. Con ayuda del dinamómetro determina las medidas de las deformaciones x que experimenta la liga al aplicarle fuerza de valor 0,5, 1 y 1,5 N, respectivamente. Anota los resultados en la tabla 3.2.
3. Fija el extremo libre de la liga al carro, como se indica en la figura 3.19.

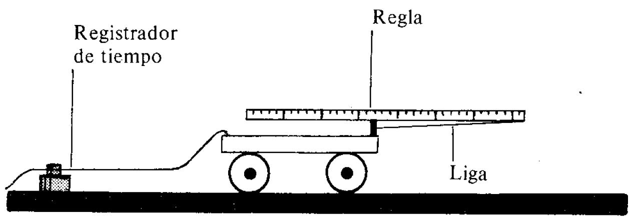


Fig. 3.19

4. Prepara al registrador de tiempo (ticómetro) y las cintas correspondientes con la finalidad de determinar los valores de la aceleración que adquiere el carro bajo la acción de la liga deformada.
5. Los valores de la aceleración se calcularán para deformaciones de la liga correspondientes a fuerzas equivalentes a 0,5; 1 y 1,5 N, respectivamente. Para lograr este propósito, el profesor te explicará previamente qué debe hacer para garantizar que, en cada caso, el valor de la fuerza sobre el carro se mantenga aproximadamente constante durante el tiempo que se está registrando el cambio de posición del carro en la cinta.

6. Después de calcular los valores de las aceleraciones, anótalos en la tabla 3.2.

Tabla 3.2

Fuerza *F (N)*	*Deformación de la liga* Δx *(m)*	*Aceleración* a *(m/s²)*
0,5		
1		
1,5		

7. Con los valores de la fuerza y la aceleración, traza una gráfica de la aceleración a en función de la fuerza F.
8. ¿Qué puedes concluir a partir de la gráfica obtenida?

Tarea adicional: Con los valores de F y a, calcula el valor de la masa del carro. Compara este resultado con el que se obtiene al emplear la balanza del laboratorio.

Tareas

20. Plantea la hipótesis de las causas de por qué:
    a) un automóvil (sin gasolina y sin freno) disminuye su velocidad y se detiene,
    b) un libro que resbala sobre la mesa disminuye su velocidad y se detiene,
    c) una tiza al caer aumenta su velocidad hasta chocar contra el suelo,
    d) una pelota rodando hacia abajo por una pendiente aumenta su velocidad hasta alcanzar la parte más baja,
    e) la Luna girando alrededor de la Tierra se mueve con rapidez aproximadamente constante.
21. ¿A qué llamamos fuerza?
22. Explica con tus palabras el contenido de la segunda ley de Newton.
23. ¿Qué significa el hecho de que la fuerza sea una magnitud vectorial?

24. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones y argumenta las razones.
   a) Un cuerpo sobre el que actúan varias fuerzas cuya resultante es diferente de cero, permanece en reposo.
   b) Un cuerpo que no tiene aceleración no está sometido a fuerza alguna.
   c) Si la velocidad de un cuerpo es nula es un instante dado, es porque la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre él es nula en dicho instante.
   d) La velocidad de un cuerpo solo queda definida por la fuerza que sobre él actúa.
   e) El desplazamiento de un cuerpo sólo queda definido por la fuerza que sobre él actúa.

25. Un cuerpo de 2 kg de masa se encuentra sobre una superficie horizontal lisa; se somete a la acción de varias fuerzas cada una de 5 N como se indica en la figura 3.20.

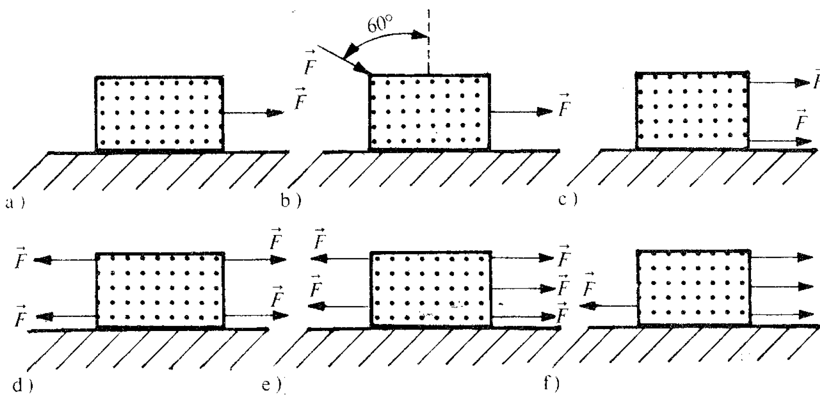


Fig. 3.20

   a) ¿Cuáles representaciones son equivalente? ¿Por qué?
   b) ¿Qué aceleración adquiere el cuerpo en cada caso?

26. Conocemos que al colocar un carro sobre un plano inclinado, el carro desciende con una aceleración constante. Dibuja un esquema y representa en él, la dirección y sentido de la fuerza resultante que provoca tal comportamiento del carro.

27. Mediante un dinamómetro se aplica una fuerza de 6 N sobre un carro cuya masa es de 2 kg. La fuerza actúa paralelamente a la superfice sobre la cual se encuentra el carro. Si se desprecia todo obstáculo al movimiento del carro, calcula la aceleración que este adquiere. Representa mediante un esquema las condiciones que se dan en este problema.

28. Tarea experimental: Diseña un experimento donde compruebes que un cuerpo se mueve en la dirección de la fuerza resultante.

3.5 *Tercera ley: ley de acción y reacción*

Supongamos que tomamos dos carros iguales y colocamos un sistema de referencia como se indica en la figura 3.21.

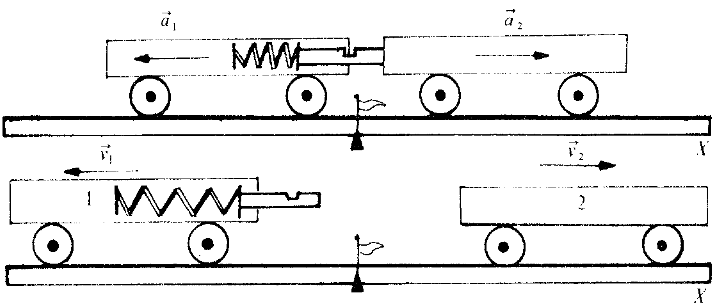


Fig. 3.21

Al hacer interactuar los carros, es fácil percatarse que la acción entre ellos es mutua y ninguna de las acciones es preponderante sobre la otra, es decir, ambas interacciones son iguales. Durante la interacción, el carro 1 actúa sobre el 2 provocando en él una aceleración a_2, a su vez el carro 2 actúa sobre el 1 determinando en este una aceleración a_1.

En el epígrafe anterior llegamos a la conclusión de que durante la interacción, las masas de los cuerpos se relacionan con las aceleraciones adquiridas en correspondencia con la expresión:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1},$$

por tanto:

$$m_1 a_1 = m_2 a_2. \tag{3.10}$$

Al comparar el comportamiento de los carros en relación con el sistema de referencia adoptado, podemos afirmar que las aceleraciones adquiridas por ellos poseen sentidos contrarios y, teniendo en cuenta el carácter vectorial de la aceleración, podemos escribir la igualdad (3.10) de la forma:

$$m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2. \qquad (3.11)$$

Pero $m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_1$ mientras $m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_2$, donde $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ son las fuerzas que actúan sobre el cuerpo 1 y 2. Luego, la igualdad (3.11) podemos escribirla:

$$\boxed{\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.} \qquad (3.12)$$

La igualdad (3.12) constituye la expresión matemática de la tercera ley de Newton.

La tercera Ley de Newton establece que los cuerpos actúan uno sobre otro con fuerzas iguales en módulo y dirección, pero en sentidos opuestos.

Para confirmar lo anteriormente señalado, realicemos el siguiente experimento.

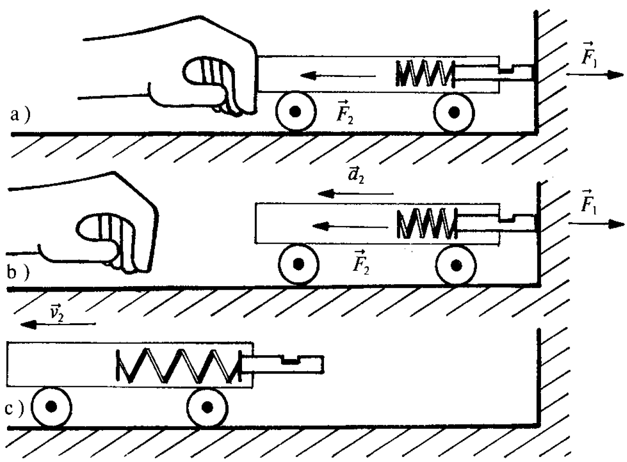


Fig. 3.22

Tomemos un carro y empujémoslo contra la pared del laboratorio de manera que su resorte se comprima (fig. 3.22a). El carro actuará mediante la varilla contra la pared con una fuerza $\vec{F_1}$ y a su vez la pared actúa sobre el carro a través de la varilla con una fuerza $\vec{F_2}$ de igual valor y dirección, pero de sentido contrario (fig. 3.22b). Si se libera el carro, este adquiere una aceleración que evidencia la existencia de la fuerza F_2 (fig. 3.22c).

Tareas

29. Enuncia con tus palabras el contenido de la tercera ley de Newton.

30. Si las fuerzas de acción y reacción son de igual valor y dirección, pero de sentido opuesto, ¿por qué no se compensan?

31. Un niño montado en patines se coloca frente a una pared y la empuja bruscamente. Explica qué le sucederá al niño. Confecciona un esquema en el cual representes las fuerzas que se manifiestan durante la interacción.

32. Se toman dos dinamómetros de igual graduación y se vinculan uno con el otro. Si se tira de uno de ellos hasta que indique el valor de 2N, ¿cuál será la indicación del otro dinamómetro?

33. Dos niños tiran de una cuerda en sentidos opuestos, con una fuerza de 50 N cada uno. ¿Se romperá la soga si es capaz de soportar una tensión de 80 N?

34. Representa las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo en los siguientes casos, identificando los pares de acción y reacción:
    a) un libro sobre la mano,
    b) un cuerpo sobre una superficie horizontal que está siendo arrastrado por una cuerda de la que se tira con la mano,
    c) un cuerpo que cuelga del techo suspendido por un muelle,
    d) un proyectil durante su trayectoria parabólica.

35. Sobre el platillo de accionamiento de un dinamómetro colocado en posición vertical, se pone un recipiente con agua.
    Si en estas condiciones se introduce un dedo en el agua sin que este toque las paredes ni el fondo del recipiente, ¿qué le sucederá a la indicación del dinamómetro? Justifica tu respuesta.

3.6 *Distintos tipos de fuerza*

Fuerza de gravedad

Hemos estudiado que el movimiento en caída libre de un cuerpo cerca de la superficie terrestre tiene una aceleración constante dirigida hacia el centro de la Tierra de valor $g = 9{,}8\ m/s^2$. ¿Cómo podemos interpretar el comportamiento de los cuerpos que caen desde el punto de vista de las leyes del movimiento (fig. 3.23)?

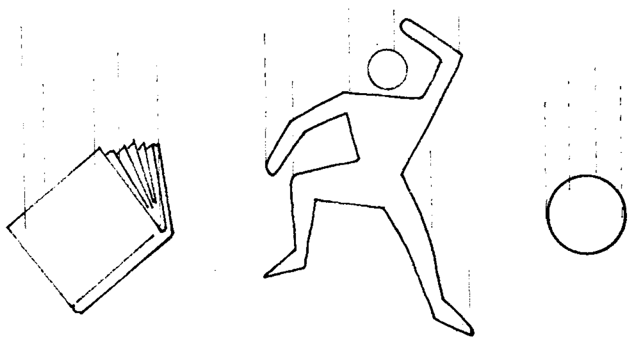


Fig. 3.23

Si un cuerpo se mueve con cierta aceleración es porque sobre él ha actuado otro cuerpo. Sabemos que todos los cuerpos en caída libre o lanzados hacia arriba, se mueven con cierta aceleración.

La causa de dicha aceleración es por la influencia que ejerce la Tierra.

Ahora estamos en condiciones de decir que sobre el cuerpo actúa una fuerza debido a la interacción entre la Tierra y el cuerpo en cuestión.

Según la segunda ley de Newton, tendremos:

$\vec{F} = m\,\vec{a},$

pero $\vec{a} = \vec{g}$

entonces. $\vec{F_g} = m\,\vec{g}.$ (3.13)

Esta fuerza recibe el nombre de *fuerza de gravedad* y es igual al producto de la masa del cuerpo por la aceleración de este en caída libre.

Fuerza elástica

Generalmente, cuando dos cuerpos se ponen en contacto, ambos cuerpos se deforman como consecuencia de la interacción, y después recuperan sus formas originales al cesar la interacción. Así, por ejemplo, si aplicamos con la mano una fuerza sobre la varilla que está fijada al resorte del carro, este se deforma al comprimirse. Cuando retiramos la mano, dejando libre la varilla, el resorte se distiende, recuperando su forma inicial.

No resulta difícil comprobar que en el cuerpo deformado surge una fuerza que se opone a tal deformación, así al estirar una liga o banda de goma con la ayuda de un dinamómetro, eso indica que la liga deformada ejerce sobre él una fuerza de sentido opuesto a la deformación, cuyo valor depende de la medida en que se deforma la liga. La fuerza que surge en un cuerpo deformado recibe el nombre de *fuerza elástica*. Precisamente la fuerza elástica de una liga deformada fue la que utilizaste en el trabajo de laboratorio en que comprobaste la certeza de la segunda Ley de Newton.

Analicemos las características principales de la fuerza elástica.

Si tomas un resorte y lo estiras, comprimes, doblas o tuerces, comprobarás que en todos los casos mencionados surge una fuerza elástica, la cual se mantiene constante, al mantener constante la deformación. Solo cesa la fuerza elástica cuando el resorte recupera su forma original.

Por experiencia sabemos que cuando mayor deformación queremos tener, mayor esfuerzo hay que aplicar al cuerpo que se quiere deformar. Por consiguiente, según el valor de la deformación, podemos juzgar acerca del valor de la fuerza.

Podemos preguntarnos: ¿qué relación existe entre el valor de la fuerza elástica y la deformación?

Con los valores de las fuerzas y las deformaciones experimentadas por la liga utilizada en el trabajo de laboratorio No. 4 Comprobación de la segunda Ley de Newton, hemos construido una gráfica de la dependencia de la fuerza elástica F_e en función de la deformación x (fig. 3.24).

El análisis de la gráfica nos muestra que la deformación elástica es proporcional a la fuerza aplicada y se puede expresar por medio de la relación:

$$F_e = -k\,x, \tag{3.14}$$

donde k es una constante de proporcionalidad que recibe el nombre de constante elástica o rigidez, cuyo valor depende de la forma, dimensiones y material de que está constituido el cuerpo; F_e es la fuerza elástica y x, la longitud de la deformación del resorte. El signo negativo es debido a que su sentido es opuesto a la deformación.

En el SI la constante elástica se expresa en newton por metro (N/m).

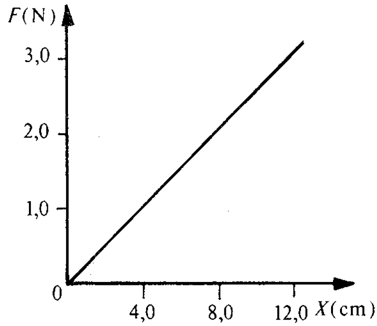


Fig. 3.24

Relacionadas con la fuerza elástica existen dos fuerzas que están presentes en una gran cantidad de fenómenos mecánicos. Estas fuerzas son: el peso de los cuerpos y la denominada fuerza normal.

Analicemos las características de estas fuerzas.

Consideremos que sobre una superficie horizontal, que puede ser la de una mesa, se sitúa un bloque de masa m (fig. 3.25).

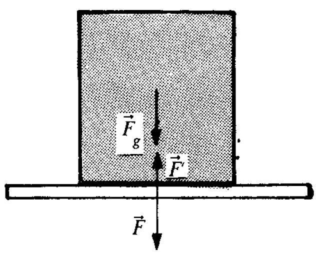


Fig. 3.25

Conocemos que el bloque se mantiene en reposo sobre la mesa porque las acciones sobre él se compensan, es decir, la de la Tierra y la de la mesa. Veamos cuáles son estas acciones. Sobre el bloque actúa la fuerza de gravedad la cual se expresa mediante la expresión

$\vec{F_g} = mg$. Bajo la acción de la fuerza de gravedad $\vec{F_g}$ se produce la interacción del bloque con la mesa en la superficie de contacto. Como consecuencia de esta interacción surgen fuerzas de naturaleza elástica en cada cuerpo. El bloque actúa sobre la mesa con la fuerza $\vec{F}$ y la mesa actúa sobre el bloque con una fuerza $\vec{F}'$ de igual valor, pero de sentido contrario, o sea, son fuerzas de acción y reacción, por lo que se cumple que:

$$\vec{F} = -\vec{F}' \tag{3.15}$$

La fuerza F de naturaleza elástica con que un cuerpo (el bloque) actúa sobre el apoyo o suspensión (la mesa), como conoces de grados anteriores, recibe el nombre de *peso,* que lo representamos por la letra P, luego en este caso:

$$\vec{F} = \vec{P}. \tag{3.16}$$

Por otra parte, la fuerza, también de naturaleza elástica, con que el apoyo reacciona sobre el cuerpo, recibe el nombre de *normal,* ya que ella es perpendiqular a la superficie de contacto. A la fuerza normal la representamos por la letra N.

Por tanto, podemos plantear:

$$\vec{F}' = \vec{N}. \tag{3.17}$$

Si sustituimos (3.15) y (3.16) en (3.17), obtenemos:

$$\vec{P} = -\vec{N}. \tag{3.18}$$

Lo cual significa que el peso del cuerpo o fuerza sobre el apoyo es igual en valor a la normal, pero de sentido opuesto.

¿Cuál es el valor de la fuerza normal en este caso?

Sobre el bloque actúan solo dos fuerzas, la fuerza de gravedad $\vec{F_g}$ y la normal $\vec{N}$, ambas en dirección vertical. Dada la naturaleza vectorial de la fuerza, operamos con sus proyecciones. Con esta finalidad es más conveniente tomar como eje de referencia uno dirigido verticalmente y de sentido hacia arriba que denominaremos Y (fig. 3.26).

Como en este caso el bloque se mantiene en reposo, la aceleración es nula, lo que significa que la resultante de las fuerzas en la dirección del eje Y es nula:

$$\sum \vec{F_y} = 0$$
$$\vec{F_g} + \vec{N} = 0$$
$$F_g - N = 0$$
$$F_g = N. \tag{3.19}$$

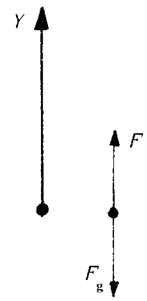


Fig. 3.26

Del resultado (3.19) se deduce que cuando un cuerpo se encuentra apoyado sobre una superficie horizontal, la normal tiene un valor igual al de la fuerza de gravedad e igual en valor al peso del cuerpo sobre el apoyo.

TRABAJO DE LABORATORIO 5.
Determinación de la constante elástica de un resorte

Instrumentos y materiales: Variante 1: carro, regla graduada en milímetro, un dinamómetro. Variante 2: resorte, regla graduada en milímetro, juego de pesas de masas 50 y 100 g, soporte universal.

Indicaciones para el trabajo

1. Con los materiales que se te entregan, de acuerdo a las variantes dadas determina la constante elástica del resorte del carro o de otro cuerpo que se te entregue.
2. Resume con tus palabras como planificarás la tarea. Confecciona una tabla en la que resumas los resultados.
3. Calcula la media aritmética de los valores hallados de la rigidez del muelle y el error medio de las mediciones.

Fuerza de rozamiento. Coeficiente de rozamiento

Durante los estudios realizados en séptimo grado te familiarizaste con un tipo de fuerza muy difundida en la naturaleza, con la cual nos encontramos constantemente en la vida cotidiana: la fuerza de fricción o de rozamiento. Conociste además, la diferencia de dos tipos fundamentales de rozamiento dependientes de la forma en que se produce la interacción de los cuerpos en movimiento: fricción por deslizamiento y fricción por rodadura.

Ahora nos detendremos en el estudio cuantitativo de la fuerza de fricción por deslizamiento, obtendremos su expresión matemática y distinguiremos además, los coeficientes estático y cinético de rozamiento.

Comencemos nuestro estudio analizando primero el movimiento de un bloque de madera que se encuentra sobre una superficie horizontal S, tal como se muestra en la figura 3.27.

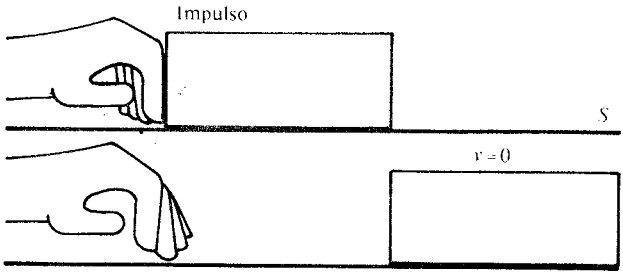


Fig. 3.27

Si se le da un impulso, el bloque deslizaría sobre la superficie. Si esta fuese idealmente lisa, o sea, carente de rozamiento, el bloque, en correspondencia con la primera ley, se desplazaría con movimiento rectilíneo uniforme; en realidad, por causa del rozamiento, su movimiento será retardado, su velocidad disminuirá hasta hacerse cero y el bloque quedará en reposo. De acuerdo con la segunda ley, esto significa que sobre el bloque actúa una fuerza de sentido contrario al del movimiento.

Esta fuerza, que se origina de la interacción del cuerpo con la superficie, recibe el nombre de fuerza de rozamiento $\vec{f_r}$ y tiene las siguientes propiedades que han sido establecidas empíricamente:

a) Se origina en las superficies de contacto de los cuerpos siempre que estas se encuentren en movimiento relativo o que como resultado de una acción externa se tienda a moverlas.
b) Su dirección es paralela a las superficies de contacto y su sentido es siempre opuesto al movimiento.
c) Su módulo o valor es directamente proporcional al valor de la fuerza normal N, que actúa sobre el cuerpo.

Esta última propiedad se expresa matemáticamente mediante la ecuación:

$$\vec{f_r} = \mu\vec{N}, \tag{3.20}$$

donde μ es una constante de proporcionalidad, denominada coeficiente de rozamiento y es una magnitud adimensional.

¿Puedes fundamentar esta afirmación?

La causa de esta fuerzas no está totalmente aclarada, se sabe que dependen del grado de pulimentación de las superficies y de la naturaleza de las sustancias que integran a los cuerpos, en particular de las fuerzas intermoleculares de ambas sustancias. Es evidente que las prominencias y salientes en las superficies se manifiesta como una resistencia al movimiento (fig. 3.28a).

Analicemos las características del coeficiente de rozamiento, teniendo en cuenta que nos limitaremos al rozamiento seco que se produce durante el deslizamiento de las superficies no lubricadas de dos cuerpos sólidos.

Situemos un bloque de madera sobre la superficie horizontal de la mesa del laboratorio. En estas condiciones el bloque se mantiene en reposo porque las fuerzas que actúan sobre él están compensadas (figura 3.28b).

Si mediante un hilo y con ayuda de un dinamómetro, aplicamos una fuerza de valor creciente; para valores pequeños de la tensión en el hilo, el bloque permanece en reposo, lo cual significa que no existe una fuerza resultante, es decir, que la tensión $\vec{T}$ es compensada por la fuerza de rozamiento que actúa paralela a la superficie y de sentido contrario (fig. 3.28c). Esta fuerza se denomina *fuerza de rozamiento estático.*

Si se sigue incrementando la fuerza $\vec{T}$, se alcanza un valor límite (T_m), en el cual el bloque se despega de la superficie y comienza a moverse (fig. 3.28d). La fuerza de rozamiento estático puede tener cualquier valor comprendido entre el cero (cuando no hay fuerza alguna aplicada sobre el cuerpo en dirección horizontal) y el valor límite. En este caso el factor μ recibe el nombre de coeficiente de rozamiento estático (μ_e) y se calcula a partir de la fuerza límite, o sea:

$$\mu_e = \frac{f_{rm}}{N}. \tag{3.21}$$

La fuerza de rozamiento estático se describe cuantitativamente mediante la expresión:

$$f_r \leqslant \mu_e N.$$

El signo de igualdad solo es válido cuando la fuerza aplicada sea igual a la límite, o sea, en el momento de iniciarse el movimiento.

Una vez que se ha iniciado el movimiento del bloque, la lectura en el dinamómetro indica, que la fuerza necesaria para mantener su movimiento uniforme, es menor, que el valor f_{rm} (fig. 3.28e).

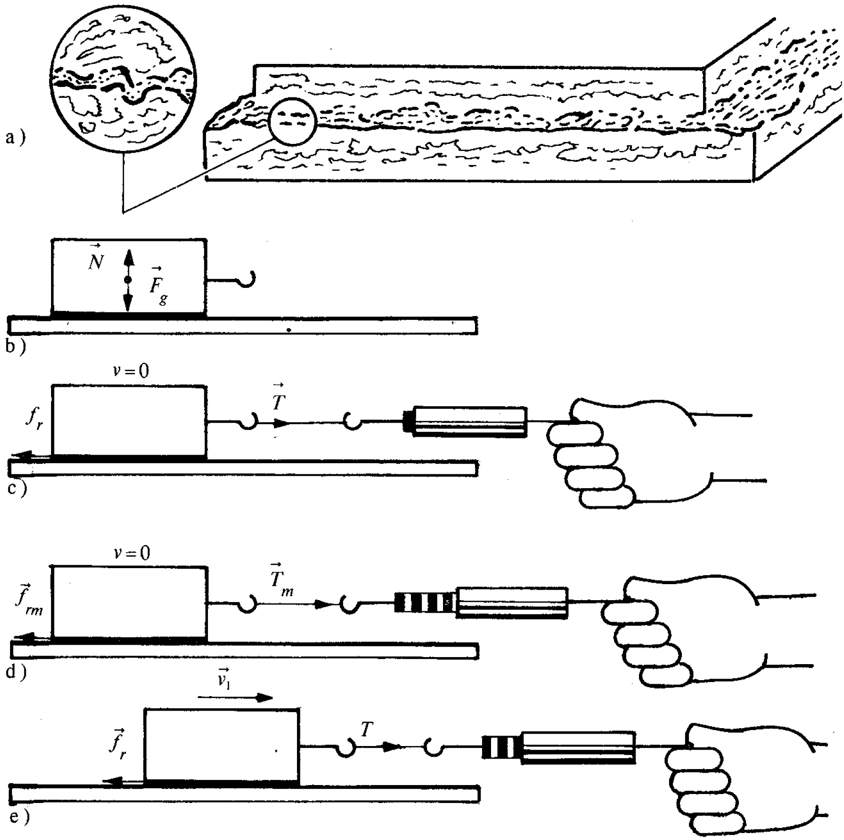


Fig. 3.28

En este caso el valor de la fuerza de rozamiento es también aproximadamente proporcional a la fuerza normal y el coeficiente recibe el nombre de coeficiente de rozamiento cinético y se calcula mediante la expresión:

$$\mu_c = \frac{f_r}{N}.$$

Puesto que para un mismo sistema cuerpo-superficie el valor de la fuerza de fricción estática límite es mayor que el de la fuerza de fricción cinética, ello significa que el coeficiente de rozamiento cinético estático es mayor que el coeficiente de rozamiento cinético o sea:

$$\mu_e > \mu_c. \tag{3.22}$$

TRABAJO DE LABORATORIO 6. Determinación del coeficiente de rozamiento

Mediante la realización de este trabajo de laboratorio debes llegar a determinar el coeficiente de rozamiento de un bloque de madera que resbala por una regla de madera.

Instrumentos y *materiales*: regla graduada, cinta métrica, dinamómetro, bloque de madera, juego de pesas, soporte con acoplamiento e hilo.

Indicaciones para el trabajo

1. Coloca el bloque en la regla de madera dispuesta horizontalmente. Sobre el bloque coloca una pesa.
2. Fija el dinamómetro al bloque mediante el hilo y tira de él lo más uniformemente posible a lo largo de la regla. Al mismo tiempo observa las indicaciones del dinamómetro.
3. Determina la masa del bloque y de la pesa.
4. Haciendo uso de la expresión $\mu = \frac{f_r}{N}$, halla el coeficiente de rozamiento.
5. Repite el experimento colocando sobre el bloque varias pesas.
6. Determina el valor medio aritmético de los coeficientes de rozamiento hallados en diferentes experimentos.

Tareas

36. ¿Cuál es la causa de que todos los cuerpos caigan aceleradamente al dejarlos libres en las proximidades de la superficie de la Tierra?

37. Dos cuerpos, uno de masa 1 kg y otro de masa 5 kg, se dejan caer desde una altura de 5 m.

a) Calcula el valor de la fuerza de gravedad que actúa sobre cada uno.
b) ¿Cuál de los cuerpos llega más rápido al suelo si se desprecia toda acción que no sea la de la gravedad? Justifica tu respuesta.

38. ¿Sobre qué cuerpo debe actuar la reacción de la fuerza de gravedad?

39. Es evidente que la Tierra atrae a los cuerpos, pero no se observa que los cuerpos atraigan a la Tierra. Parece ser que no se cumple la tercera Ley de Newton. Argumenta tu respuesta.

40. Calcula el valor de la aceleración que adquiere la Tierra cuando se deja caer un cuerpo de masa 1 kg si la masa de la Tierra es de $6 \cdot 10^{22}$ kg.

41. Realiza la modelación, mediante el trazado de esquemas, de las condiciones que se dan en los fenómenos que se describen a continuación. Representa en todos los casos las fuerzas que se manifiestan. Se desprecia toda interacción de los cuerpos con la atmósfera.
a) Un cuerpo, después de ser lanzado verticalmente hacia arriba, se encuentra subiendo.
b) El mismo cuerpo, pero en este caso, bajando.
c) Un cuerpo ha sido lanzado oblicuamente y se encuentra moviéndose en el aire.
d) Un bloque se desplaza sobre una superficie horizontal lisa (sin rozamiento) con una velocidad constante.
e) Un péndulo formado por un hilo resistente y una esfera, que se encuentra en una posición extrema.
f) El mismo péndulo pero en el instante que pasa por su posición de equilibrio.

42. ¿Por qué, en el caso del inciso anterior, el péndulo continúa moviéndose si la resultante de las fuerzas en esta posición es nula, o sea, la aceleración en la esfera es cero.

43. Atendiendo a los cuerpos representados en la figura 3.29:
a) representa las fuerzas que actúan sobre cada uno;
b) calcula el valor de la fuerza normal que actúa sobre cada uno si los valores de las masas son $m_1 = 2$ kg y $m_2 = 3$ kg;
c) señala en cada uno la fuerza peso.

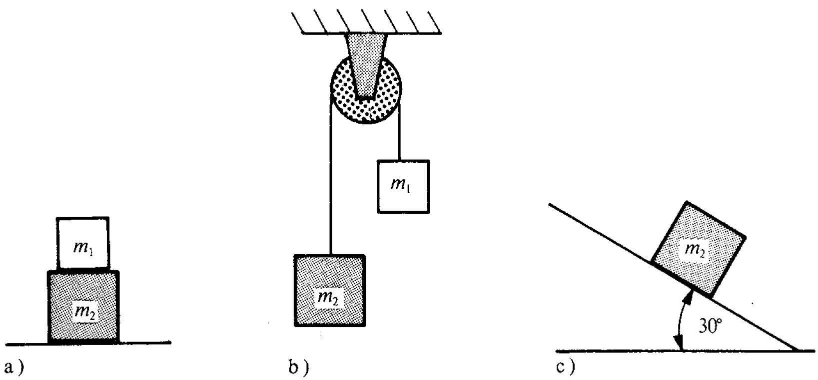


Fig. 3.29

44. Enumera las características de la fuerza de rozamiento.
45. ¿Qué significado físico tiene el coeficiente de rozamiento?
46. Un niño trata de empujar una maleta sobre una superficie rugosa y no puede moverla. ¿Hay fricción? ¿Qué tipos?
47. ¿Qué magnitud física se calcula cuando se multiplica el coeficiente de rozamiento estático por el valor de la fuerza normal N?
48. Sobre un libro se coloca una goma de borrar. Posteriormente se aplica una fuerza al libro y este se pone en movimiento llevando encima a la goma. Realiza el experimento y compara su resultado con el que se muestra en la figura 3.28b. ¿Significa que en este caso no se cumple la primera Ley de Newton? ¿Qué fuerza cambió el estado de movimiento de la goma?
49. Un niño empuja con todas sus fuerzas un librero, pero no logra moverlo. ¿Constituye esto una violación de la segunda ley de Newton? Justifica tu respuesta.
50. Un ladrillo de 5 kg se mueve rectilínea y uniformemente cuando se le empuja con una fuerza de 9,8 N. ¿Cuál es el valor del coeficiente de rozamiento cinético del sistema ladrillo-mesa? Si se aplica la misma fuerza estando el ladrillo en reposo, ¿se pondrá en movimiento? Justifica tu respuesta.
51. Explica con la ayuda de un esquema cómo es que podemos caminar. ¿Cuál es la fuerza que nos hace avanzar?

52. Sobre un plano inclinado que forma un ángulo de 30° con la horizontal se ha colocado un bloque de madera de 2 kg.

En estas condiciones el bloque permanece en reposo, sin deslizar. Con la ayuda de un esquema explica el porqué de este fenómeno. ¿Cuál es el valor de la fuerza de rozamiento estático? ¿Puedes determinar con toda certeza el valor del coeficiente de rozamiento estático en este caso? Justifica tu respuesta.

53. Tarea experimental: Coloca una caja de fósforo sobre una regla y luego levántala lentamente por uno de sus extremos de forma que el ángulo de inclinación, de ella con la mesa aumente.

a) ¿Resbala la caja para cualquier inclinación de la regla? ¿Por qué?

b) Determina el coeficiente de rozamiento estático si cuentas con la ayuda de un semicírculo.

3.7 *Aplicación de las leyes de Newton*

La práctica y las observaciones nos muestran que la causa de las variaciones del estado de movimiento de los cuerpos, es decir, la causa de la variación de su velocidad, son las acciones de otros cuerpos sobre ellos. La medida de la acción de un cuerpo sobre otro se expresa mediante una magnitud física llamada *fuerza.*

Todos los cuerpos están en interacción. Durante esta, la aceleración del cuerpo depende de una propiedad de este, su inercialidad, expresada por la magnitud física *masa.*

Sobre estos hechos se basan las tres leyes del movimiento formuladas por Isaac Newton.

Primera ley: El estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme de un cuerpo se mantiene mientras sobre él no actúan otros cuerpos o las acciones de estos se compensan.

Segunda ley: Independiente del tipo de interacción, la fuerza que actúa sobre un cuerpo es igual al producto de la masa de este por la aceleración que es capaz de comunicarle dicha fuerza.

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Tercera ley: Los cuerpos actúan uno sobre otro con fuerzas iguales en módulo y dirección, pero en sentidos opuestos.

$$\vec{F_1} = -\vec{F_2}$$

Cualquier problema relacionado con el movimiento mecánico se resuelve con ayuda de las Leyes de Newton si conocemos, además de las coordenadas y las velocidades iniciales, las fuerzas aplicadas al cuerpo. Es necesario tener en cuenta que la fuerza o la resultante de varias fuerzas determina no la velocidad (su módulo y dirección), sino la aceleración del cuerpo.

En la aplicación de las leyes del movimiento de un cuerpo es muy importante:

a) determinar cuáles cuerpos interactúan con el cuerpo dado, para poder conocer las fuerzas que actúan sobre él;
b) conocer el estado mecánico inicial del cuerpo para poder determinar su movimiento futuro.

Veamos algunos problemas resueltos a manera de ejemplo de cómo aplicar las Leyes de Newton.

Problemas resueltos

1. Sobre un bloque de masa m que inicialmente se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal dura, se aplica una fuerza constante $\vec{F}$, cuya dirección es paralela a la superficie. El coeficiente de rozamiento cinético bloque-superficie tiene un valor μ. Determina:

a) el valor de la aceleración que adquiere el bloque;
b) la velocidad del bloque en un intervalo de tiempo t, después de iniciado el movimiento relativo del bloque con respecto a la superficie.

Solución

Para obtener una mejor comprensión de las condiciones que se dan en el enunciado del problema nos auxiliaremos de un esquema en el cual se representarán los distintos factores que intervienen en él (fig. 3.30).

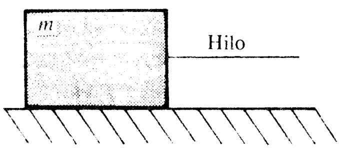


Fig. 3.30

El bloque, cuya masa es m, se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal dura; esto significa que no posee velocidad inicial, o sea, $v_0 = 0$, y que no existe posibilidad de movimiento en la dirección vertical. La fuerza constante $\vec{F}$ que se aplica según una dirección paralela a la superficie, provocará que el bloque adquiera un movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado si ella determina una fuerza resultante sobre el cuerpo ya que sobre el bloque actuará, además, entre otras, una fuerza de rozamiento que llamaremos $\vec{f_r}$, que surge como consecuencia del movimiento relativo bloque-superficie, la cual no se puede despreciar, pues existe un coeficiente de rozamiento μ. Para tener una visión más clara del posible comportamiento del bloque, primero ubiquemos nuestro sistema de referencia de forma que su origen coincida con la posición inicial del bloque, al cual consideremos como un punto material. Asignemos los sentidos positivos de los ejes. En este caso, la dirección del eje X la hacemos coincidir con la horizontal porque la única posibilidad de movimiento sobre la superficie solo puede ocurrir en esta dirección, o sea, la de la fuerza, cuya dirección es paralela a la superficie. Segundo, representemos cada una de las fuerzas que actúan sobre el bloque. Para esto analicemos cada una de las interacciones que experimenta el bloque (fig. 3.31).

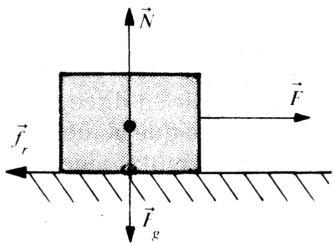


Fig. 3.31

Sobre él actúa la fuerza de gravedad que comprime al bloque sobre la superficie y, por reacción, la superficie actúa sobre el bloque con una fuerza $\vec{N}$ normal a ella (ambas fuerzas actúan según la dirección vertical, o sea, coincidiendo con la del eje Y). Además de la fuerza $\vec{F}$ que actúa en la dirección y sentido del eje X, también actúa la fuerza de rozamiento $\vec{f_r}$ que es de sentido contrario a $\vec{F}$.

En la figura 3.32 se ha representado cada una de estas fuerzas actuando sobre el punto material representativo del bloque.

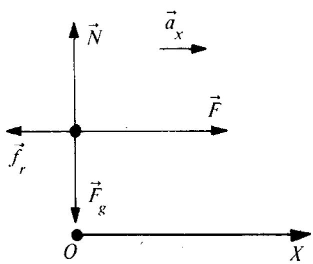


Fig. 3.32

Se pide que calculemos la aceleración $\overrightarrow{a}$ que adquiere el bloque y su velocidad al cabo de un intervalo de tiempo t, después de iniciado el movimiento, son precisamente estas las incógnitas del problema.

Del análisis realizado podemos resumir los datos e incógnitas siguientes:

Datos	*Incógnitas*
$m = m$	*a)* $a = ?$
$F = F$	b) $v = ?$
$\mu = \mu$	
$v_0 = 0$	

a) Como se pide determinar la aceleración que adquiere el bloque, y esta solo se puede producir en dirección horizontal y es provocada por la fuerza resultante que actúe sobre el bloque en esta dirección, utilizaremos la fórmula general de la segunda Ley de Newton, que relaciona a ambas magnitudes en la dirección del eje X, o sea:

$$\sum\overrightarrow{F_x} = m\overrightarrow{a_x}, \tag{1}$$

pero las fuerzas que actúan en esta dirección son: $\overrightarrow{F}$ y $\overrightarrow{f_r}$, luego:

$$\sum \overrightarrow{F_x} = \overrightarrow{F_x} + \overrightarrow{f_r}. \tag{2}$$

Si se sustituye (2) en (1), resulta:

$$\overrightarrow{F_x} + \overrightarrow{f_r} = m\overrightarrow{a_x}. \tag{3}$$

Si obtenemos las proyecciones sobre el eje X, de cada una de las magnitudes incluidas en la expresión (3), tenemos:

$$F - f_r = ma_x, \tag{4}$$

luego, despejando a_x, resulta:

$$a_x = \frac{F - f_r}{m}. \tag{5}$$

De (5) nos percatamos que para determinar a_x necesitamos conocer f_r. Pero como f_r es la proyección de la fuerza de fricción, analicemos cómo obtener su valor.
Sabemos que el módulo de $\vec{f_r}$ es igual a:

$$f_r = \mu N, \tag{6}$$

luego resulta necesario determinar el módulo de $\vec{N}$, que es una fuerza que actúa en dirección vertical. En esta dirección solo actúan $\vec{N}$ y $\vec{F_g}$ (fig. 3.31) y como la superficie es dura, el movimiento en esta dirección no se produce, lo cual significa que:

$$\sum\vec{F_y} = 0 \text{ porque } a_y = 0.$$

Luego:

$$\vec{N} + \vec{F_g} = 0. \tag{7}$$

Si proyectamos sobre el eje Y las magnitudes involucradas en la ecuación (7) resulta:

$$-N + F_g = 0.$$

Entonces:

$$N = F_g. \tag{8}$$

Pero F_g es la proyección de la fuerza de gravedad, o sea:

$$F_g = mg. \tag{7'}$$

Si se sustituye (7') en (8), se obtiene:

$$N = mg. \tag{8'}$$

Luego, sustituyendo (8') en (6), resulta:

$$f_r = \mu mg. \tag{9}$$

En conclusión, si sustituimos (9) en (5), llegamos a determinar a_x, es decir:

$$a_x = \frac{F - \mu mg}{m}. \tag{10}$$

b) Para determinar la velocidad que adquiere el bloque al cabo del tiempo t utilizaremos la ecuación general de la velocidad correspondiente a un movimiento uniformemente acelerado, o sea:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\, t. \qquad (11)$$

Si adecuamos la ecuación (11) a las condiciones del problema y proyectamos sobre el eje X las magnitudes incluidas en ella, resulta:

$$v_x = a_x t. \qquad (12)$$

Por último, si sutituimos (10) en (12) obtenemos la solución de este inciso, es decir:

$$v_x = \frac{F - \mu mg}{m}\, t. \qquad (13)$$

Los valores de la aceleración y la velocidad se obtienen a partir de las ecuaciones (10) y (13), que están expresadas en forma literal.

2. Sobre una superficie horizontal lisa y dura se encuentra un bloque de masa 10 kg (fig. 3.33). Si el bloque está en reposo, se le aplica una fuerza de valor 25 N, como se indica en la figura. Calcula:

a) el desplazamiento que realiza el bloque al cabo de 8 s;
b) el peso del bloque antes y después de aplicarle la fuerza $\vec{F}$.

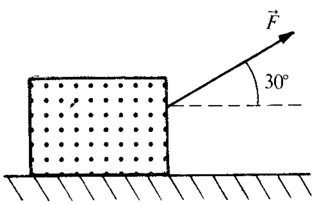


Fig. 3.33

Solución

En este caso, la información, además de aparecer en forma escrita, está apoyada con un esquema; ella expresa que en un bloque de 10 kg de masa se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal lisa y dura, lo cual significa que su velocidad inicial v_0 es nula, que el rozamiento es despreciable, o sea, $\mu = 0$, y que no existe posibilidad de movimiento en la dirección vertical hacia abajo.

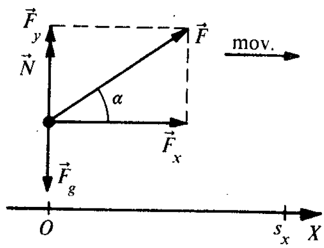


Fig. 3.34

Sobre el cuerpo se aplica una fuerza de 25 N, cuya dirección forma un ángulo de 30° con la horizontal. Para obtener una mejor comprensión de las posibles consecuencias provocadas por dicha fuerza, ubiquemos nuestro sistema de referencia de modo que coincida su origen con la posición que ocupa incialmente el punto material representativo del bloque. El eje X lo orientamos en dirección horizontal, o sea, paralelo a la superficie. El eje Y lo orientaremos verticalmente hacia arriba, como se indica en la figura 3.34.

Sobre el bloque actúan la fuerza de gravedad $\overrightarrow{F_g}$, la fuerza normal $\overrightarrow{N}$, reacción de la superficie sobre el bloque, y la fuerza $\overrightarrow{F}$. Como la posibilidad de movimiento del bloque solo se puede producir sobre la superficie, o sea, a lo largo del eje X, obtendremos la componente de $\overrightarrow{F}$ paralela a dicho eje, o sea, $\overrightarrow{F_x}$. Esta componente $\overrightarrow{F_x}$ es la única que puede provocar el movimiento uniformemente acelerado del bloque. La componente $\overrightarrow{F_y}$ paralela al eje Y, solo puede modificar el valor de la fuerza normal $\overrightarrow{N}$ en la dirección vertical.

Se pide que determinemos el desplazamiento $\overrightarrow{s}$ que realiza el bloque al cabo de 8 s, y el peso del bloque antes y después de aplicar la fuerza $\overrightarrow{F}$.

Resumanos los resultados del análisis.

Datos	Incógnitas
$m = 10$ kg	a) $s = ?$ para $t = 8$ s
$v_0 = 0$	b) $P = ?$ para $F = 0$
$s_0 = 0$	$P = ?$ para $F = 25$ N
$\mu = 0$	
$F = 25$ N	
$\alpha = 30°$	

a) Para determinar el desplazamiento que realiza el bloque emplearemos la ecuación general del desplazamiento correspondiente al movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, el cual se produce en la dirección del eje X, bajo la acción de la componente $\vec{F_x}$, o sea:

$$\vec{\Delta s} = \vec{v_0} t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2. \qquad (1)$$

Adaptemos la ecuación (1) a las condiciones del problema y obtengamos, a su vez, las proyecciones, sobre el eje X, de magnitudes incluidas en la ecuación (1):

$$\Delta s_x = \frac{1}{2} a_x t^2. \qquad (2)$$

De los datos:

$v_0 = 0$.

Para calcular s_x nos hace falta determinar la aceleración en la dirección del eje X, es decir, a_x.

Puesto que el movimiento es provocado por la componente $\vec{F_x}$, apliquemos la segunda Ley de Newton que relaciona a ambas magnitudes, o sea, la fuerza y la aceleración. Aplicaremos la ley en la dirección del eje X, es decir:

$$\sum \vec{F_x} = m\vec{a_x} \qquad (3)$$

pero:

$$\sum \vec{F_x} = \vec{F_x}.$$

luego:

$$\vec{F_x} = m\vec{a_x}. \qquad (4)$$

Si proyectamos los vectores $\vec{F_x}$ y $\vec{a_x}$ sobre el eje X, resulta:

$$F_x = ma_x,$$

donde:

$$a_x = \frac{F_x}{m} \qquad (5)$$

De (5) se deduce que para obtener a_x es necesario obtener el valor de la proyección F_x. Si se observa con detenimiento la figura 3.34 se comprobará que los vectores $\vec{F}$, $\vec{F_x}$ y $\vec{F_y}$ constituyen un triángulo rectángulo, en el cual $\vec{F}$ es la hipotenusa; $\vec{F_y}$, el cateto opuesto y $\vec{F_x}$, el cateto adyacente. Según la ley trigonométrica, para un triángulo rectángulo se cumple que:

$$\vec{F_x} = \vec{F}\cos\alpha,$$

luego la proyección F_x es igual a:

$$F_x = F \cos \alpha. \tag{6}$$

Si sustituimos (6) en (5), se obtiene que:

$$a_x = \frac{F \cos \alpha}{m} \tag{6a}$$

Y si sustituimos (6a) en (2), se obtiene Δs_x, es decir:

$$\Delta s_x = \frac{F \cos \alpha}{2\ m}\ t^2 \tag{7}$$

Con la ecuación (7) se calcula el desplazamiento Δs_x.

) Conocemos que el peso de un cuerpo es la fuerza con que el cuerpo actúa sobre el soporte o la superficie sobre la cual se apoya. En este caso, el peso del bloque es la fuerza con que esté actúa sobre la superficie. Por otra parte, sabemos que la normal es la fuerza de reacción de la superficie o del apoyo sobre el cuerpo apoyado; luego, de esto se deduce que el peso es una fuerza de sentido contrario a la normal, pero que tiene igual módulo (son fuerzas de acción y reacción), o sea:

$$\vec{P} = -\vec{N},$$

entonces sus proyecciones se relacionan de la forma siguiente:

$$P = -N. \tag{8}$$

De (8) se deduce que para determinar el valor del peso, en cada caso, es necesario determinar la normal a la superficie. Antes de aplicar la fuerza $\vec{F}$, en la dirección vertical solo actuaban sobre el bloque la fuerza de gravedad y la normal (fig. 3.35).

Luego, si aplicamos la segunda Ley de Newton, podremos determinar $\vec{N}$ conociendo que en la dirección del eje Y no existe posibilidad de movimiento, o sea:

$$\vec{a_y} = 0.$$

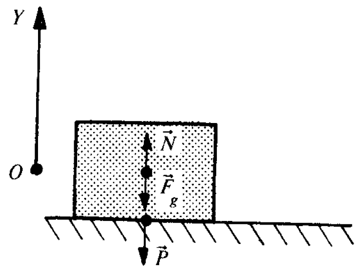


Fig. 3.35

Entonces:

$$\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y$$

$$\vec{N} + \vec{F}_g = m\vec{a}_y. \qquad (9)$$

Si adaptamos la ecuación (9) a nuestras condiciones y proyectamos $\vec{N}$ y $\vec{F}_g$ sobre el eje Y, resulta:

$$N - F_g = 0,$$

luego:

$$N = F_g$$

y como:

$$F_g = mg$$

resulta que:

$$N = mg. \qquad (10)$$

Si sustituimos (10) en (8), obtenemos:

$$P = -mg. \qquad (11)$$

Lo cual significa que en este caso el peso del cuerpo tiene un valor igual a la fuerza de gravedad que actúa sobre el bloque. Analicemos ahora qué sucede al aplicar la fuerza $\vec{F}$. En este caso, en la dirección vertical actúa, además de $\vec{N}$ y $\vec{F}_g$, la componente vertical $\vec{F}_y$ de $\vec{F}$ (fig. 3.36). Luego, aplicando la segunda ley en la dirección del eje Y, resulta:

$$\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y$$

$$\vec{N} + \vec{F}_g + \vec{F}_y = m\vec{a}_y. \qquad (12)$$

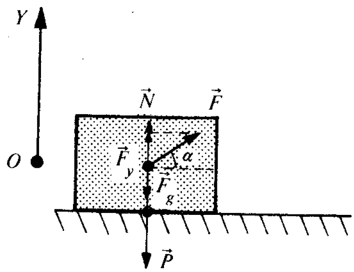


Fig. 3.36

Si proyectamos estos vectores sobre el eje Y y tomamos en cuenta que $a_y = 0$, obtenemos:

$$N + F_y - F_g = 0$$
$$N = F_g - F_y$$

y como

$$F_g = mg$$
$$N = mg - F_y, \tag{13}$$

y F_y es la proyección, sobre el eje Y, de la componente $\vec{F_y}$ de $\vec{F}$. Si analizamos que en el triángulo formado por $\vec{F}$, $\vec{F_x}$ y $\vec{F_y}$, esta última es igual al cateto opuesto al ángulo α, entonces se puede aplicar la fórmula trigonométrica:

$$F_y = F \operatorname{sen} \alpha. \tag{14}$$

Si sustituimos (14) en (13), la normal es igual a:

$$N = mg - F \operatorname{sen} \alpha. \tag{15}$$

De (15) se deduce que el peso del cuerpo es igual a:

$$P = -(mg - F \operatorname{sen} \alpha). \tag{16}$$

La respuesta al inciso a) la obtenemos sustituyendo los datos en la ecuación (7) y las del inciso b), en las ecuaciones (11) y (16). En el inciso a), el desplazamiento realizado por el bloque es:

$$\Delta s_x = \frac{1}{2} \frac{F \cos \alpha t^2}{m}$$

$$\Delta s_x = \frac{1}{2} \frac{25 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \cdot 0{,}86 \cdot (8 \text{ s})^2}{10 \text{ kg}}$$

$$\Delta s_x = 68{,}8 \text{ m}.$$

En el inciso b), cuando no actúa *F*:

$$P = -mg$$
$$P = -10\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2$$
$$P = -98\ \text{N}.$$

Cuando se aplica *F*:

$$P = -(mg - F \operatorname{sen} \alpha)$$

$$P = -\left(10\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 - 25\ \text{N} \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$P = -85{,}5\ \text{N}.$$

Se aprecia que el valor del peso del bloque cuando se aplica *F* es menor.

3. Un bloque de masa 5 kg se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal dura. Si se tira de él mediante un hilo inextensible de masa despreciable con una fuerza de valor 30 N, calcula la posición del bloque al cabo de 6 s. El coeficiente de rozamiento cinético entre el cuerpo y la superficie es $\mu = 0{,}3$; y el hilo forma un ángulo de 45° con la dirección horizontal.

Solución

En este caso, para favorecer la interpretación del problema, nos valdremos primero de un esquema en el cual representaremos las condiciones que se dan directamente en el enunciado del problema (fig. 3.37); después, mediante la selección de un sistema de referencia y la representación del diagrama de fuerzas (fig. 3.38), analizaremos las posibles modificaciones que puedan ocurrir en el estado mecánico inicial del cuerpo al aplicar la fuerza que se menciona en el enunciado.

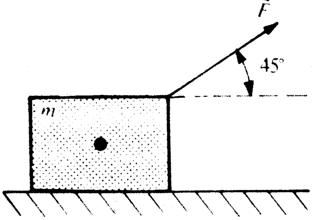


Fig. 3.37

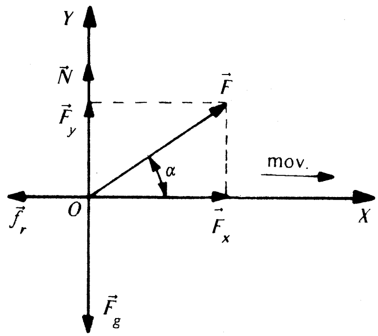


Fig. 3.38

De la parte inicial del enunciado se deduce que el bloque de masa 5 kg inicialmente se encuentra en reposo respecto a una superficie horizontal dura, lo cual significa que el valor de su velocidad inicial v_0 es nula y que no existe posibilidad de movimiento en la dirección perpendicular hacia abajo.

Mediante un hilo inextensible y de masa despreciable, o sea, de longitud constante, de masa $m_h = 0$, se aplica al bloque una fuerza $\vec{F}$ de valor 30 N. El hilo forma un ángulo α de 45° con la horizontal. Es de suponer, que el bloque, bajo la acción de la fuerza $\vec{F}$, adquiera un movimiento uniformemente acelerado, en el cual es necesario tener en cuenta la presencia de una fuerza de rozamiento, la que es evidenciada por la existencia de un coeficiente de rozamiento μ no nulo, es decir, $\mu = 0,3$; y causada por el movimiento relativo superficie-bloque provocado por la fuerza $\vec{F}$.

Para tener un visión más definida acerca del posible comportamiento del cuerpo, ubiquemos nuestro sistema de referencia haciendo que su origen coincida con la posición inicial que ocupa el bloque sobre la superficie, al cual lo consideramos como un punto material. Los ejes los orientaremos como se indica en la figura 3.38. Esta selección de la ubicación del sistema de referencia determina que la posición inicial del cuerpo s_0 sea nula. Sobre el bloque actúan: la fuerza $\vec{F}$, aplicada a él por medio del hilo; la fuerza de gravedad $\vec{F}_g$, causada por la atracción terrestre; la fuerza $\vec{N}$, provocada por la reacción del plano a la fuerza con que el bloque actúa sobre él, y la fuerza de rozamiento $\vec{f}_r$.

Es evidente que el cambio en el estado del movimiento del cuerpo debe ocurrir en la dirección positiva del eje X, y provocado por la componente de $\vec{F}$, o sea, $\vec{F}_x$ en la dirección de este eje.

Se pide que determinemos la posición del bloque al cabo de 6 s de estar moviéndose bajo la acción de $\vec{F_x}$.
Del análisis realizado se pueden obtener los datos siguientes:

Datos	Incógnitas
$m = 5$ kg	$s = ?$ para $t = 6$ s
$F = 30$ N	
$\mu = 0{,}3$	
$\alpha = 45°$	
$s_0 = 0$	
$v_0 = 0$	

Para determinar la posición del bloque al cabo de los 6 s de estar aplicando la fuerza $\vec{F}$ es necesario emplear la ecuación general para el cálculo de la posición, o sea:

$$\vec{s} = \vec{s_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2. \qquad (1)$$

Adecuemos la ecuación general (1) a las condiciones específicas de nuestro problema, para lo cual proyectaremos sobre el eje X cada una de las magnitudes vectoriales incluidas en la ecuación (1):

$$s_x = \frac{1}{2} a_x t^2. \qquad (2)$$

Por datos:

$$s_0 = 0 \text{ y } v_0 = 0.$$

De la ecuación (2) se deduce que es necesario determinar el valor de la aceleración en la dirección de X, es decir, a_x. Pero a_x es provocada por la fuerza resultante en la dirección de X. Luego, aplicaremos la ecuación general de la segunda ley de Newton que relaciona dichas magnitudes, o sea:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}, \qquad (3)$$

y trabajando en la dirección del eje X:

$$\sum \vec{F_x} = m\vec{a_x}$$
$$\vec{F_x} + \vec{f_r} = m\vec{a_x}. \qquad (4)$$

Proyectando las magnitudes incluidas en la fórmula (4) sobre el eje X, resulta:

$$F_x - f_r = ma_x \qquad (5)$$

y como F_x es la proyección de la componente de F en la dirección de X, esta es igual a:

$$F_x = F \cos \alpha \tag{6}$$

y

$$f_r = \mu N. \tag{7}$$

De (7) se deduce que es necesario determinar el módulo de la normal $\vec{N}$ a la superficie.

Para calcular la normal apliquemos la segunda ley de Newton en la dirección del eje Y, es decir:

$$\sum \vec{F_y} = m\vec{a_y},$$

luego:

$$\vec{N} + \vec{F_g} + \vec{F_y} = m\vec{a_y}. \tag{8}$$

Adecuemos la ecuación (8) a nuestras condiciones proyectando sobre el eje Y, las magnitudes incluidas en ella, o sea:

$$N - F_g + F_y = 0$$
$$N = F_g - F_y \tag{9}$$

y como:

$$F_g = mg \tag{10}$$

y

$$F_y = F \operatorname{sen} \alpha, \tag{11}$$

es evidente que mediante la solución del sistema de ecuaciones obtenido, llegamos a la solución del problema.

Sustituyamos las ecuaciones (10) y (11) en (9) para obtener el módulo de la normal $\vec{N}$, o sea:

$$N = mg - F \operatorname{sen} \alpha \tag{12}$$

y si se sustituye (12) en (7), resulta:

$$f_r = \mu (mg - F \operatorname{sen} \alpha). \tag{13}$$

Ahora, para determinar a_x, es necesario sustituir las ecuaciones (13) y (6) en la (5), es decir:

$$F \cos \alpha - \mu (mg - F \operatorname{sen} \alpha) = ma_x$$

$$a_x = \frac{F\cos \alpha - \mu (mg - F \operatorname{sen} \alpha)}{m}. \tag{14}$$

La determinación del desplazamiento realizado por el bloque en intervalo de tiempo t, se obtiene sustituyendo la ecuación (14) en la (2):

$$s_x = \frac{1}{2} \frac{F \cos \alpha - \mu (mg - F \operatorname{sen} \alpha)}{m} \cdot t^2. \qquad (15)$$

Y el valor numérico es de acuerdo con los datos:

$$s_x = \frac{1}{2} \frac{30 \text{ N} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 0{,}3\left(49 \text{ N} - 30 \text{ N} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (6 \text{ s})^2}{5 \text{ kg}}$$

$s_x = 46{,}3$ m.

El bloque, al cabo de los 6 s, se encuentra a una distancia de 46,3 m de la posición inicial en la cual se aplicó la fuerza $\vec{F}$.

4. Un bloque de 20 kg de masa se sitúa en la parte superior de un plano inclinado de longitud 1,5 m, que forma un ángulo de 30° con la horizontal (fig. 3.39). La superficie del plano es dura y el coeficiente de rozamiento entre el bloque y ella es $\mu = 0{,}4$. Calcula el tiempo que demora el bloque en llegar a la base del plano.

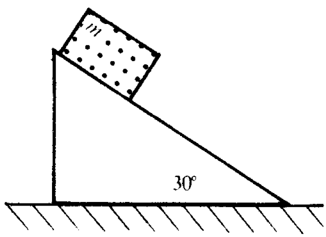


Fig. 3.39

Solución

El bloque se sitúa en la parte superior del plano inclinado que se muestra en la figura 3.39, luego su velocidad inicial v_0 respecto a la superficie inclinada del plano, es cero. La masa del bloque es de 20 kg y la longitud s del plano, que es la distancia que puede recorrer el bloque al descender hasta su base, es de 1,5 m.

Ubiquemos nuestro sistema de referencia con su origen en la posición inicial que ocupa el punto material representativo del bloque.

Haremos coincidir el eje X con la superficie inclinada del plano, o sea, a lo largo del cual puede deslizar el bloque. Representaremos el eje Y normal al plano, tal como se indica en la figura 3.40.

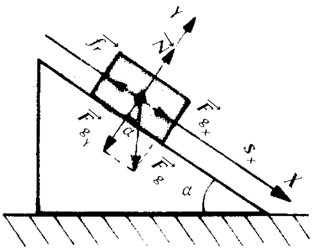


Fig. 3.40

Las fuerzas que actúan sobre el bloque son: la fuerza de gravedad $\vec{F}_g$, la normal $\vec{N}$ o reacción del plano a la compresión que ejerce el bloque sobre él y la fuerza de rozamiento $\vec{f}_r$ que tiende a oponerse a que el bloque se deslice a lo largo del plano.

La fuerza de gravedad es la posible causante de que el bloque se deslice sobre el plano, en particular, la componente $\vec{F}_g$ paralela al eje X, o sea $\vec{F}_{g_x}$. Precisamente, si esta fuerza determina que exista una fuerza resultante en la dirección X, el bloque descenderá, deslizándose por el plano, animado de un movimiento uniformemente acelerado.

Se pide que determinemos el tiempo que demorará el bloque en bajar hasta la base del plano.

Datos	*Incógnita*
$m = 20$ kg	$t = ?$
$\alpha = 30°$	
$s = 1{,}5$ m	
$\mu = 0{,}4$	
$s_0 = 0$	
$v_0 = 0.$	

Para calcular el tiempo que demora el bloque en recorrer la longitud del plano, utilizaremos la ecuación general del desplazamiento, o sea:

$$\vec{s} = \vec{s_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2. \qquad (1)$$

Si proyectamos las magnitudes incluidas en (1) sobre el eje X, y la adecuamos a las condiciones del problema:

$$s_x = \frac{1}{2} a_x t^2. \tag{2}$$

De (2) se deduce que es necesario determinar la aceleración del bloque en la dirección X. Apliquemos la segunda ley de Newton:

$$\sum \vec{F_x} = m\vec{a_x} \tag{3}$$

$$\vec{F_{gx}} + \vec{f_r} = m\vec{a_x}. \tag{4}$$

Proyectemos sobre el eje X las magnitudes incluidas en (4):

$$F_{gx} - f_r = ma_x \tag{4a}$$

pero:

$$F_{gx} = mg \text{ sen } \alpha \tag{5}$$

(F_{gx} es la proyección de la componente de F_g en la dirección X)

y

$$f_r = \mu N. \tag{6}$$

Para determinar la normal, apliquemos la segunda ley de Newton conociendo que en la dirección Y la aceleración es nula, o sea, $a_y = 0$

$$\sum \vec{F_y} = m\vec{a_y}$$

$$\vec{N} + \vec{F_{gy}} = m\vec{a_y}.$$

Proyectando sobre el eje Y, y adaptando a las condiciones del problema, resulta:

$$N - F_{gy} = 0,$$

pero $F_{gy} = mg \cos \alpha$ (F_{gy} es la proyección de la componente de F_g en la dirección Y), luego:

$$N = mg \cos \alpha. \tag{7}$$

Con el sistema de ecuaciones integrado por (2), (4a), (5), (6) y (7), podemos dar solución al problema, de la forma siguiente. Si sustituimos (7) en (6), tenemos:

$$f_r = \mu\, mg \cos \alpha \tag{8}$$

y al sustituir (8) y (5) en (4a), resulta:

$$ma_x = mg \text{ sen } \alpha - \mu\, mg \cos \alpha$$
$$ma_x = mg (\text{sen } \alpha - \mu \cos \alpha)$$
$$a_x = g (\text{sen } \alpha - \mu \cos \alpha). \tag{9}$$

Y si se sustituye (9) en (2), obtenemos la solución:

$$s_x = \frac{1}{2} g (\text{sen } \alpha - \mu \cos \alpha)\, t^2$$

$$t^2 = \frac{2\, s_x}{g(\text{sen } \alpha - \mu \cos \alpha)}$$

$$t = \sqrt{\frac{2\, s_x}{g (\text{sen } \alpha - \mu \cos \alpha)}}$$

Sustituyendo, resulta:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}5 \text{ m}}{9{,}8 \text{ m/s}^2 (0{,}5 - 0{,}4 \cdot 0{,}86)}}$$

$$t = 1{,}4 \text{ s.}$$

El bloque emplea un tiempo de 1,4 s, en recorrer la longitud del plano desde su extremo superior hasta su base.

5. Dos carros, 1 y 2, de masas $m_1 = 2$ kg y $m_2 = 3$ kg, respectivamente, se encuentran en reposo sobre una superficie horizontal dura. Los carros están unidos mediante un hilo inextensible y de masa despreciable (fig. 3.41). Si sobre el carro 1 se aplica una fuerza F de valor 20 N, tal como se indica en la figura, y considerando despreciable las masas de las ruedas de los carros, calcula:

a) el valor de la aceleración con que se mueve el carro 2;
b) el valor de la tensión en el hilo que vincula a los carros.

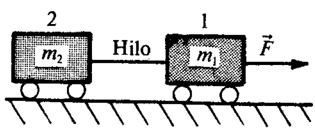


Fig. 3.41

Solución

Los carros 1 y 2, cuyas masas m_1 y m_2 son conocidas, están vinculados por una cuerda inextensible, lo cual significa que ambos se moverán sin cambiar la distancia que los separa, o sea, se comportan como si fueran un cuerpo único con una masa igual a $m_1 + m_2$. Esto significa que en cada instante se moverán con la misma velocidad y aceleración, si la hubiera.

Como la superficie se considera dura, no existe posibilidad de movimiento en la dirección vertical. Para precisar esto, tracemos el sistema de referencia con su origen en la posición que ocupa el punto material representativo de 2, tal como se muestra en la figura 3.42a.

Las fuerzas que actúan sobre el sistema son: las fuerzas de gravedad $\vec{F}_{g_1}$ y $\vec{F}_{g_2}$, las fuerzas normales a la superficie $\vec{N}_1$ y $\vec{N}_2$ y la fuerza $\vec{F}$ de 20 N, que es la única capaz de provocar el movimiento acelerado del sistema de cuerpos. Entre ambos cuerpos actúan las tensiones $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$. Al halar el carro 1 con una fuerza $\vec{F}$, este tira de la cuerda con la fuerza $\vec{T}_1$ y por reacción, sobre el carro 2 actúa la fuerza $-\vec{T}_1$. Mediante el hilo, sobre este actúa la fuerza $\vec{T}_2$ provocada por el hilo y, por reacción del bloque, sobre el hilo actúa la fuerza $-\vec{T}_2$ (fig. 3.42b).

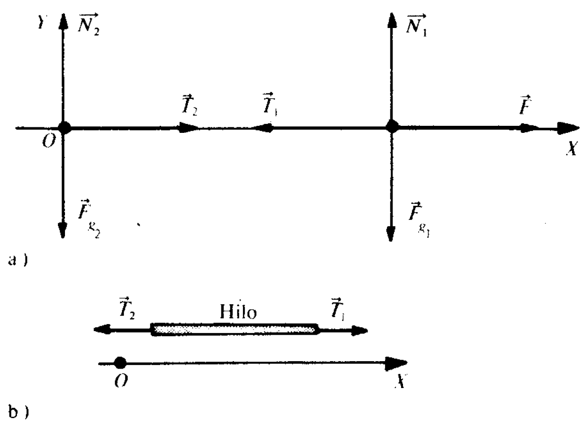


Fig. 3.42

Se pide que calculemos la aceleración con que se mueve el carro 2 y el valor de la tensión en el hilo.

Datos	*Incógnitas*
$m_1 = 2$ kg	*a)* $a = ?$
$m_2 = 3$ kg	b) $T_1 = T_2 = ?$
$F = 20$ N	

a) Para calcular la aceleración del carro 2, calcularemos la aceleración del conjunto, ya que este se mueve como un todo. La aceleración la calculamos a partir de la segunda ley, o sea:

$$\sum \vec{F_x} = m\vec{a_x}$$
$$F_x = (m_1 + m_2)\, a_x.$$

Proyectando y adecuando a las condiciones del problema:

$$a_x = \frac{F_x}{m_1 + m_2}. \qquad (1)$$

Sustituyendo por sus valores numéricos las magnitudes de la ecuación (1), tenemos:

$$a_x = \frac{20 \text{ N}}{2 \text{ kg} + 3 \text{ kg}}$$

$$a_x = 4 \text{ m/s}^2.$$

La aceleración del sistema, o sea, de cada uno de los bloques, es de 4 m^2.

b) Para calcular el valor de la tensión T_2 aplicaremos la segunda ley al carro 2, o sea:

$$\sum \vec{F_{x_1}} = m_2\, \vec{a_x}$$
$$\vec{T_2} = m_2\, \vec{a_x}.$$

Proyectando sobre el eje *X*, se obtiene:

$$T_2 = m_2\, a_x. \qquad (2)$$

Con las ecuaciones (1) y (2) se resuelve el problema; no obstante, determinaremos adicionalmente el valor de la tensión T_1 para comprobar que $T_1 = T_2$. Para esto aplicaremos la segunda ley al carro 1, o sea:

$$\sum \vec{F_{x_1}} = m_1\vec{a_x}$$
$$\vec{F_x} + \vec{T_1} = m_1\vec{a_x}.$$

Proyectando y adecuando a las condiciones del problema esta ecuación, tenemos:

$$F_x - T_1 = m_1 a_x. \qquad (3)$$

Sustituyendo por sus valores numéricos las magnitudes de las ecuaciones (2) y (3), tenemos:

$$T_2 = m_2 a_x$$
$$T_2 = 3\ \text{kg} \cdot 4\ \text{m/s}^2$$
$$T_2 = 12\ \text{N}$$
$$F_x - T_1 = m_1 a_x$$
$$T_1 = F_x - m_1 a_x$$
$$T_1 = 20\ \text{N} - 2\ \text{kg} \cdot 4\ \text{m/s}^2$$
$$T_1 = 12\ \text{N}.$$

b) La tensión en el hilo es de 12 N.

6. En la figura 3.43 se muestra un carro de masa m_1 que se encuentra sobre una mesa horizontal lisa. El carro está vinculado mediante un hilo inextensible y de masa despreciable, a un bloque de masa m_2. Si las masas de las ruedas y la polea son despreciables, calcula:

a) la distancia que recorre el carro un tiempo t después de ponerse en movimiento;
b) qué valor tiene la tensión en el hilo.

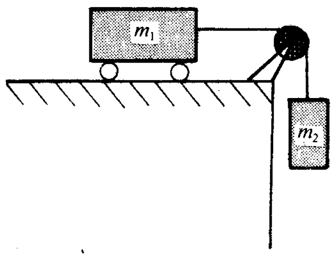


Fig. 3.43

Solución

Nos encontramos en un caso similar al del problema anterior; ambos cuerpos, el carro y el bloque, de masas conocidas están vinculados por medio de un hilo inextensible. Esto determina que la distancia relativa entre los cuerpos no cambie y, en consecuencia, que se muevan como un cuerpo único, de masa igual a $m_1 + m_2$.

Teniendo en cuenta que los cuerpos se mueven en dos direcciones, ubiquemos el sistema de referencia con su origen en la posición correspondiente al punto material representativo del carro, con el eje X orientado en la dirección y sentido del posible movimiento del carro y el eje Y orientado hacia abajo (fig. 3.44).

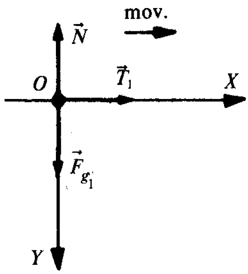


Fig. 3.44

Sobre el carro actúan: la fuerza de gravedad $\vec{F}_{g\,1}$, la reacción de la superficie $\vec{N}_1$ y la tensión $\vec{T}_1$ provocada por la cuerda.

Sobre el bloque actúan: la fuerza de gravedad $\vec{F}_{g_2}$ y la reacción de la cuerda a la tensión provocada por el bloque, o sea, $\vec{T}_2$ (fig. 3.45).

Sobre la cuerda actúan las fuerzas $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$, la reacción del carro y la tensión provocada por el bloque, respectivamente.

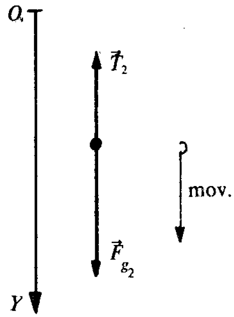


Fig. 3.45

Como en este caso la fuerza de rozamiento es despreciable, la única fuerza que determina el movimiento del conjunto es la fuerza de gravedad $\vec{F}_{g_2}$, que actúa sobre el bloque. Por causa de esta fuerza, el sistema se moverá aceleradamente. En este caso, como en el anterior, $T_1 = T_2$.

Se pide que determinemos la distancia que recorre el carro en el intervalo t, y el valor de la tensión en el hilo. Los datos están expresados, en todos los casos, en forma literal, lo cual nos obliga a obtener las soluciones en esa forma.

Datos	*Incógnitas*
m_1	a) $s_x = ?$
m_2	b) $T_1 = T_2 = ?$
g	
$v_0 = 0$	
$s_0 = 0$	

a) Para determinar la posición del carro en el instante t, o sea, la distancia recorrida en este tiempo, con respecto al sistema de referencia seleccionado, utilizaremos la ecuación general del desplazamiento para el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, o sea:

$$\vec{s} = \vec{s_0} + \vec{v_0}t \frac{1}{2} \vec{a}t^2.$$

Proyectando los vectores sobre el eje X y adecuando la ecuación a los datos, resulta:

$$s_x = \frac{1}{2} a_x t^2. \qquad (1)$$

Como nos hace falta la aceleración a_x que actúa sobre el carro, que es la misma del sistema, aplicaremos la segunda ley al carro, es decir:

$$\sum \vec{F_x} = m_1 \vec{a}$$

cuya proyección en el eje X tiene la forma:

$$T_1 = m_1 a_x. \qquad (2)$$

Como $T_1 = T_2$, el valor de T_1 se puede obtener aplicando la segunda ley al bloque, es decir,

$$\sum \vec{F} = m_2 \vec{a_1}$$

cuya proyección en el eje Y tiene la forma:

$$F_g - T_2 = m_2 a_y.$$

Como $T_2 = T_1$ y $a_y = a_x$, entonces:

$$F_g - T_1 = m_2 a_x,$$

por tanto:

$$T_1 = F_g - m_2 a_x. \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2), tenemos:

$$F_g - m_2 a_x = m_1 a_x.$$

Despejando a_x, y teniendo en cuenta que $F_g = m_2 g$, obtenemos que:

$$a_x = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g. \quad (4)$$

Sustituyendo (4) en (1), obtenemos finalmente que:

$$s_x = \frac{1}{2}\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} g\right) t^2.$$

b) La tensión en el hilo se puede obtener sustituyendo (4) en (2):

$$T_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

7. En la figura 3.46 se representa un cuerpo que desciende por un plano inclinado y luego continúa por un plano horizontal hasta detenerse en el punto C. Si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y la superficie es de 0,5 en ambos planos, y el cuerpo parte del reposo (punto A), determina la distancia recorrida en el plano horizontal.

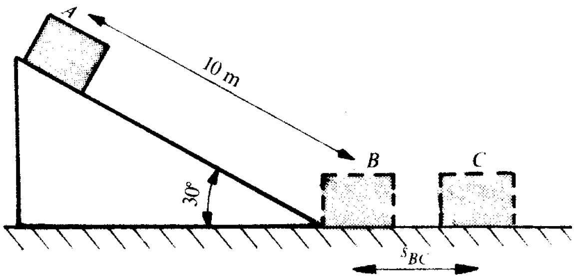


Fig. 3.46

Solución

Para calcular la distancia recorrida en el plano horizontal s_{BC}, es necesario utilizar una ecuación que relacione la distancia recorrida con algunas magnitudes conocidas. Como sabes del capítulo 2, hay varias ecuaciones:

$$s = \frac{v + v_0}{2} \cdot t, \qquad s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2,$$

$$v^2 = v_0{}^2 + 2\,as.$$

Dadas las condiciones del problema la más conveniente será la ecuación:

$$v^2 = v_0^2 + 2\,as,$$

donde, despejando s, se tiene:

$$s = \frac{v^2 - v_0^2,}{2\,a}$$

ecuación que para nuestro caso se puede escribir como:

$$s_{BC} = -\frac{v_{0B}^2}{2\,a_h}, \tag{1}$$

pues la velocidad final (punto C) es cero, v_{0B} es la velocidad en el punto B y a_h es la aceleración en el plano horizontal. Sin embargo, no conocemos los valores v_{0B} y a_h. Comenzaremos por determinar v_{0B}, es decir, la velocidad con que el cuerpo llega a la base del plano.

Para calcular esta velocidad podemos utilizar las ecuaciones:

$v = v_0 + at$ o $v^2 = v_0^2 + 2\,as.$

Dadas las condiciones del problema, la más conveniente es:

$v^2 = v_0^2 + 2\,as.$

Como por dato $v_0 = 0$ y sabemos que $v = v_{0B}$:

$$v_{0B}^2 = 2\,a\,s_{AB} \tag{2}$$

donde:

a es la aceleración del cuerpo durante el tiempo que está bajando el plano;

s_{AB}, la longitud del plano cuyo valor se da en la figura 3.46.

Por tanto, para calcular v_{0B}^2 sólo es necesario calcular a.

Los pasos para la determinación de a no resultan ya desconocidos para ti; procederemos como hicimos en el problema 2. Construyamos el diagrama de fuerza (fig. 3.47).

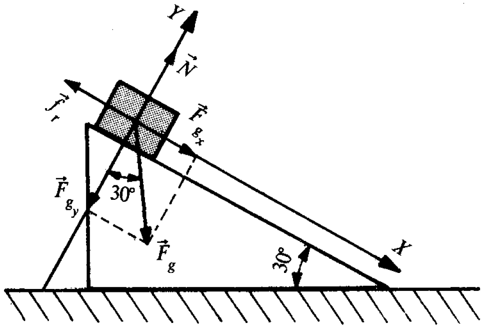


Fig. 3.47

Eje Y

$$\sum \vec{F}_y = \vec{N}_1 + \vec{F}_{gy} = 0,$$

Por tanto:

$$\vec{N}_1 + \vec{F}_{gy} = 0$$

$$N_1 - F_{gy} = 0$$

$$N_1 = F_{gy} = mg \cos 30° \quad (3)$$

Eje X

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{gx} + f_r}{m}$$

$$a = \frac{F_{gx} - f_r}{m}$$

$$a = \frac{mg \text{ sen } 30° - \mu N_1.}{m} \qquad (4)$$

Sustituyendo la ecuación (3) en (4), se tiene:

$$a = \frac{mg \text{ sen } 30° - \mu\, mg \cos 30°}{m}$$

y sacando mg factor común y simplificando m, queda:

$$a = (\text{sen } 30° - \mu \cos 30°)\, g. \qquad (5)$$

Sustituyendo en la ecuación (2) el valor de a dado, se tiene:

$$v_{0B}^2 = 2\, (\text{sen } 30° - \mu \cos 30°)\, g \cdot s_{AB}. \qquad (6)$$

Sustituyendo este valor de v_{0B}^2 en la ecuación (1):

$$s_{BC} = \frac{-2(\text{sen } 30° - \mu \cos 30°)g\, s_{AB}}{2a_h},$$

de donde:

$$s_{BC} = \frac{-(\text{sen } 30° - \mu \cos 30°)\, g\, s_{AB}}{2\, a_h}.$$

Ahora solo nos resta calcular a_h, para ello podemos proceder como en los casos anteriores. Sabemos que en el plano horizontal, sobre el cuerpo, actúan la fuerza de gravedad, la normal y la fuerza de rozamiento; de ahí que el diagrama de fuerzas sea el representado en la figura 3.48.

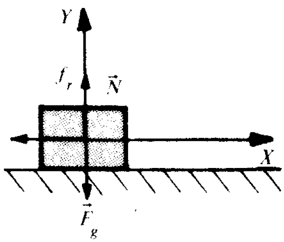


Fig. 3.48

Eje Y

$$\sum \vec{F}_y = \vec{N} + \vec{F}_g = 0$$
$$\therefore\ \vec{N}_1 + \vec{F}_g = 0$$

En proyecciones

$$N - F_g = 0$$
$$N = F_g = mg. \qquad (8)$$

Eje X

$$\vec{a_h} = \frac{\vec{f_r}}{m}$$

$$a_h = \frac{-fr}{m} = \frac{-\mu N}{m}. \qquad (9)$$

Sustituyendo el valor de N dado en (8), en la ecuación (9), se tiene que:

$$a_h = \frac{-\mu\, mg}{m} = -\mu\, g$$

y sustituyendo este valor de a_h en la ecuación (1), obtenemos:

$$s_{BC} = \frac{\cdot\ -(\text{sen } 30° - \mu \cos 30°)}{-\mu g}\, g\, s_{AB}$$

simplificando g y el signo menos, se tendrá:

$$s_{BC} = \frac{(\text{sen } 30° - \mu \cos 30°)\, s_{AB}}{\mu}$$

$$s_{BC} = \frac{[(0{,}5) - (0{,}5)\,(0{,}8)]\ 10 \text{ m}}{0{,}5}$$

$$s_{BC} = \frac{(0{,}5 - 0{,}4) \cdot 10 \text{ m}}{0{,}5} = 2 \text{ m}.$$

La razón de que se haya escogido la ecuación $v^2 = v_0^2 + 2\,a\,s$ para calcular la distancia entre los puntos B y C radica en que si se escoge $s = \dfrac{v + v_0}{2}\,t$, o $s = v_0 t + \dfrac{1\ at^2}{2}$ hubiera hecho falta determinar el tiempo que demoró el cuerpo en recorrer la distancia que separa los puntos B y C, para lo cual es necesario calcular primero la aceleración; eso hubiera hecho más complicada y larga la resolución de este problema. La causa de que se escogiera $v^2 = v_0^2 + 2\,as$ y no $v = v_0 + at$ para calcular la velocidad en la base del plano son dos: la primera es que con la ecuación desechada es necesario conocer el tiempo, y la segunda que con ella se encuentra v, y lo que se necesitaba era v^2.

3.8 *Límite de validez de las leyes de Newton*

Al resolver los problemas de dinámica, hemos aplicado las leyes de Newton sin detenernos a pensar si ellas son válidas en todos los casos. Tampoco se ha tenido en cuenta si el sistema de referencia en el que analizamos el movimiento de los cuerpos puede influir al operar con dichas leyes, o si los valores de las velocidades a las que se mueven los cuerpos, pueden limitar la aplicación de ellas. Incluso hemos hablado de cuerpos, carros, planos, bloques y los hemos considerado implícitamente como puntos materiales que como resultado de las interacciones solo experimentan variaciones en su movimiento de traslación. Veremos ahora si siempre son válidas las leyes de Newton y bajo qué condiciones son aplicables.

Sistemas de referencia inerciales y no inerciales

Conocemos que para estudiar el movimiento de un cuerpo resulta necesario seleccionar un sistema de referencia, con respecto al cual podemos determinar su posición y velocidad en cada instante de tiempo. Hemos considerado que en el sistema de referencia seleccionado, las dos ideas fundamentales de la mecánica de Newton se cumplen, es decir:

Si sobre un cuerpo no actúan fuerzas o la resultante de todas las fuerzas es nula, el cuerpo mantendrá su estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme invariablemente, y la segunda idea consiste en que solamente podemos hablar de fuerza cuando dos o más cuerpos interactúan y ellas son las únicas causantes de los cambios del estado de movimiento en los cuerpos.

Pero, ¿son siempre correctas estas ideas?

Para responder a esta pregunta realicemos el siguiente experimento: sobre un carro que se encuentra sobre la superficie horizontal de una mesa situamos en el extremo derecho un carro más pequeño (fig. 3.49a).

En el extremo de la izquierda fijamos un tope y en este colocamos una banderilla que indica la posición de un observador A situado en un sistema de referencia fijo al carro.

Sobre la superficie de la mesa y exactamente frente al carro más pequeño situemos una segunda banderilla que indica la posición de un observador B situado en el sistema de referencia fijo a la Tierra.

Si aplicamos una fuerza al carro, este comenzará a moverse aceleradamente con respecto a la mesa. Los acontecimientos que se producen a partir de este instante serán explicados de forma muy distinta por los observadores A y B.

El observador B (fig. 3.49b), fijo a la mesa, verá que el carro pequeño mantiene su posición con respecto a él, mientras que el carro mayor se mueve aceleradamente hacia la derecha. Este observador argumentará que todo ocurre tal como establecen las leyes de Newton; el cuerpo mayor adquiere una aceleración, la cual se puede calcular mediante la expresión $a = \dfrac{F}{M}$ y el carro más pequeño conserva su estado de reposo, pues sobre él no existe una fuerza resultante ya que la fuerza de gravedad F_g se compensa con la nor-

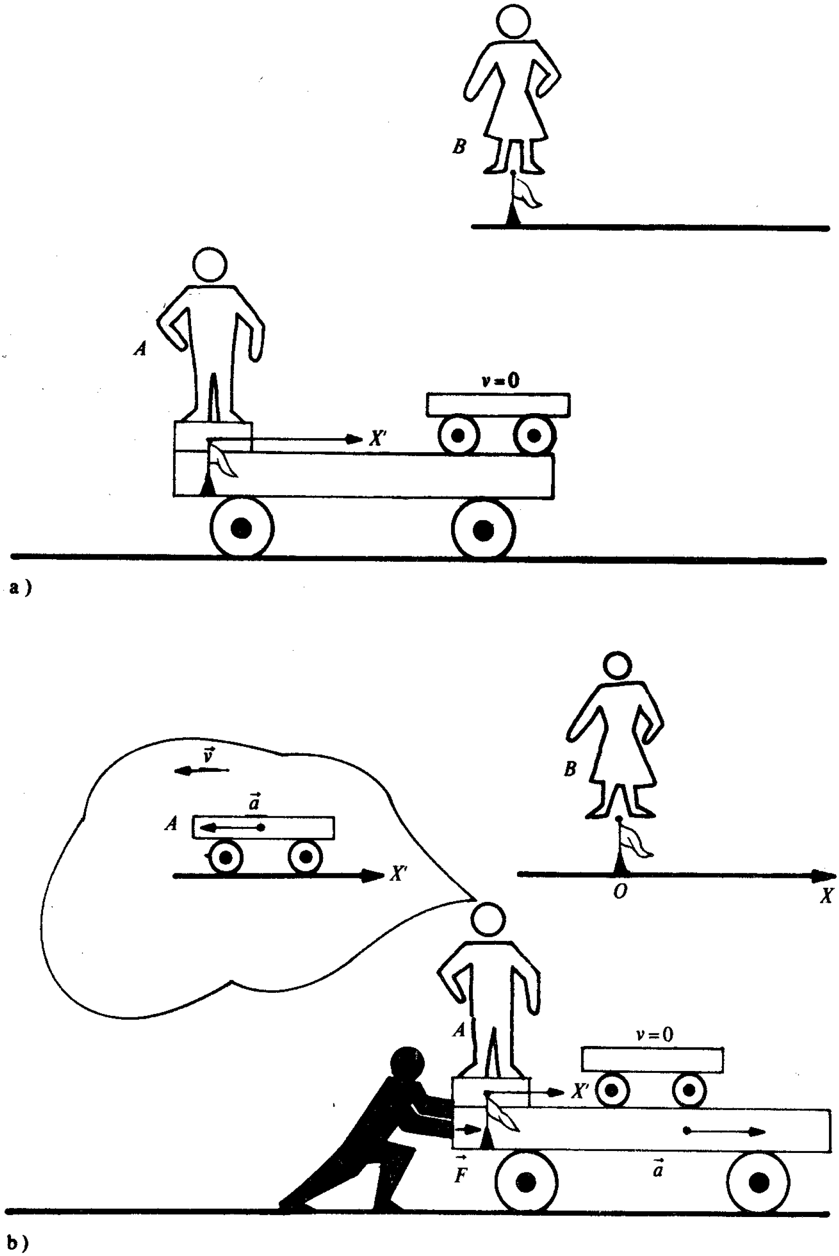


Fig. 3.49

mal *N*. Dirá, además, que esto transcurre así, hasta que el tope del extremo izquierdo choque contra el carro menor y lo haga moverse junto con él, ya que producto de esta interacción, el carro pequeño adquirirá una aceleración que le haga variar su estado de reposo.

El observador *A* analiza el fenómeno de modo diferente. Él observa que inmediatamente después de iniciado el movimiento del carro, al cual está fijo, el carro pequeño comenzará a moverse hacia él con cierta aceleración. Expresará que desde su punto de vista y teniendo en cuenta las dos ideas básicas de la mecánica no es explicable el fenómeno, ya que el carro pequeño adquiere una aceleración y, por consiguiente, modifica su estado de reposo aun cuando sobre él no actúa fuerza resultante alguna y podrá concluir que las leyes de la mecánica no son válidas. ¿Cuál de ellos tiene razón?

Ambos observadores tienen razón y ello se debe a que la validez o no de las leyes de la mecánica dependen del sistema de referencia en que se analizan. Las leyes de Newton solo se cumplen en determinados sistemas de referencia que reciben el nombre de *sistemas de referencia inerciales*. Por otra parte, ellas no se cumplen en los sistemas de referencia acelerados que reciben el nombre de *sistemas de referencia no inerciales*.

¿Qué condiciones debe cumplir un sistema de referencia para ser inercial?

¿Es la Tierra un sistema de referencia inercial?

Un sistema de referencia es inercial cuando en este, el estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme de un cuerpo se mantiene mientras sobre él no actúan otros cuerpos o las acciones están compensadas.

Considerar la Tierra como un sistema inercial es solo una buena aproximación pues a causa de su rotación, ella constituye un sistema acelerado; sin embargo, como su velocidad angular es pequeña (0,000072 rad/s), la rotación terrestre causará desviaciones de escasa significación, ya que su aceleración es despreciable para nuestro estudio (recuerda que $a = \omega^2 r = 3.4 \cdot 10^{-4} m/s^2$).

Podemos pues, considerar la Tierra como un sistema inercial sin cometer un error apreciable. El hecho de que las leyes del movimiento fueran establecidas empleando a la Tierra como sistema de referencia prueba la anterior afirmación.

No solo los sistemas de referencia acelerados ejercen una influencia manifiesta en el no cumplimiento de las leyes de Newton, la velocidad conque se mueven los cuerpos, también puede ejercer una influencia notable. En todos los casos en los que hemos utilizado la segunda ley $\vec{F} = m\vec{a}$, hemos considerado que la masa del cuerpo no varía con la velocidad, pero esto no es rigurosamente cierto. En realidad, la masa de los cuerpos aumenta al aumentar la velocidad.

La teoría de la relatividad especial formulada en 1905 por A. Einstein establece que la masa de los cuerpos depende de la velocidad según la relación siguiente:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_2}{c_2}}}$$

donde:

m_0 es la masa en reposo del cuerpo;
v, su velocidad;
c, la velocidad de la luz.

De la expresión anterior se deduce que la masa m aumenta al aumentar su velocidad v. Un aumento considerable de la masa del cuerpo solo se logra a velocidades cercanas a la velocidad de la luz ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s). No obstante, en los fenómenos cotidianos la mayoría de los cuerpos nunca se mueven a velocidades que superan los centenares de kilómetros por hora. Los cuerpos más veloces que se han construido por el hombre, son los satélites artificiales y naves cósmicas, que no sobrepasan los 30 km/s. A esta velocidad y a las que se mueven los cuerpos con los que nos relacionamos diariamente en la naturaleza, incluidos los celestes, la masa se puede considerar constante, o sea, independiente de la velocidad, en consecuencia, no afectan el cumplimiento de las leyes de Newton.

¿Se pueden aplicar las leyes de Newton a un cuerpo que no podemos considerar punto material?

Al utilizar las leyes de Newton, siempre se han considerado a los cuerpos como puntos materiales. Este convenio simplifica el tratamiento dinámico del problema, porque permite suponer aplicadas en un mismo punto, todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y en consecuencia considerar solo su movimiento de traslación. Esta misma consideración se tuvo en cuenta durante todo el estudio de la cinemática.

No obstante, en la práctica cotidiana, al analizar el movimiento de los cuerpos reales, es necesario tener presente que no siempre se puede despreciar sus dimensiones y considerarlo como un punto. ¿Significa esto que las leyes estudiadas no se pueden utilizar durante el análisis del movimiento de los cuerpos reales?

Para dar solución a esta interrogante, circunscribimos nuestro estudio a un cuerpo que consideramos como sólido perfecto o cuerpo rígido. Este modelo de cuerpo sólido se caracteriza por ser no deformable, o sea, que la distancia que separa dos cualesquiera de las partículas que lo integran no varía, aun cuando sobre él se apliquen fuerzas de cualquier valor. En general, todos los cuerpos son deformables, y el grado en que lo son, depende de la sustancia de que están formados, de su configuración geométrica y del valor de la fuerza que actúa sobre ellos; por ejemplo, una esfera de acero resiste fuerzas de gran intensidad, sin sufrir deformaciones apreciables; este cuerpo se puede considerar un sólido rígido, cuando se somete a la acción de fuerzas de valores no muy grandes.

En dependencia del punto de aplicación y de la dirección en que actúe una fuerza sobre un sólido, este, además de trasladarse, puede adquirir un movimiento de rotación. Por ejemplo, en las situaciones representadas en la figura 3.50 a y b, donde la fuerza está aplicada en dirección paralela a uno de los lados del cuerpo y próxima a uno de sus extremos, el cuerpo se traslada y rota.

En el caso de las situaciones representadas en la figura 3.50c y d, donde la fuerza tiene la misma dirección que en las situaciones anteriores, pero está aplicada en el punto medio de uno de sus lados, el cuerpo solamente se traslada. En la situación representada en la figura 3.50 e, donde la fuerza actúa oblicuamente respecto a los lados del cuerpo y el punto de aplicación se encuentra en uno de sus extremos, el cuerpo solamente se traslada.

Mediante experimentos sencillos se puede demostrar que las distintas direcciones de acción de las fuerzas que provocan solo movimiento de traslación de un cuerpo, se cortan todos en un punto. Este punto se denomina *centro de masa del cuerpo.*

Cuando sobre un cuerpo cualquiera se aplica una fuerza cuya dirección de acción pasa por su centro de masa, el cuerpo adquiere un movimiento de traslación.

En este caso el cuerpo se mueve como si en el centro de masa estuviese concentrada toda su masa y las leyes de la cinemática y

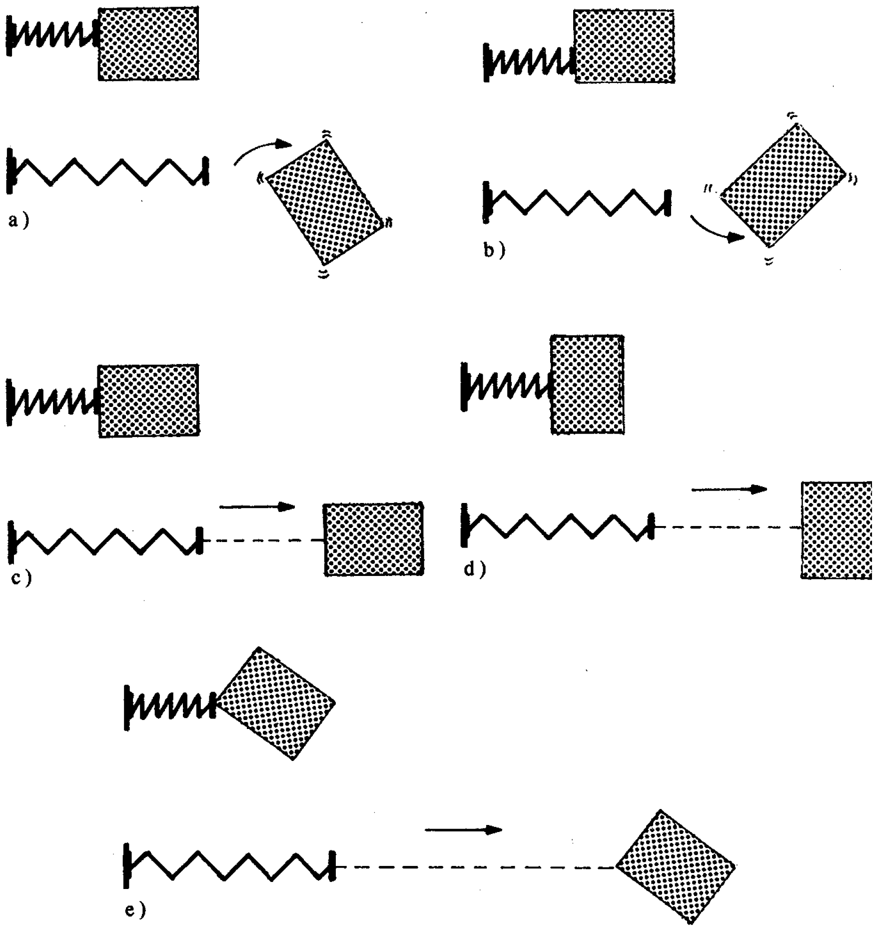


Fig. 3.50

de la dinámica analizados sobre la base del punto material, son aplicables al cuerpo en cuestión.

La posición del centro de masa de un cuerpo depende de la forma en que está distribuida su masa, e incluso no tiene que estar localizado en el cuerpo, así por ejemplo, en el caso de un anillo homogéneo, su centro de masa coincide con el centro geométrico del anillo.

En la figura 3.51 se muestra la posición del centro de masa de un grupo de cuerpos de forma geométrica regular.

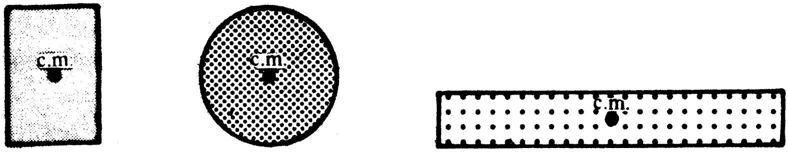


Fig. 3.51

Tareas

54. Analiza y discute el extracto del libro de Galileo Galilei *Diálogo acerca de los sistemas del mundo:*
"Enciérrese con un amigo en una sala bajo la cubierta de una gran nave; introduzca allí moscas, mariposas y otras criaturas voladoras; que allí también haya una gran vasija llena de agua con pecesitos; del techo cuelgue un centro del que, gota a gota, caiga el agua en otra vasija, situada debajo.
Mientras la nave está parada, observe que todas las criaturas voladoras seguirán volando con igual velocidad por toda la habitación, los pecesitos seguirán nadando indiferentemente a todas direcciones; las gotas irán cayendo todas a la vasija de abajo; y usted al lanzar una cosa cualquiera a su amigo no necesitará lanzarla con más fuerza en una dirección que en otra, siempre que las distancias sean idénticas. Observe todo lo más cuidadosamente posible (aunque no hay ninguna duda de que debe ser así, en tanto la nave no se mueva) y después ordene poner en movimiento la nave con la velocidad que desea. He aquí (siempre que el movimiento sea uniforme y no oscilante de un lado a otro) que usted no advertirá ni una mínima alteración en todos los citados fenómenos; y ninguno de ellos le permitirá juzgar si se mueve o si está inmóvil".

55. Di si la siguiente afirmación es cierta. Argumenta tu respuesta. "Si las leyes de Newton son válidas con respecto a determinado sistema de referencia, también serán válidas con respecto a cualquier otro sistema de referencia que se mueva rectilínea y uniformemente con respecto al primero".

56. Sobre una mesa descansa una pelota. Alguien desplaza la mesa y la pelota se pone en movimiento. Indica el cuerpo de referencia respecto del cual es justa en este caso la ley de inercia y el cuerpo de referencia con relación al cual dicha ley no se cumple.

57. ¿Se podrá determinar la velocidad de movimiento y la aceleración de un barco estando en un camarote con la ventanilla cerrada y observando un péndulo suspendido del techo del camarote?

58. Define con tus palabras el concepto *centro de masa*. En la figura 3.51 señala 3 líneas a lo largo de las cuales debe actuar una fuerza para provocar el movimiento de traslación de los cuerpos siguientes: del cilindro, de la varilla y del anillo.

59. Tarea experimental: a) Determina la posición aproximada del centro de masa de una goma de borrar de forma de paralelepípedo. Haz la planificación del experimento teniendo en cuenta que solo cuentas con la goma y tus manos.
b) Repite el experimento y describe las condiciones bajo las cuales la goma rota al aplicarle fuerzas. ¿Alrededor de qué punto rota la goma?

Tareas generales del capítulo

1. En los siguientes ejemplos di si actúa o no la fuerza de rozamiento. Representa las situaciones descritas y argumenta tu respuesta.
   a) Un cuerpo se encuentra apoyado sobre una superficie horizontal en reposo y sin que sobre él actúe ninguna acción que trate de sacarlo de ese estado.
   b) El mismo caso del inciso anterior, pero con una fuerza aplicada tratándolo de mover sin lograrlo.
   c) Un cuerpo que se desliza por una superficie horizontal.
   d) Una caja de fósforos que se halla apoyada y en reposo sobre la superficie de un libro que está inclinado con respecto al plano horizontal.
   e) La misma situación del inciso anterior, pero ahora la caja se desliza.

2. En la figura 3.52 se representa un cuerpo de 2 kg de masa, sobre el cual actúan las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ perpendiculares entre sí y cuyos valores son de 3 N y 4 N, respectivamente. Calcula el valor de la aceleración y represéntalo en la figura tomando como escala 1 cm: $1 m/s^2$.

3. Dos vagones de ferrocarril de masas diferentes se mueven por vías paralelas con igual velocidad. Si sobre ellos comienzan a ac-

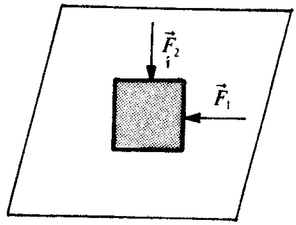


Fig. 3.52

tuar fuerzas de frenado de igual valor, ¿cuál de ellos se detendrá primero?

4. Dos jóvenes, *A* y *B*, cuyas masas son de 40 kg y 60 kg, respectivamente, patinan sobre una superficie de granito. Uno de los jóvenes se separa del otro empujándolo con una fuerza de 12 N, ¿qué aceleración adquiere cada uno de ellos?
5. Dos botes de distintas masas se encuentran en aguas tranquilas. Los tripulantes de ambos botes comienzan a tirar de una soga que los une. ¿Cuál de los botes adquiere una velocidad de mayor valor, si al comenzar a tirar de la soga ambos se encontraban en reposo? Explica.
6. Un remolcador hala la patana con una fuerza *F*. ¿Por qué razón, si la patana hala al remolcador con una fuerza de igual valor y dirección, pero en sentido contrario, ambos se mueven en el mismo sentido?
7. ¿Cuál de los dos carritos *A* o *B* representados en la figura 3.53 llegará más rápidamente al extremo de la mesa? Considera idénticas las masas de los carritos y desprecia la fricción.

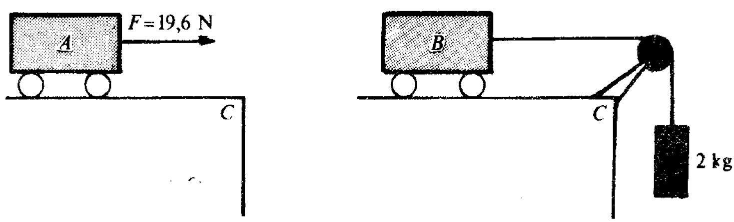


Fig. 3.53

8. Bajo la acción de una fuerza determinada, un carrito, moviéndose a partir del reposo, recorre una distancia de 40 cm. Cuando sobre el carrito se coloca un cuerpo de 20 g y se le aplica la misma fuerza, este recorre, a partir del reposo, una distancia de 20 cm en el mismo tiempo. Calcula la masa del carrito.

9. Un cuerpo que tiene una masa de 20 g se coloca en un plano horizontal rígido y liso. Si se le aplica una fuerza de $4 \cdot 10^{-3}$ N paralela al plano, ¿qué aceleración adquiere el cuerpo?, ¿qué valor tiene la fuerza que ejerce el cuerpo sobre la mesa?

10. Un cuerpo de 50 kg de masa está sobre una superfcie horizontal de coeficiente de rozamiento igual a 0,2, y se le aplica:
    a) una fuerza de 120 N paralela a la superficie;
    b) una fuerza de 24 N que forma un ángulo de 30° con la horizontal.

    En cada caso calcula el valor de la aceleración adquirida y di qué harías para calcular la velocidad alcanzada y la distancia recorrida en un tiempo dado si al inicio la velocidad era cero.

11. El valor de la velocidad de un vehículo de 520 kg de masa que se mueve por una recta, aumenta uniformemente de 4 m/s a 12 m/s en 4 s. ¿Qué valor tendrá la fuerza neta que actúa sobre él?

12. Un hombre empuja por una superficie horizontal y lisa, dos bloques de masa $m_A = 20$ kg y $m_B = 40$ kg, dispuestos como se representa en la figura 3.54, con una fuerza de valor igual a 30 N y cuya dirección y sentido están representados.

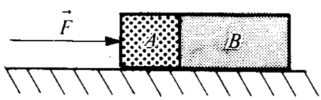


Fig. 3.54

a) Calcula el valor de la aceleración adquirida por los bloques.
b) Calcula el valor de la fuerza que el bloque A ejerce sobre el B.
c) Calcula el valor de la resultante de la fuerza que actúan sobre el bloque A.
d) Si el hombre, a partir del reposo, está 2 s empujando los bloques, y después los deja libres, ¿qué distancia recorrerán estos al cabo de 10 s?

13. Una caja de madera de 25 kg cae desde un camión que viaja a 90 km/h. Si el coeficiente de rozamiento por deslizamiento entre la madera y el pavimento es 0,48, ¿qué distancia deslizará la caja sobre el pavimento hasta detenerse si este es horizontal?

14. El chofer de un automóvil que se mueve a 72 km/h desconecta el motor y rápidamente aplica los frenos. ¿Qué distancia recorrerá? Considera que el coeficiente de rozamiento es 0,2.

15. ¿Con qué velocidad se mueve un bote-motor si después de desconectar el motor, el bote recorre hasta detenerse 250 m? El coeficiente de rozamiento es 0,02. Supón el movimiento por un plano horizontal.

16. Si el coeficiente de rozamiento entre el bloque *A* y la superficie *C* (fig. 3.55) es 0,6, calcula el valor de la aceleración de los bloques *A* y *B*, y la tensión en la cuerda. Las masas de *A* y *B* son 20 kg y 30 kg, respectivamente. Desprecia la masa de la cuerda.

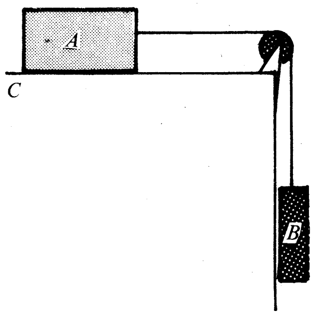


Fig. 3.55

17. El sistema representado en la figura 3.56 muestra dos cuerpos de masa m_1 = 0,8 kg y m_2 = 0,3 kg. Si el sistema parte del reposo, calcula las distancias recorridas por m_1 y m_2 al cabo de 4 s de iniciado el movimiento. Desprecia el rozamiento, la masa de las poleas y la de la cuerda.

18. Si el coeficiente de rozamiento dinámico de los bloques *A* y *B* respecto a la superficie en que se mueven es de 0,4 (fig. 3.57). Calcula el valor de la fuerza de gravedad sobre el bloque *C* para que la aceleración del sistema sea de 3 m/s^2, y la tensión en las cuerdas. Las masas de *A* y *B* son de 5 kg y 8 kg, respectivamente. Desprecia la masa y el rozamiento de las poleas.

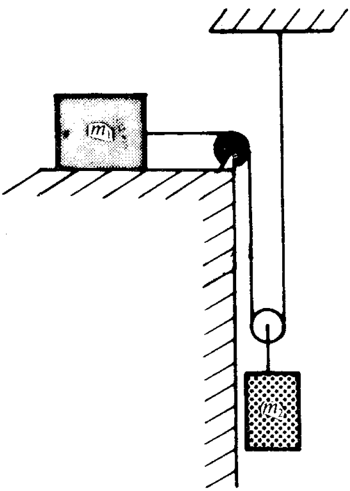


Fig. 3.56

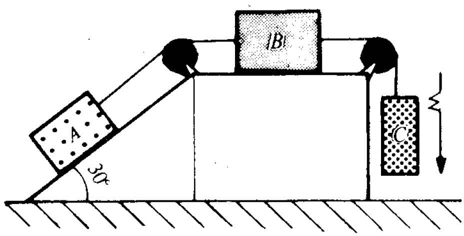


Fig. 3.57

19. Un cuerpo de 1,5 kg parte del reposo en la cima de una pendiente de 20° se desliza cuesta abajo y recorre una distancia de 400 m. ¿Cuál será su velocidad al llegar abajo si el coeficiente de rozamiento es de 0,03?

20. Un camión de carga de 10^4 kg de masa va cuesta abajo por una pendiente de 15°. ¿Qué fuerza aplicada por los frenos lo mantendrá a la velocidad constante de 45 km/h?

21. Demuestra que si un cuerpo baja un plano inclinado desplazándose con movimiento rectilíneo uniforme (MRU), entonces $\mu = \tan \alpha$, donde α es el ángulo de inclinación del plano y μ, el coeficiente de rozamiento dinámico.

22. En la figura 3.58 se representa un cuerpo que se ha deslizado por un plano inclinado, y luego por un plano horizontal hasta detenerse. Sabiendo que $v_0 = 0$ y $\mu = 0{,}4$, construye la gráfica de v en función de t a partir de que comenzó a moverse hasta que se detuvo.

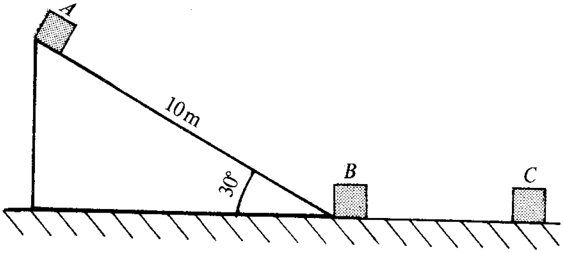


Fig. 3.58

23. Con una soga de 1m de largo se hace girar una piedra de 200 g. ¿Qué fuerza ejerce la soga sobre la piedra cuando la frecuencia es de 100 Hz?

24. ¿Cuál es la máxima velocidad que puede desarrollar un automóvil en una curva plana de 1 km de radio si el coeficiente de rozamiento entre las gomas y el pavimento es igual a 0,2?

25. Un cuerpo de masa m está sobre una mesa lisa y unido a otro que cuelga mediante una cuerda que pasa por un orificio en la mesa, tal y como se representa en la figura 3.59. Si el cuerpo de masa m describe una circunferencia de 20 cm de radio, la masa de este es de 50 g y la del cuerpo colgante es $M = 100$ g, determina la velocidad a que debe girar el cuerpo de masa m para que el cuerpo que cuelga permanezca en reposo.

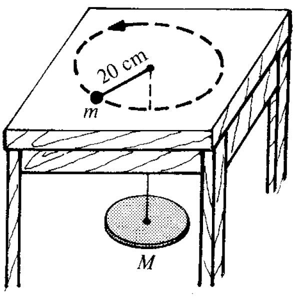


Fig. 3.59

26. En un disco que gira a la frecuencia constante de 78 rev/min, un pequeño cuerpo colocado sobre él permanece en reposo respecto al disco si su distancia al eje de rotación es inferior a 75 cm, pero si la distancia es mayor que esta, el cuerpo comienza a resbalar. Calcula el coeficiente de rozamiento estático.

27. Demuestra a partir de la segunda ley de Newton, que la velocidad angular, a la cual comienza a resbalar un cuerpo que se halla sobre un disco que gira, es:

$$\omega = \sqrt{\frac{g\mu_0}{R}}.$$

28. Considera que un ascensor se mueve verticalmente con una aceleración de 2 m/s^2 primero hacia arriba y, luego, hacia abajo; calcula en ambos casos el valor de la fuerza que ejerce sobre el piso del ascensor un objeto de 40 kg de masa.
¿Con qué aceleración debe bajar el ascensor para que la acción del cuerpo sobre el piso sea nula?

29. ¿Cómo podríamos bajar de un techo un objeto de 44,0 kg, usando una cuerda cuya resistencia a la ruptura es de solo 220 N sin que se caiga el objeto ni se rompa la soga?

30. Un cuerpo atado a una cuerda gira en un plano horizontal, como se indica en la figura 3.60. Determina la tensión de la cuerda y la velocidad de giro para que la cuerda forme un ángulo de 45° con la dirección vertical. Considera que la masa del cuerpo es de 20 kg y la longitud de la cuerda, 2,025 m.

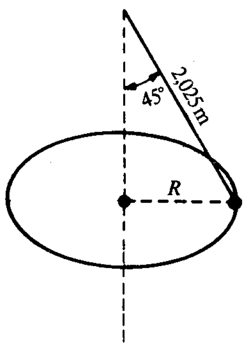


Fig. 3.60

31. En la figura 3.61 se representa un sistema de dos cuerpos unidos por una cuerda de masa despreciable que pasa por una polea sin rozamiento y de masa despreciable. Calcula la tensión en la cuerda y la velocidad del sistema al pasar por la posición que se representa en la figura si en el instante inicial ambos cuerpos estaban en reposo y a igual altura.

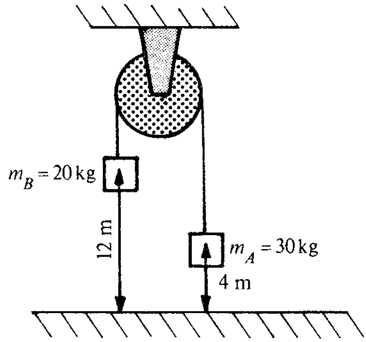


Fig. 3.61

Capítulo 4
LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

En este capítulo estudiaremos una de las leyes fundamentales de la naturaleza: la ley de gravitación universal, la cual tiene hoy día, una gran importancia, por ejemplo, para la puesta en órbita de satélites alrededor de la Tierra o el envío de naves a otros planetas. Como toda ley, no se limitó a explicar los hechos ya conocidos, sino que permitió resolver numerosos problemas que no tenían explicación hasta esos momentos. Citemos algunos de ellos.

La ley de gravitación universal, además de explicar el comportamiento del movimiento de los planetas, dio respuesta al porqué las órbitas de algunos planetas se desvían de su trayectoria cuando pasa por las proximidades de otro. En este aspecto la ley alcanzó un éxito definitivo cuando las perturbaciones en la órbita del planeta Urano permitieron predecir la posición de un planeta hasta entonces desconocido que recibió el nombre de Neptuno. Del mismo modo, las perturbaciones en la órbita de Urano y de Neptuno condujeron al descubrimiento de un nuevo planeta, Plutón.

Se explica también la existencia de las mareas mediante la acción gravitatoria conjunta del Sol y de la Luna sobre la superficie terrestre, que produce deformaciones apreciables en la superficie del mar.

La ley de gravitación universal permitió explicar el movimiento de muchos cometas y cuerpos celestes como el cometa Halley, que aparecen periódicamente en el firmamento, pasan cerca del Sol y vuelven a desaparecer.

4.1 *Leyes de Kepler*

Desde la antigüedad se observaba cómo los planetas parecían moverse en el cielo y durante siglos, después de arduas discusiones, se llegó a la conclusión que todos ellos, incluida la Tierra, giraban alrededor del Sol. Las preguntas que vinieron a continuación fueron: ¿Exactamente cómo se mueven los planetas alrededor del Sol, es decir, con qué tipo de movimiento? ¿Ocupa el Sol el centro de órbitas en forma de circunferencia o la trayectoria de los planetas adoptan las formas de otros tipos de curvas? ¿Con qué velocidad se mueven? Estas preguntas tardaron años en recibir respuestas.

No fue hasta el año 1602 que Johans Kepler estableció las leyes que rigen el movimiento de los planetas alrededor del Sol, basándose en las observaciones y mediciones realizadas durante 20 años por su maestro Tycho Brahe.

Estos estudios le permitieron primero determinar que los planetas en su movimiento describen trayectorias curvilíneas cerradas alrededor del Sol como la que se presenta en la figura 4.1 (a este tipo de curva se le denomina elipse).

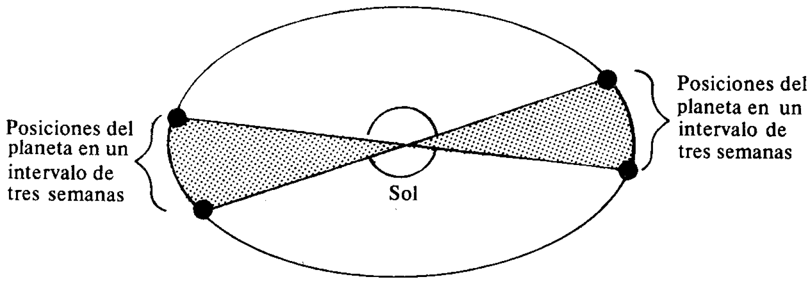


Fig. 4.1

Las preguntas siguientes fueron: ¿De qué manera el planeta describe la elipse? ¿Va más rápido cerca del Sol? ¿Va más despacio lejos del Sol?

Kepler dio respuesta a estas preguntas. Él descubrió que si se fija primero la posición de un planeta en dos momentos distintos, separados por un período de tiempo determinado (digamos que de tres semanas) y posteriormente, en otro lugar de su órbita se fijan otras dos posiciones del planeta separadas de nuevo por tres semanas y se trazan las líneas que unen al Sol con el planeta (denominadas matemáticamente radio-vector), el área definida por la órbita del planeta y los dos radios correspondientes a la posición del planeta a tres semanas de intervalo, es la misma en cualquier parte de la órbita (ver figura 4.1).

En consecuencia, el planeta tiene que ir más aprisa cuando está próximo al Sol y más lento cuando está lejos, si no, las dos áreas no serían idénticas.

Tiempo después, J. Kepler descubrió un hecho que no se refería solamente al movimiento de un único planeta alrededor del Sol, sino que relacionaba varios planetas entre sí, Kepler determinó que el tiempo que tarda un planeta en dar una vuelta completa alrededor del Sol está en relación con el tamaño de su órbita (entendiéndose por tamaño de su órbita el del mayor de los diámetros de la elipse).

Así pues, J. Kepler obtuvo tres leyes que ofrecen una descripción cinemática del movimiento de los planetas alrededor del Sol, las cuales podemos resumir en:

Primera: Todo planeta se mueve en una trayectoria elíptica, en uno de cuyos focos se encuentra el Sol.

Segunda: El radio-vector que une el Sol y el planeta, recorre áreas iguales en tiempos iguales.

Tercera: La relación R^3/T^2 es idéntica para todos los planetas. Si a esta relación constante le llamamos k, la tercera ley puede escribirse en la forma:

$$R^3/T^2 = k,$$

donde R es el radio de la órbita de los planetas y T, el período o tiempo empleado en una revolución alrededor del Sol.

La siguiente pregunta que se plantearon los hombres de ciencias para comprender el movimiento de los planetas fue:

¿Qué es lo que hace que los planetas se comporten de esa manera?

4.2 *Ley de gravitación universal*

El genial Isaac Newton pudo explicar el movimiento de los planetas en el sistema solar y también el de los cuerpos que caen cerca de la superficie de la Tierra mediante una magnitud física común, la fuerza.

En primer lugar, la aplicación de las leyes de la dinámica al movimiento de los planetas lleva inmediatamente a admitir que están sometidos a la acción de cierta fuerza, pues de otro modo seguirían un movimiento rectilíneo uniforme y no órbitas elípticas como afirma la primera ley de Kepler (fig. 4.2).

En segundo lugar, la segunda ley de Kepler permite afirmar que las fuerzas que actúan sobre los planetas son centrales, dirigidas hacia el centro de la órbita, es decir, hacia el Sol. De hecho, se puede demostrar que la segunda ley de Kepler es una consecuencia directa del simple principio de que todos los cambios de velocidad estaban dirigidos exactamente hacia el Sol (fig. 4.3).

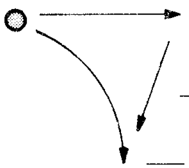


Fig. 4.2

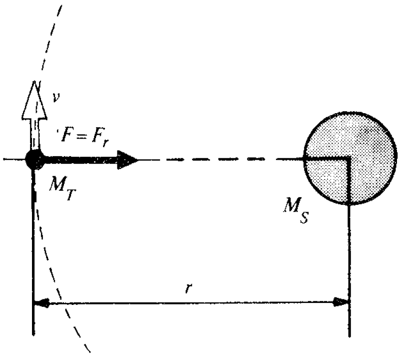


Fig. 4.3

En tercer lugar se puede demostrar que si un cuerpo describe una trayectoria cónica (ya sea una elipse, una circunferencia, una parábola o una hipérbola) y si la fuerza que actúa sobre él, en cualquier instante, está dirigida hacia uno de los focos, entonces dicha fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia:

$F \alpha 1/R^2$.

Conocemos que la aceleración en caída libre de un cuerpo en un lugar dado es igual para todos los cuerpos independientemente de su masa. ¿Cómo explicar esta particular propiedad?

La única explicación que podemos hallar a que la aceleración no dependa de la masa consiste en que la propia fuerza F con que la Tierra atrae al cuerpo en cuestión, es proporcional a su masa m.

Si aumentamos la masa del cuerpo, digamos, el doble, proporcionará un incremento del módulo de la fuerza F, duplicándola, mientras que la aceleración, igual a la razón F/m queda invariable. Newton supuso así que la fuerza de gravitación universal es proporcional a la masa del cuerpo sobre el que actúa.

Entonces la fuerza con que la Tierra atrae a los cuerpos es proporcional a la masa de estos; también, de la misma manera, podemos admitir que la fuerza con que un planeta es atraído por el Sol, será proporcional a la masa m_2 del planeta en cuestión:

$$F \alpha m_2.$$

Según el principio de acción y reacción, el Sol será también atraído por el planeta con la misma fuerza F, de manera que la fuerza sea proporcional a la masa m_1 del Sol:

$$F \alpha m_1.$$

Así pues, la fuerza con que el Sol atrae a los planetas es del mismo tipo que la fuerza con que la Tierra atrae a los cuerpos sostenidos sobre su superficie.

Esto significa que la fuerza de atracción debe ser proporcional a la masa de cada uno de los cuerpos que se atraen y, por consiguiente, es necesario atribuirle a todos los cuerpos la propiedad de atraerse entre sí. Podemos medir esta atracción mutua por medio de la fuerza.

Matemáticamente podemos expresar esta idea como:

$$F \alpha m_1 m_2.$$

Resumiendo, podemos afirmar en general que estas fuerzas de atracción tienen las características siguientes (fig. 4.4):

$$F \alpha \frac{m_1 m_2}{R^2}.$$

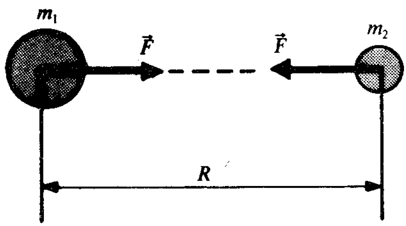


Fig. 4.4

Esta ley toma la forma de igualdad introduciendo una constante de proporcionalidad G:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{R^2}. \qquad (4.1)$$

Esta constante G recibe el nombre de constante de gravitación universal y su valor es igual para todos los cuerpos del universo.

Todos los cuerpos se atraen entre sí con una fuerza cuyo módulo es razón directa del producto de sus masas y razón inversa del cuadrado de la distancia que lo separa.

Nota complementaria

La deducción de esta ley es el resultado de aplicar las leyes de la dinámica al movimiento de los planetas sin añadir ninguna hipótesis complementaria, salvo la suposición de que los cuerpos celestes cumplen las mismas leyes que los terrestres.

Si consideramos un planeta en movimiento alrededor del Sol con un período T en una órbita circular de radio R, la aceleración centrípeta (ver capítulo 2) de cualquier objeto animado de movimiento circular uniforme es:

$$a = \frac{4\,\pi^2 R}{T^2}.$$

Por consiguiente la fuerza que actúa sobre el planeta es:

$$F = ma = m\,\frac{4\pi^2 R}{T^2};$$ donde m es la masa del planeta.

Según la tercera ley de Kepler $R^3/T^2 = k$ o $T^2 = R^3/k$.

Sustituyendo en la expresión de la fuerza obtenemos

$$F = 4\,\pi^2 k\; m/R^2.$$

La fuerza es, entonces, proporcional a la masa del planeta e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia medida desde el Sol.

4.3 *Constante de gravitación universal*

La ley de gravitación universal atribuye a todos los cuerpos la propiedad de atraerse entre sí, pero, ¿podemos verificarlo directamente en vez de esperar a comprobar si los planetas se atraen mutuamente?, ¿es realmente cierto que los cuerpos se atraen mutuamente?

Una comprobación experimental directa de la ley de gravitación universal fue llevada a cabo por Henry Cavendish (1731-1810).

La figura 4.5 muestra el esquema de la balanza de torsión utilizada por Cavendish para responder las preguntas anteriores.

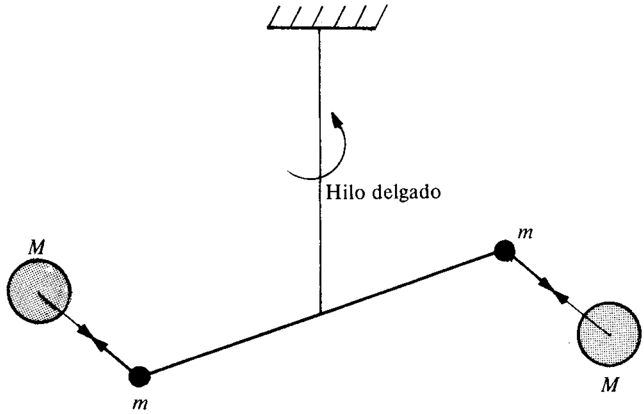


Fig. 4.5

La idea consistió en colgar de una fibra de cuarzo muy delgada una barra con dos esferas en sus extremos, colocando dos grandes esferas de plomo cerca de aquellas en la posición indicada en la figura 4.5. A causa de la atracción de las esferas se produciría una pequeña torsión de la fibra. De esta manera se puede medir la fuerza debida a la atracción entre las dos esferas y como la masa de los cuerpos eran conocidas y estaban a una distancia r también conocida, se pudo obtener el valor de G experimentalmente:

$$G = \frac{Fr^2}{mM}. \qquad (4.2)$$

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}}.$$

Esto significa que dos cuerpos de masa 1 kg separados 1 m de distancia se atraen con una fuerza de $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N. Es evidente que esta magnitud es muy pequeña. Precisamente, debido a que es tan pequeña, no notamos la atracción entre los cuerpos que nos rodean.

Experimentalmente se sabe que la ley de Gravitación Universal es válida no solamente en la región del Sistema Solar sino también a distancias mucho mayores.

4.4 *Campo gravitatorio*

Al estudiar la fuerza que actúa entre dos cuerpos separados una distancia determinada surge inevitablemente la cuestión de cómo se "trasmite" la interacción entre ambos. ¿Cuál es el portador de la interacción entre dos cuerpos cualesquiera?

Recordarás de estudios anteriores que los cuerpos electrizados y los imanes interactúan entre sí a pesar de hallarse separados. Un conductor con corriente y un imán, o dos conductores con corriente también interactúan. Esta interacción se realiza a través del campo eléctrico o magnético.

Entonces podríamos pensar análogamente que la interacción entre dos cuerpos de masa m se explica en función de la teoría del campo y es representado de la siguiente forma: cada cuerpo de masa M posee a su alrededor un campo; si en cierto punto de ese campo se coloca otro cuerpo de masa m, el campo actúa sobre este cuerpo con una fuerza F que depende de las propiedades del campo en dicho punto. Como es natural, dicho cuerpo posee a su alrededor su propio campo, que a su vez actúa sobre el cuerpo de masa M. Podemos entonces afirmar que es a través del campo que se realiza la interacción entre los dos cuerpos de masa m y M.

El campo gravitatorio es un tipo de materia, diferente de la sustancia, y así como hay distintas sustancias, hay también distintos campos como son el eléctrico, magnético, gravitatorio que se diferencian por sus propiedades, por ejemplo, la interacción gravitatoria es siempre de atracción; mientras que la eléctrica puede ser de atracción o de repulsión.

El campo gravitatorio es un tipo de materia que se manifiesta por la acción que ejerce sobre los cuerpos.

4.5 *Aplicaciones de la ley de gravitación universal*

Ejemplo 1. Determinación de la aceleración de la gravedad

La fuerza de gravedad es una de las manifestaciones de la fuerza de gravitación universal o sea, la fuerza con que la Tierra atrae a todos los cuerpos. Designemos la masa de la Tierra por M, su radio por R y la masa del cuerpo dado por m (en este análisis despreciemos la rotación de la Tierra sobre sí misma). Entonces, de acuerdo con la ley de gravitación universal, la fuerza que actúa sobre el cuerpo en las proximidades de la Tierra es:

$$F = G\frac{M\,m}{R^2}.$$

Hasta el presente hemos asumido que la aceleración de la gravedad es igual para todos los puntos de la Tierra. ¿Es cierto esta afirmación?

Si sobre el cuerpo actúa solo esta fuerza (todas las demás están compensadas) el cuerpo en cuestión realiza una caída libre. Podemos hallar esta aceleración considerando que:

$$F = mg \text{ por consiguiente } g = F/m = G\,\frac{M\,m}{m\,R^2}$$

$$g = G\,\frac{M}{R^2}.$$

De aquí vemos que la aceleración de la caída libre no depende de la masa del cuerpo. De esta igualdad se deduce, además, que g disminuye al aumentar la distancia al centro de la Tierra; luego, g debe aumentar al movernos desde el Ecuador (la Tierra está ligeramente achatada hacia los Polos) hasta los Polos.

En la figura 4.6 se muestra que la aceleración gravitatoria depende aproximadamente de la distancia del cuerpo a la superficie terrestre.

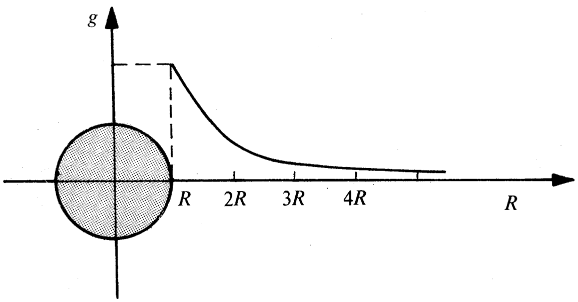


Fig. 4.6

La medición del valor de g es uno de los métodos de exploración en la búsqueda de minerales, petróleo, ya que la alteración de la densidad media de la Tierra produce variaciones locales de g.

Ejemplo 2. Cálculo de la masa de la Tierra conocida la aceleración de la caída libre cerca de su superficie

Es natural que la masa de la Tierra no puede ser medida colocándola sobre una balanza. Pero su medición es posible indirectamente haciendo uso de la expresión de la aceleración de la caída libre.

$$g = G\,M/R^2.$$

De aquí, la masa de la Tierra será:

$$M = \frac{g\,R^2}{G}.$$

Los valores de g y G se pueden determinar experimentalmente:

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \text{ y } g = 9{,}8 \text{ m/s}^2.$$

El radio medio de la Tierra es también conocido:

$$R = 6\ 370 \text{ km} = 6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m}.$$

Por consiguiente, sustituyendo los valores, obtenemos:

$$M = \frac{(9{,}8 \text{ m/s}^2)\,(6{,}37 \cdot 10^6\text{m})^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\dfrac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}} \approx 6{,}0 \cdot 10^{24}\,\text{kg}.$$

Ejemplo 3. Cálculo de la masa del Sol

De modo análogo al ejemplo anterior, podemos calcular la masa del Sol. Conocemos que el radio de la órbita terrestre $R_T = 144{,}5 \cdot 10^9$ m y el período de rotación de la Tierra alrededor del Sol $T = 1$ año $= 31{,}56 \cdot 10^6$ s; podemos por tanto, hallar la aceleración centrípeta de la Tierra:

$$a_c = \frac{F}{M_T} \text{ pero } F = G\frac{M_{\text{Sol}} \cdot M_T}{R^2}\text{; por consiguiente}$$

$$a_c = G\ \frac{M_{\text{Sol}}}{R^2}.$$

De esta expresión podemos obtener la masa del Sol:

$$M_{Sol} = \frac{a_c R^2}{G}.$$

Del capítulo 2 conocemos que la aceleración centrípeta es igual a $a_c = v^2/R$, donde v es la velocidad lineal de la Tierra y es igual a $v = \frac{2\pi R}{T}$; de ahí que:

$$M_{Sol} = \frac{4\ \pi^2 R^3}{G\ T^2}$$

$$M_{Sol} = 1{,}98 \cdot 10^{30}\,\text{kg}.$$

Así pues, la masa del Sol es aproximadamente 330 000 veces mayor que la de la Tierra.

Ejemplo 4. Determinación de la masa de la Luna si se conoce que un satélite que gira alrededor de ella por una órbita casi circular de radio 1 896 km, empleando 2 h, 3 min y 30 s en dar una vuelta completa.

La aceleración centrípeta con que se mueve el satélite es proporcionada por la fuerza de gravitación universal:

$$a_c = F/m,$$

pero $F = G\,\frac{M_L m}{R^2}$

por eso $a_c = G\frac{M_L}{R^2}$.

Recordemos que $a_c = v^2/R$; donde v es la velocidad lineal del satélite y por tanto:

$$a_c = v^2/R = G\frac{M_L}{R^2}; \text{ de donde } M_L = \frac{v^2 R}{G}$$

y como $v = \frac{2\pi R}{T}$, la masa de la Luna es:

$$M_L = \frac{4\pi^2 R^3}{G\ T^2}$$

$$M_L = \frac{4 \cdot (3,14)^2 (1\ 896 \cdot 10^3 m)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2 \cdot (7\ 410 s)^2}$$

$M_L \approx 7,3 \cdot 10^{22}$ kg.

La masa de la Luna es aproximadamente 81 veces menor que la masa de la Tierra.

Ejemplo 5. Determinación de la primera velocidad cósmica

En el capítulo 2 estudiaste cómo se mueve un cuerpo al que se le comunica una velocidad v horizontalmente, es decir, paralela a la superficie de la Tierra, desde una altura h. Vimos que el cuerpo describía una trayectoria característica (parabólica si la fricción es despreciable) al caer en la Tierra (fig. 4.7).

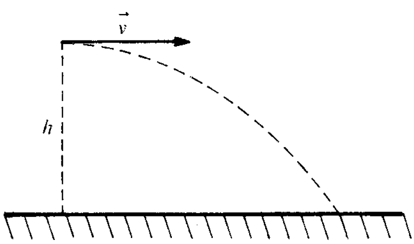


Fig. 4.7

Al analizar tales movimientos consideramos que la superficie de la Tierra es plana. Esta consideración es aceptable cuando las velocidades son relativamente pequeñas y, por tanto los desplazamientos del cuerpo en la dirección horizontal son pequeños.

A medida que la velocidad horizontal del lanzamiento aumenta, el cuerpo caerá cada vez más lejos y su trayectoria se aproximará cada vez más a una circunferencia. Cuando esto ocurre, el cuerpo se moverá a una distancia h constante de la superficie de la Tierra, es decir, se moverá describiendo una circunferencica de radio $R_T + h$ (fig. 4.8), donde R_T es el radio de la Tierra.

De los estudios realizados, conoces que un cuerpo que se mueve uniformemente por una circunferencia, experimenta una aceleración centrípeta dirigida en todo momento hacia el centro de la circunferencia, la cual se puede calcular mediante la expresión:

$a_c = v^2/R.$

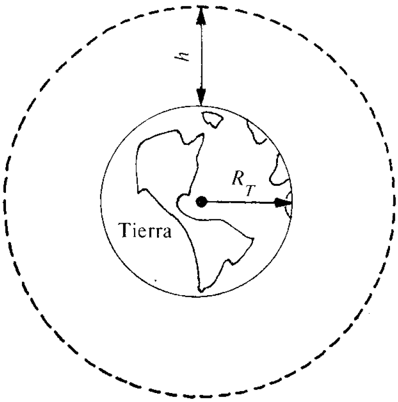


Fig. 4.8

La que comunica esta aceleración al cuerpo es la fuerza de gravitación universal y es igual a:

$$F = G\frac{M\,m}{R^2},$$

donde:

R es la distancia entre el cuerpo y el centro de la Tierra.

Si analizas la figura 4.6, observarás que la distancia entre el cuerpo y el centro de la Tierra es igual a:

$$R = R_T + h,$$

luego $a_c = v^2/(R_T + h)$,
de ahí que la fuerza de gravitación será:

$$F = G\frac{M\,m}{(R_T + h)^2},$$

donde:

M es la masa de la Tierra y
m, la masa del cuerpo.

Podemos plantear la igualdad según la segunda Ley de Newton:

$$\frac{mv^2}{R_T + h} = G\frac{M\,m}{(R_T + h)^2}.$$

Simplificando en ambos miembros y despejando v se tiene que:

$$v^2 = \frac{G\,M}{R + h}$$

$$v = \sqrt{\frac{G\,M}{R + h}}.$$

Esto significa que si a un cuerpo se le comunica una velocidad en dirección horizontal determinada por la ecuación anterior este se moverá por una circunferencia alrededor de la Tierra es decir se convertirá en un satélite artificial de la Tierra.

Cualquier cuerpo puede ser satélite artificial de la Tierra siempre que se le comunique la velocidad requerida. Calculemos esta velocidad para un satélite que se lance desde la superficie de la Tierra ($h = 0$).

En este caso:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Recordemos que:

$$\frac{G\,M}{R^2} = g,$$

por tanto:

$$\frac{G\,M}{R} = gR.$$

De aquí que:

$$v = \sqrt{gR}\ .$$

Sustituyendo en esta ecuación los valores numéricos de $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$ y $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ m, obtenemos:

$$v = \sqrt{9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 6{,}38 \cdot 10^6\text{m}} \approx 8 \cdot 10^3\ \text{m/s} = 8\ \text{km/s}.$$

Para que un cuerpo lanzado en dirección horizontal desde la superficie de la Tierra no caiga en esta, sino que se mantenga moviéndose alrededor de ella por una órbita circular, es decir, se convierta en un satélite terrestre, es necesario comunicarle una velocidad igual a la determinada anteriormente, esta velocidad se denomina *primera velocidad cósmica.*

¡Ocho kilómetros por segundo son casi veintinueve mil kilómetros por hora! Por supuesto que no es fácil comunicarle esta velocidad a un cuerpo. No fue hasta el año 1957 que los científicos soviéticos, valiéndose de potentísimos cohetes, lograron comunicarle la primera velocidad cósmica a un cuerpo cuya masa era de aproximadamente 85 kg. Este cuerpo se convirtió en el primer satélite artificial de la Tierra, el Sputnik I.

Tareas

1. Expresa tus ideas acerca de la ley de gravitación universal.
2. ¿Qué significado físico tiene el coeficiente G en la ley de gravitación universal?
3. ¿Cómo varía la fuerza de atracción entre dos cuerpos si:
   a) se duplica la masa de uno de ellos;
   b) se triplica la masa de ambos;
   c) se duplica la distancia entre ellos;
   d) se reduce a la tercera parte la distancia entre ellos;
   e) se reduce a la cuarta parte una de las masas.
4. Los cuerpos que se encuentran en la superficie de la Tierra se atraen entre sí. ¿Por qué no lo notamos?
5. ¿Qué fuerza obliga a la Tierra y otros planetas a moverse alrededor del Sol?
6. ¿Cuál de los dos esquemas planteados en a) y b) es más correcto para describir las interacciones gravitatorias de dos cuerpos? Explica.
   a) Cuerpo – cuerpo,
   b) cuerpo – campo – cuerpo.
7. ¿Cómo se produce la interacción entre los planetas?
8. El nivel de la superficie de los océanos se eleva y desciende periódicamente. Explica con tus palabras a qué se debe esto.
9. Describe un método que permita medir la masa de la Tierra.
10. Analiza la expresión $g = \dfrac{GM}{R^2}$, donde M es la masa de la

Tierra. Di cuáles de las magnitudes que en ella aparecen son de más fácil medición.

11. Si la fuerza de gravedad actúa sobre todos los cuerpos proporcionalmente a sus masas, ¿por qué un cuerpo pesado no cae más aprisa que uno ligero?
12. Si la Luna tuviera la mitad de la masa que tiene y se mantuviera en la misma órbita, ¿cuál sería su período de rotación en torno a la Tierra?
13. ¿Por qué en marzo la duración del día cambia más rápidamente que en diciembre?

4.6 *Sobrepeso e impesantez*

Conocemos que el peso de un cuerpo es la fuerza con que el cuerpo actúa sobre el soporte o la suspensión. En el capítulo 3 analizamos que cuando un cuerpo se encuentra en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme con relación a la Tierra, el peso del cuerpo será igual a la fuerza de gravedad:

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

Sin embargo, el peso de un cuerpo puede diferenciarse notablemente del valor de la fuerza de gravedad, si el apoyo o la suspensión se mueven con aceleración hacia arriba o hacia abajo, por ejemplo, en el caso de un elevador durante su ascenso o descenso.

Veamos cómo se comporta el peso de un cuerpo que se encuentra en el interior de un elevador.

En la figura 4.9a se muestra el esquema de un elevador que se mueve hacia arriba con una aceleración a y en su interior se encuentra un hombre de masa m. Determinemos con qué fuerza presiona el cuerpo contra el suelo del elevador.

Sobre el hombre actúan la fuerza de gravedad mg y la fuerza normal N con que el piso actúa sobre el hombre. Situemos nuestro sistema de referencia fijo en la Tierra, como se indica en la figura 4.9b. En la figura también se ha representado el diagrama de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo de masa m (punto material).

Sabemos que el peso de un cuerpo es igual a

$$\vec{P} - \vec{N}.$$

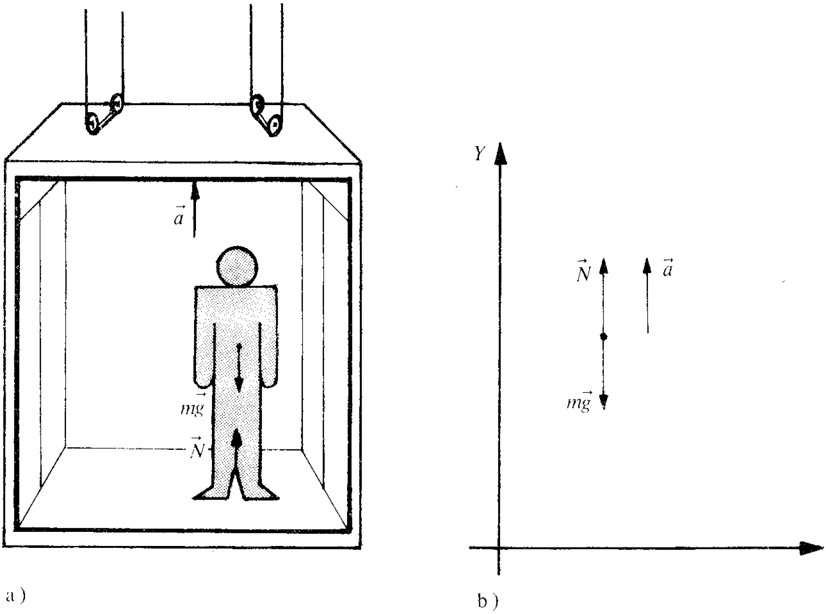


Fig. 4.9

Para determinar el valor de la fuerza normal N, podemos utilizar la segunda ley de Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$
$$\vec{N} + \vec{F_g} = m\vec{a}.$$

Proyectando la fuerza en el eje Y, tenemos:

$$N - F_g = ma_y$$
$$N = F_g + ma_y,$$

pero $F_g = mg$

$$N = m\,(g + a_y).$$

Observa que la fuerza con la que el cuerpo presiona sobre el apoyo (es decir, su peso) no es igual a la fuerza de gravedad. La fuerza de presión del apoyo es mayor que la fuerza de gravedad: $P > mg$.

Si la aceleración de un cuerpo tiene sentido opuesto a la de la aceleración de la caída libre, su peso es mayor que el del cuerpo en reposo.

El aumento del peso de un cuerpo provocado por su movimiento acelerado recibe el nombre de *sobrepeso*.

¿Qué sucede cuando el elevador desciende aceleradamente (fig. 4.10)?

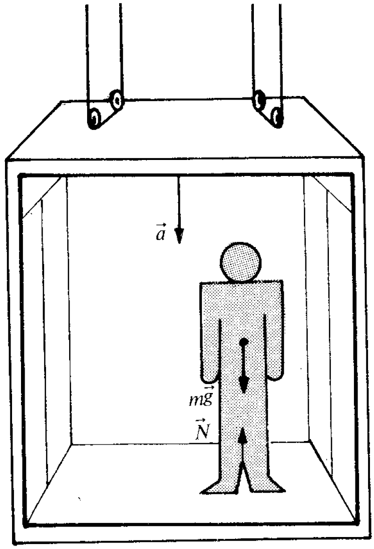


Fig. 4.10

La fuerza con que el cuerpo presiona sobre el apoyo es menor que la fuerza de gravedad:

$$-F_g + N = -ma_y$$
$$N = m(g - a_y).$$

Si $a < g$, entonces $N < mg$.

El peso de un cuerpo, cuya aceleración está dirigida en el mismo sentido que la aceleración de la caída libre, es menor que el peso del cuerpo en reposo.

Si el elevador cae con la aceleración de la gravedad: $a = g$, entonces $N = 0$ y el cuerpo no presiona sobre el apoyo, es decir, $P = 0$ y este estado del cuerpo recibe el nombre de *impesantez*. Bajo esta condición $P = m\ (g - g) = 0$, desaparece la acción recíproca entre el apoyo y el cuerpo.

La causa de la impesantez consiste en que la fuerza de gravitación universal comunica iguales aceleraciones al cuerpo y a su apoyo. Por esta causa, todo cuerpo que se mueve sólo bajo la acción de las fuerzas de gravitación universal se encuentra en estado de impesantez.

Si el elevador se mueve con movimiento rectilíneo uniforme la fuerza de presión sobre el apoyo es igual a la fuerza de gravedad.

$N = m(g - a_y)$.

Si $a_y = 0$,

$N = mg$.

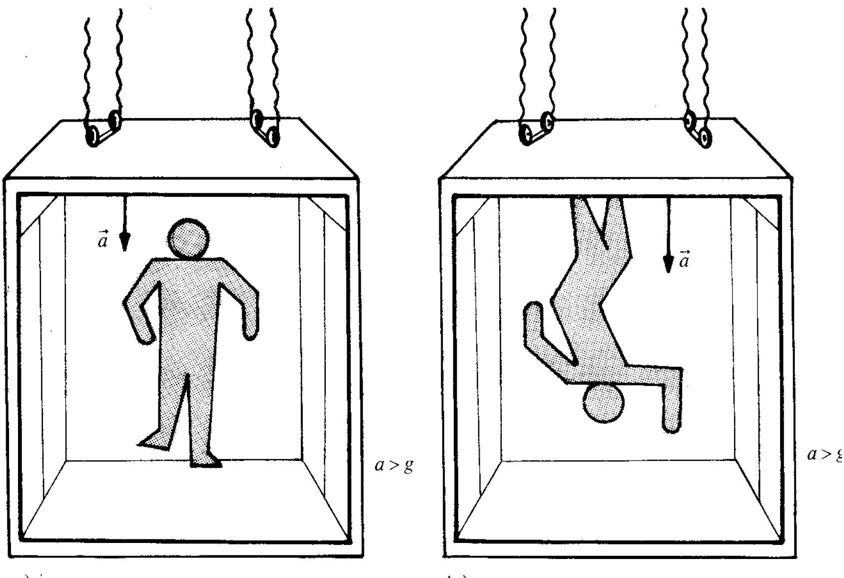


Fig. 4.11

¿Qué sucede para valores de la aceleración que cumplan con $a > g$?

En este caso el elevador descendería con una aceleración de valor mayor que g, los pies del hombre en este caso se separarían del piso y el techo presionaría sobre él empujándolo hacia abajo. Por esta razón, el sentido del peso se invierte (hacia arriba). Es evidente que el hombre puede caminar por el techo del elevador, manteniéndose cabeza abajo (fig. 4.11).

Los análisis realizados son aplicables a otros casos. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1

Un automóvil que avanza por un puente convexo (fig. 4.12) es más ligero que ese mismo automóvil parado en dicho puente.

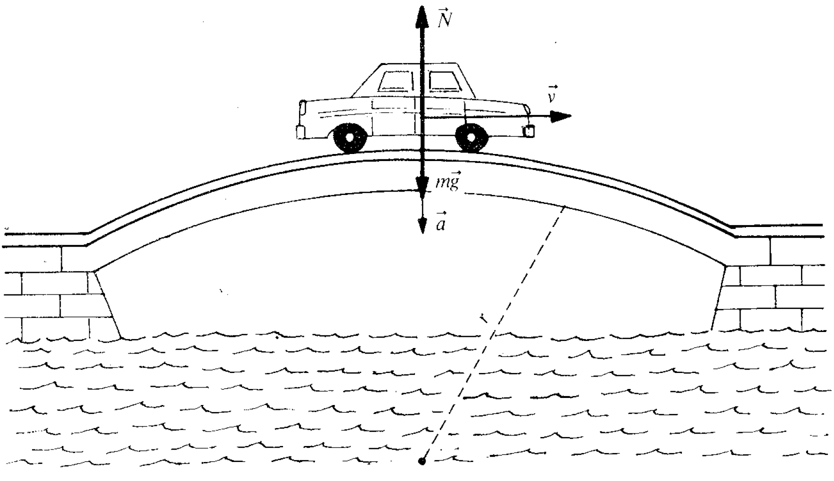


Fig. 4.12

En efecto, el movimiento del automóvil por un puente convexo se puede considerar como el movimiento sobre una parte de la circunferencia. Por eso, el vehículo se mueve con una aceleración centrípeta cuyo módulo es igual a:

$$a = v^2/R,$$

donde v es la velocidad lineal del automóvil y R, el radio de curvatura. En el instante en que el auto se halla en el punto superior del puente dicha aceleración está dirigida hacia abajo. El automóvil adquiere aceleración bajo la acción de la resultante de la fuerza de gravedad mg y la fuerza N de reacción del puente.

Entonces tendremos, según la segunda ley de Newton en forma vectorial, que:

$$\overrightarrow{mg} + \overrightarrow{N} = \overrightarrow{ma}\,. \tag{4.3}$$

Si escribimos (4.3) por las proyecciones de los vectores sobre dicho eje, tenemos:

$$mg_y - N_y = ma_y.$$

Es evidente que: $g_y = g$; $N_y = N$ y $a_y = a = v^2/R$.

Entonces:

$$mg - N = m\, v^2/R,$$

de donde:

$$N = m\,(g - v^2/R).$$

De acuerdo con la tercera ley de Newton, el peso del automóvil P (o sea la fuerza con la que este presiona sobre el punto) está dirigido en sentido opuesto a la fuerza de reacción del puente N, pero por su módulo estas fuerzas son iguales, por consiguiente:

$$P = N = m\,(g - v^2/R);\; P < mg.$$

Del mismo modo se reduce el peso de los pasajeros que viajan en un automóvil por un puente convexo. La disminución del peso será tanto mayor, cuanto mayor sea la velocidad del auto.

Ejemplo 2

Examinemos ahora con qué fuerza presiona sobre el apoyo un cosmonauta, ubicado en el sillón de una nave cósmica durante el despegue y en el vuelo libre por la órbita.

Durante el despegue, la nave se mueve con aceleración y su análisis es análogo al caso del elevador que se mueve verticalmente hacia arriba o hacia abajo con aceleración. La fuerza con la que el cosmonauta presiona sobre el apoyo, es mayor que la de la gravedad. En efecto, según la tercera ley de Newton, la fuerza con la que el cosmonauta presiona el sillón es $m\,(g + a)$. Se dice entonces, que el cosmonauta experimenta un sobrepeso, es decir, su peso ha aumentado.

Si la nave cósmica gira por una órbita alrededor de la Tierra su aceleración es igual a la de la caída libre: $a = g$ y, por tanto, $P = 0$. El cosmonauta no presiona contra el apoyo y tendrá la sensación de haber perdido el peso y se encuentra en estado de impesantez. ¿Qué experimenta el cosmonauta durante el frenado?

Tareas

14. ¿Cuándo un cuerpo se encuentra en estado de sobrepeso?
15. ¿Cuándo un cuerpo se encuentra en estado de impesantez?
16. ¿Estará un proyectil en vuelo en estado de impesantez? Explica.

17. ¿Pesarán los cuerpos en el interior de un satélite que se halla en órbita? ¿Por qué?

Tareas generales del capítulo

1. ¿Pueden chocar dos satélites que giran en una misma órbita y en el mismo sentido? Explica tu respuesta.
2. ¿Qué mantiene en órbita a un satélite artificial de la Tierra?
3. Un cosmonauta sale del interior del satélite en que viaja. ¿Tendrá que sujetarse a él para permanecer moviéndose a su lado? Explica.
4. Considerando que la órbita de un planeta de masa m_p puede tomarse aproximadamente como una circunferencia de radio R, y teniendo en cuenta que la fuerza centrípeta que actúa sobre el planeta $F = m_p{}^2/R$ es debido a la atracción gravitacional $F = G\dfrac{m_S m_p}{R^2}$, deduce la tercera ley de Kepler.
5. Calcula el peso que tendría en la Luna un cuerpo de 20 kg y compáralo con el valor que tendría en la Tierra.
6. Calcula la gravedad en la superficie del planeta Júpiter sabiendo que su radio es aproximadamente 11 veces mayor que el de la Tierra y que su masa lo es 318 veces.
7. Calcula el peso que tendría en Júpiter un hombre de 70 kg.
8. El campo gravitatorio en la superficie de la Luna es 1/6 del que corresponde de la superficie de la Tierra.
   a) ¿Cuánto pesaría un hombre de 70 kg en la Luna?, ¿y en la Tierra?
   b) ¿Cuál sería su masa en la Tierra?, ¿y en la Luna?
9. ¿Cuál debería ser la velocidad de un satélite artificial situado en una órbita de radio igual al doble del radio terrestre?
10. Dos satélites artificiales de la Tierra giran en órbitas cuyos radios son $R_a = 2\ R_b$. ¿Cual será la relación entre sus velocidades angulares? Considera las órbitas circulares.
11. Determina la masa del Sol si se conoce que el radio de la órbita de Marte es $r = 228 \cdot 10^6$ km y el período de rotación de este alrededor del Sol es $T = 687$ días.

12. ¿A qué distancia de la Tierra la atracción gravitacional de esta compensa al de la Luna? La distancia entre la Tierra y la Luna es de $3{,}84 \cdot 10^8$ m y además conoces que la relación

$$\frac{M_T}{M_L} = 81.$$

13. En 1957 el satélite soviético Sputnik I tenía un período de revolución de 46 min. Atendiendo que su trayectoria era circular, calcula la altura del satélite alrededor de la Tierra.

Capítulo 5
LEY DE CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Las leyes de Newton nos permiten resolver una gran variedad de problemas relacionados con la interacción de los cuerpos. Sin embargo, frecuentemente nos encontramos que es muy complicado hallar el valor de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo dado. Por ejemplo, con ayuda de las leyes de Newton es difícil determinar las fuerzas que actúan durante interacciones de corta duración o cuando las fuerzas que se manifiestan no son constantes, variando en ocasiones en forma arbitraria.

En la vida y en la técnica son múltiples las ocasiones en las que el hombre se relaciona con interacciones de este tipo. Como ejemplo de estos casos podemos citar las siguientes: las fuerzas que se manifiestan durante la interacción de una pelota con el bate de béisbol o con la raqueta de tenis, durante el disparo de las armas de fuego, en la propulsión reactiva de aviones y cohetes, en el choque de cuerpos macroscópicos o de partículas elementales en los reactores de las centrales electronucleares, entre otros.

El conocimiento de las leyes que permiten calcular las fuerzas que se manifiestan durante breves intervalos de tiempo o los cambios en la velocidad provocados por este tipo de interacciones, tiene una gran importancia para el hombre contemporáneo. Para nuestro país, este es un requisito de primer orden, pues por una parte, nuestros principales medios defensivos se relacionan estrechamente con estos fenómenos: el diseño de nuestros aviones de combate (fig. 5.1 y 5.2), cohetes antiaéreos, son ejemplos evidentes de estos princi-

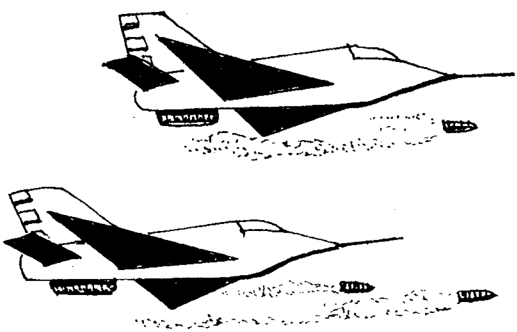


Fig. 5.1

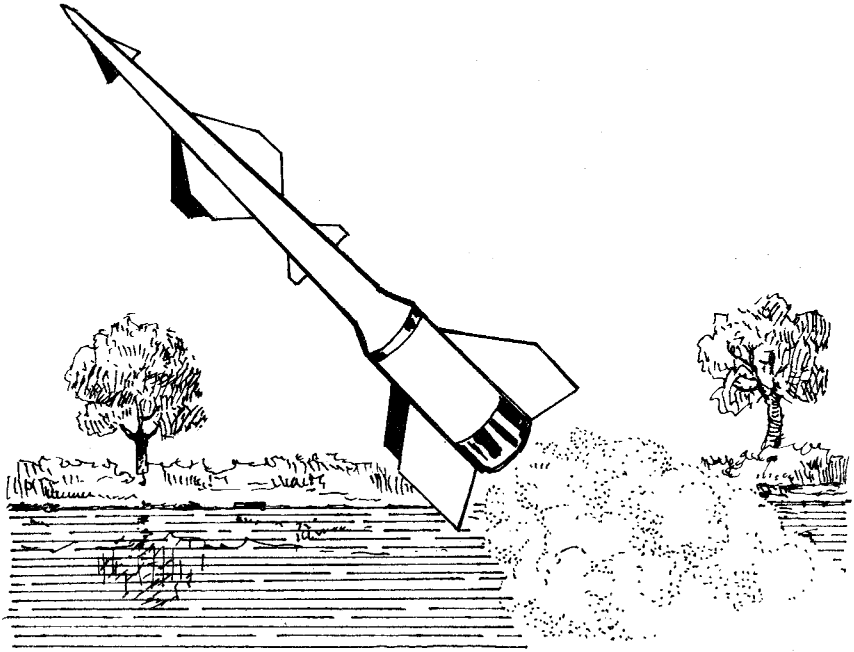


Fig. 5.2

pios. Por otra parte, el control de las reacciones nucleares que tienen lugar durante la explotación de las centrales electronucleares que se construyen en nuestro país, se basan también en una ley general de la naturaleza que constituye el objeto de estudio de este capítulo.

5.1 *Impulso de una fuerza. Cantidad de movimiento*

Comencemos nuestro estudio analizando el proceso de interacción de dos cuerpos. Si observas atentamente durante una práctica de tiro de las realizadas en la clase de preparación militar, notarás que al producirse un disparo con un fusil, la bala adquiere una gran velocidad y a la vez el fusil empuja el hombro del tirador en sentido contrario al de salida del proyectil. Es decir, durante la interacción, tanto la bala como el fusil adquieren cierta velocidad. Este comportamiento evidencia dos hechos:

a) Durante la interacción se manifiestan dos fuerzas, una sobre la bala y otra sobre el fusil. Estas fuerzas son la causa de la variación de la velocidad de ambos cuerpos.
b) El tiempo de duración de la interacción es muy pequeño y es difícil conocer el comportamiento de las fuerzas.

El hecho de que ambos cuerpos adquieran velocidades en sentido opuesto está en correspondencia con lo establecido en la tercera ley de Newton, ya que la acción de los cuerpos es mutua y recíproca: los gases producto de la combustión de la pólvora actúan sobre la bala, y esta, por reacción y por intermedio de los gases, actúa con una fuerza igual, pero de sentido contrario sobre el arma.

Sin embargo, la interacción que se produce desde el instante en que comienza la explosión de la pólvora hasta que la bala sale del cañón del arma es un proceso muy complejo y determinar el valor de la fuerza que se manifiesta sobre ambos cuerpos suele ser difícil, ya que varía durante todo el tiempo que transcurre la interacción.

Entonces, ¿cómo podemos determinar la velocidad que adquiere cada cuerpo?, ¿qué relación existe entre la variación de las velocidades y las fuerzas que las provocan?

Para resolver este problema, realicemos el análisis de un fenómeno similar, pero más simplificado. Estudiaremos detenidamente la interacción de dos carros en el laboratorio con la condición de que uno sea más ligero que el otro (fig. 5.3).

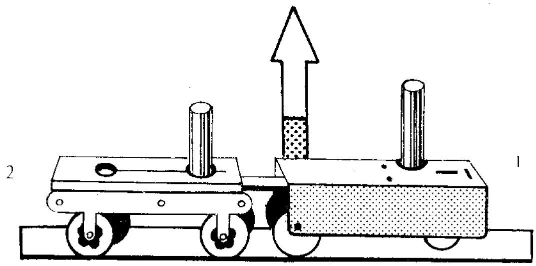


Fig. 5.3

Este será nuestro sistema objeto de análisis. En general, cuando hablamos de sistema (o más propiamente sistema mecánico), queremos significar un conjunto de cuerpos que puede interactuar. Aquí nuestro sistema de estudio son los dos carros. Los otros cuerpos como es la mesa que sirve de soporte, así como todos los demás cuerpos que se encuentran a su alrededor, los consideramos externos al sistema seleccionado.

Coloquemos los carros de forma tal que queden en contacto estando la varilla del carro mayor comprimida (fig. 5.4a). Al liberarlo, esta actúa bruscamente sobre el carro más ligero con una fuerza $\vec{F}_2$; a su vez y por intermedio del resorte, sobre el carro mayor actúa la fuerza $\vec{F}_1$ (fig. 5.4b). Ambas fuerzas de acción y reacción son internas del sistema constituido por ambos carros, y solo actúan durante el intervalo de tiempo Δt en el cual se manifiesta la fuerza elástica del resorte que se distiende. Ambas fuerzas son iguales en valor, de igual dirección, pero de sentidos opuestos, es decir:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

Debido a la acción de estas fuerzas, las velocidades de los carros varían hasta alcanzar los valores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ (fig. 5.4c).

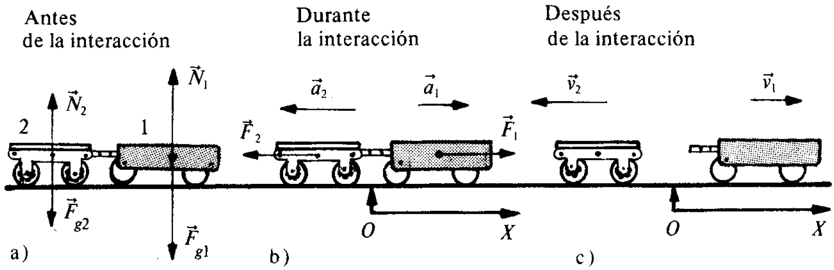


Fig. 5.4

La velocidad final que adquieren los carros dependerá del valor de sus masas respectivas. Es por esto que la velocidad del carro ligero $\vec{v}_2$ es mucho mayor que la del otro $\vec{v}_1$, al igual que sucede con la bala y el fusil.

Analicemos ahora las magnitudes físicas que intervienen en el fenómeno estudiado.

En la figura 5.4a hemos señalado las fuerzas externas[1] que actúan sobre ambos carros: las causadas por el campo gravitatorio te-

[1] Fuerzas externas son aquellas que se manifiestan como resultado de la interacción de un cuerpo cualquiera del sistema, con otro que no pertenece a dicho sistema.

rrestre $\vec{F}_{g_1}$ y $\vec{F}_{g_2}$ y también las fuerzas $\vec{N}_1$ y $\vec{N}_2$ que son las reacciones de la superficie de apoyo a los pesos que ejercen los carros sobre la mesa. Como $\vec{F}_{g_1} = -\vec{N}_1$ y $\vec{F}_{g_2} = -\vec{N}_2$, estas acciones externas están compesadas, es decir, el sistema en su conjunto se comporta como si sobre él no actuaran fuerzas externas.

Por otra parte las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ no son de valor constante. Ambas son nulas antes de liberar el resorte; después de liberarse, estas aumentan casi instantáneamente a un valor máximo igual a $F_{\text{máx}} = kx_{\text{máx}}$: posteriormente van disminuyendo a medida que el resorte se distiende hasta que se anulan cuando los carros se separan. Todo esto sucede en el intervalo de tiempo Δt.

El efecto de estas fuerzas se manifiesta en cada carro mediante una aceleración. Analicemos los efectos en cada carro por separado.

De acuerdo con la segunda ley de Newton sucede que para el mayor de los carros

$$\vec{F}_1 = m_1 \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} \tag{5.1}$$

y para el carro ligero

$$\vec{F}_2 = m_2 \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t}. \tag{5.2}$$

Estas ecuaciones pueden ser expresadas como:

$$\vec{F}_1 \Delta t = m_1 \Delta \vec{v}_1 \quad \text{y} \quad \vec{F}_2 \Delta t = m_2 \Delta \vec{v}_2 \tag{5.3}$$

$$\vec{F}_1 \Delta t = m_1(\vec{v}_1' - \vec{v}_1) \quad \text{y} \quad \vec{F}_2 \Delta t = m_2(\vec{v}_2' - \vec{v}_2), \tag{5.4}$$

donde $\vec{v}_1'$ y $\vec{v}_2'$ son las velocidades de los carros después de la interacción, mientras que $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son las velocidades de los carros antes de la interacción.

Al analizar esta expresión se observa que el cambio $m\Delta\vec{v}$ fue originado por la cantidad $\vec{F}\Delta t$. A este producto, $\vec{F}\Delta t$, se le denomina *impulso de la fuerza.*

El impulso de una fuerza es una magnitud física vectorial cuya dirección y sentido coincide con el de la fuerza. Su unidad en el SI se expresa en newton por segundo (N·s).

En los ejemplos analizados nos dimos cuenta que es muy difícil calcular el tiempo Δt que transcurrió en la interacción entre los cuerpos, además en casi todos estos casos, la fuerza es variable en el tiempo; luego, la solución es calcular $m\,\Delta\vec{v}$, lo cual es más fácil y, además, es equivalente a $\vec{F}\Delta t$, es decir, que sin tener que calcular F ni Δt hemos determinado su producto. Entonces podemos darnos cuenta de lo útil de dicha expresión.

Por otra parte, si comparamos las expresiones:

$$\vec{F}_1\,\Delta t = m_1\vec{v}_1' - m_1\vec{v}_1 \quad \text{y} \quad \vec{F}_2\,\Delta t = m_2\vec{v}_2' - m_2\vec{v}_2,$$

podemos observar que impulsos iguales provocan una variación igual del producto $m\vec{v}$. Esto significa en el caso de los carros o de la bala y el fusil, debido a que la masa del mayor de los carros o del fusil es grande, la velocidad que adquieren es mucho menor que la del carro ligero o de la bala.

El producto $m\vec{v}$ (masa de un cuerpo por su velocidad) se corresponde con una magnitud física que recibe el nombre de *cantidad de movimiento* del cuerpo. La cantidad de movimiento es una magnitud vectorial, cuya dirección y sentido coincide con el de la velocidad y se representa por la letra $\vec{p}$; luego:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \tag{5.5}$$

En el SI se toma por unidad de cantidad de movimiento la correspondiente a un cuerpo de 1 kg de masa que se mueve con una velocidad de 1 m/s. La unidad de cantidad de movimiento es el kilogramo metro por segundo (kg · m/s).

Se suele decir que un cuerpo de masa m en movimiento a una velocidad v es portador de una cantidad de movimiento $m\vec{v}$. ¿Qué significa esto? Si vemos un vehículo que se acerca hacia nosotros cuando vamos a cruzar una calle, instintivamente retrocedemos. ¿Qué tiene el vehículo para que realicemos esta acción? En primer lugar, su velocidad es tal vez solo de 50 km/h, pero solo la velocidad no es suficiente para temerle. Un insecto que se acerca a nosotros a la misma velocidad no nos infunde temor. ¿Es entonces la masa? Ciertamente no, porque si el vehículo está parado no nos preocupará, por tanto, es la medida de ese movimiento mecánico, es decir, $m\vec{v}$ lo que hace que tomemos determinadas precauciones.

Entonces podemos afirmar que el producto $m\vec{v}$ es una magnitud que caracteriza al movimiento mecánico de los cuerpos, pero de un modo distinto al de la velocidad, la cual solamente caracteriza la rapidez y sentido con que se mueven los cuerpos.

De acuerdo con la definición de cantidad de movimiento, las expresiones $\vec{F}_1 \Delta t = m_1\vec{v}'_1 - m_1\vec{v}_1$ y $\vec{F}_2\Delta t = m_2\vec{v}'_2 - m_2\vec{v}_2$ puede escribirse de la forma siguiente:

$$\vec{F}_1 \Delta t = \vec{p}'_1 - \vec{p}_1 \tag{5.6}$$
$$\vec{F}_2 \Delta t = \vec{p}'_2 - \vec{p}_2 \tag{5.7}$$

o también:

$$\vec{F}_1 \Delta t = \Delta\vec{p}_1 \tag{5.8}$$
$$\vec{F}_2 \Delta t = \Delta\vec{p}_2. \tag{5.9}$$

De estas expresiones se deduce que para lograr grandes variaciones de la cantidad de movimiento de un cuerpo, se precisa o de una fuerza de gran valor o de que la fuerza actúe un tiempo prolongado. Así, por ejemplo, la gran velocidad que adquiere el proyectil disparado por un fusil se debe a una fuerza de gran intensidad y duración muy breve que se provoca durante la combustión de la pólvora. Se puede incrementar la variación de la cantidad de movimiento del proyectil, prolongando el tiempo de acción de los gases; esto se logra construyendo fusiles o cañones con ánimas de gran longitud. En el caso de los cohetes y aviones a reacción esto se logra manteniendo la combustión durante un tiempo prolongado.

En el montaje que se muestra en la figura 5.5 se comprueban las conclusiones anteriores. Considerando un sistema constituido por un cuerpo sobre el cual se aplica, con ayuda de un dinamómetro, una fuerza externa no compensada, durante un intervalo de tiempo Δt. La medida de la variación de la cantidad de movimiento del carro depende de la fuerza $\vec{F}$ y del tiempo Δt que esta actúe, es decir, depende del valor del impulso de dicha fuerza.

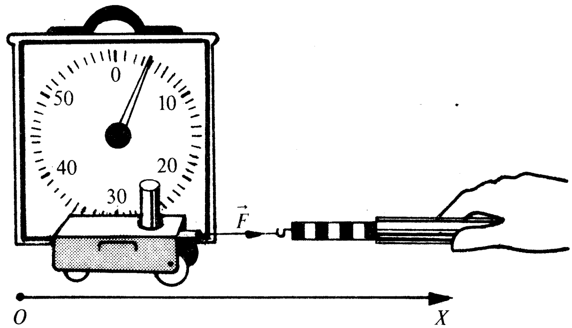


Fig. 5.5

Tareas

1. ¿A qué llamamos impulso de una fuerza?
2. ¿Cuándo una fuerza es externa al sistema?
3. ¿Cuándo una fuerza es interna al sistema?
4. En el caso del sistema bala-fusil, dibuja un esquema y representa en él, todas las fuerzas que actúan sobre los cuerpos, antes y después de la interacción.
5. ¿Qué analogías existe entre los sistemas bala-fusil y el constituido por los dos carros de mecánica?
6. ¿A qué llamamos cantidad de movimiento de un cuerpo?
7. ¿Qué le sucede a la cantidad de movimiento de un sistema si sobre él actúan fuerzas externas no compensadas? Escribe la ecuación general que expresa esa situación.
8. Haz una relación de las nuevas magnitudes físicas introducidas, su significado físico y unidades.
9. ¿Cómo varía el impulso de la fuerza de los gases de una escopeta de caza cuando se recorta la longitud de su cañón?
10. Si lanzamos una pelota contra una pared y la recogemos al rebotar, di:
    a) ¿cuántos impulsos se aplicaron a la pelota?
    b) ¿qué impulso fue el mayor?

5.2 *Ley de conservación de la cantidad de movimiento*

En el epígrafe anterior analizamos la interacción de dos carros. Por la tercera ley de Newton comprobamos que a consecuencia de estas fuerzas de interacción variaba la cantidad de movimiento de las partes de un sistema. Nos falta analizar la posible relación existente entre estas variaciones de la cantidad de movimiento de los cuerpos.

Una conclusión importante de la relación $\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}$ es que la variación de la cantidad de movimiento no depende del procedimiento que se emplee para provocar el impulso de la fuerza o sea, mediante una fuerza muy intensa que actúa durante un breve intervalo de tiempo Δt o viceversa.

Consideremos ahora el sistema constituido por el conjunto de los dos carros que se muestra en la figura 5.2. En este caso las fuerzas $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$ son internas, mientras que las fuerzas externas están compensadas.

Como $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$ son iguales en módulo y de sentidos opuestos, y el tiempo Δt en que actúan ambas fuerzas es el mismo, entonces sucede que los impulsos son iguales y de sentidos opuestos, es decir:

$$\vec{F_1}\,\Delta t = -\vec{F_2}\,\Delta t. \tag{5.11}$$

Si sustituimos en (5.11) las expresiones $\vec{F_1}\Delta t = m_1\vec{v_1'} - m_1\vec{v_1}$ y $\vec{F_2}\Delta t = m_2\vec{v_2'} - m_2\vec{v_2}$, resulta que:

$$m_1\vec{v_1'} - m_1\vec{v_1} = -(m_2\vec{v_2'} - m_2\vec{v_2}).$$

Si agrupamos la cantidad de movimiento total antes de la interacción y la cantidad de movimiento total después de la interacción, obtenemos:

$$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = m_1\vec{v_1'} + m_2\vec{v_2'}. \tag{5.12}$$

La cantidad de movimiento del sistema antes de la interacción es igual a la cantidad de movimiento después de la interacción.

Este resultado tiene gran significación para la física, pues es reflejo de una de las leyes fundamentales de la naturaleza, la *ley de conservación de la cantidad de movimiento* y se cumple para cualquier tipo de interacción incluso en aquellas en las que se manifiestan fuerzas variables de muy corta duración. Esto significa que en caso de ser internas al sistema las fuerzas que se manifiestan en la interacción, es innecesario el conocimiento detallado de cómo ellas varían. Es de destacar que los impulsos de estas fuerzas son iguales y de sentidos opuestos; por consiguiente las variaciones de la cantidad de movimiento que ellos provocan en cada cuerpo son iguales en valor y también de sentidos opuestos y, por consiguiente, se anulan.

Un enunciado más general de la ley de conservación de la cantidad de movimiento que queda restringido a la interacción de dos cuerpos, es el siguiente:

La cantidad de movimiento total de un sistema, sólo puede modificarse cuando actúan fuerzas exteriores sobre él. Si no actúan fuerzas externas o estas se compensan, la cantidad de movimiento permanece constante en valor y sentido, es decir:

$$\vec{p_1} + \vec{p_2} = \text{constante}. \tag{5.13}$$

Es importante tener presente que durante la interacción siempre se trasmite cierta cantidad de movimiento de un cuerpo a otro. Mediante la expresión $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$, resulta fácil determinar las velocidades de los cuerpos después de su interacción.

A continuación se presentan algunos problemas resueltos donde se aplica la ley de conservación de la cantidad de movimiento.

Problemas resueltos

1. Si la masa del carro 1 representado en la figura 5.3 es 7 veces mayor que la del carro ligero 2, determina la relación entre las velocidades que adquieren los carros inmediatamente después de su interacción elástica.

Solución

Este problema corresponde al caso de la interacción de dos cuerpos que inicialmente se encuentran en reposo.

El sistema lo constituyen los carros 1 y 2, cuyas masas se encuentran en la relación $m_1 = 7\, m_2$.

Las fuerzas externas que actúan sobre el sistema se encuentran equilibradas. Esto se evidencia en el esquema auxiliar que se muestra en la figura 5.4 a y c, en la cual se señalan las condiciones anteriores y posteriores a la interacción.

De esto se deduce que las únicas fuerzas que actúan en el sistema son las fuerzas de acción y reacción que se manifiestan durante el tiempo que dura la interacción. La naturaleza de estas fuerzas es elástica y ellas son la causa de que los carros adquieran las velocidades v_1' y v_2' que se señalan en la figura 5.4c.

El sistema de coordenadas al cual referiremos las velocidades de los carros lo situaremos de forma que su origen O coincida con el punto de contacto de los carros antes de la interacción.

El problema consiste en determinar la relación que existe entre los valores de las velocidades que adquieren los carros después de la interacción.

Del análisis anterior se obtienen los datos e incógnitas que a continuación resumimos:

Datos	*Incógnita*
$v_1 = 0$	
$v_2 = 0$	$\dfrac{v_1'}{v_2'} = ?$
$F_{ext} = 0$	
$m_1 = 7\, m_2$	

Puesto que en el sistema solo actúan fuerzas internas, en él se cumple la ley de conservación de la cantidad de movimiento. Además, como nuestra incógnita consiste en determinar la relación que existe entre las velocidades de los cuerpos después de la interacción utilizaremos la ecuación general de la ley de conservación de la cantidad de movimiento que precisamente considera a ambas velocidades, o sea:

$$\vec{p_1} + \vec{p_2} = \vec{p_1'} + \vec{p_2'},$$

pero:

$$\vec{p_1} + \vec{p_2} = 0 \text{ (los carros se encontraban en reposo)},$$

entonces:

$$\vec{p_1'} + \vec{p_2'} = 0$$

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = 0$$

$$m_1 v_1' = - m_2 v_2'$$

$$v_1' = \frac{- m_2 v_2'}{m_1},$$

pero $m_1 = 7\, m_2$

$$v_1' = \frac{- m_2 v_2'}{7 m_2}$$

$$v_1' = \frac{- v_2'}{7}.$$

La velocidad del carro 1 es 7 veces menor que la del carro 2 y es de sentido opuesto a la de este último.

Este resultado se puede comprobar con un sistema de barrera de luz acoplado al cronómetro-contador digital (fig. 5.6). Con los valores del tiempo medidos con el contador digital se calcula v_1' y v_2', y se verifica la certeza de la respuesta.

2. Un hombre de masa m que corre con una velocidad v_0 salta sobre una vagoneta de masa M que inicialmente se encuentra en reposo. Después del salto el hombre queda parado sobre la vagoneta. Determina la velocidad de ambos.

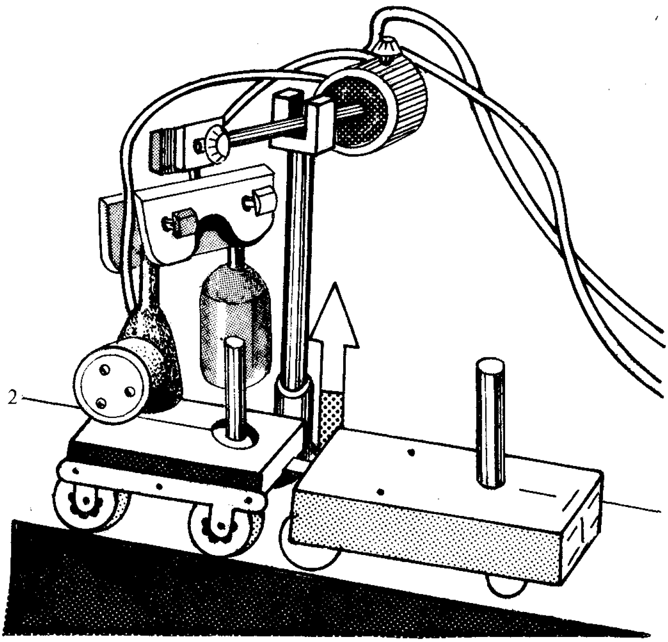


Fig. 5.6

Solución

Nos encontramos en presencia de un problema en el cual se produce la interacción de un hombre con un carro. Luego, nuestro sistema físico estará constituido por estos dos cuerpos.

La solución de este tipo de problema requiere del análisis de tres momentos del proceso. Estos son: primero, qué sucede un instante antes de la interacción; segundo, qué sucede durante la interacción; tercero, qué sucede después de la interacción.

Antes de la interacción, el hombre, cuya masa es m, posee una velocidad $\vec{v}_0$ y, en correspondencia, una cantidad de movimiento $\vec{p}_1$, mientras que el carro de masa M, que está en reposo, posee una cantidad de movimiento $\vec{p}_2$ nulo. Todas estas magnitudes estarán referidas a un sistema de referencia que ubicamos fijo en la superficie del suelo, de modo que el origen del sistema de coordenadas coincida con la posición inicial del carro (fig. 5.7).

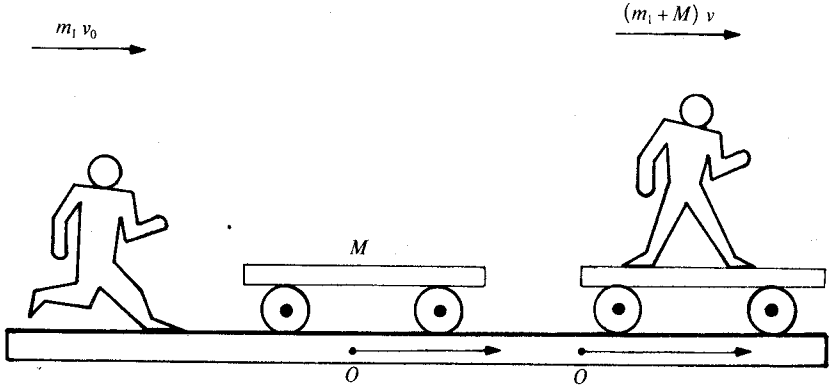


Fig. 5.7

Al ponerse en contacto los pies del hombre con el carro, se produce la interacción. Entre las plantas de los pies y la superficie del carro surgen fuerzas causadas por el rozamiento. La fuerza que actúa sobre el hombre es de sentido contrario a la velocidad $\vec{v}_0$ y tiende a frenar su movimiento, mientras que la fuerza de reacción que actúa sobre el carro lo pone en movimiento en la misma dirección y sentido de $\vec{v}_0$. Las fuerzas de interacción cesan cuando el hombre queda en reposo relativo al carro; por esta razón, un instante después de la interacción, ambos (el carro junto con el hombre) se moverán con una misma velocidad $\vec{v}$ por lo que poseerá una cantidad de movimiento final $\vec{P'}$. Precisamente, es la determinación del valor de $\vec{v}$, la incógnita de este problema.

Durante todo el proceso descrito, las fuerzas externas que actúan sobre el sistema están equilibradas. ¿Cuáles son estas fuerzas?

Las únicas fuerzas no compensadas que actúan en él son internas producto de la interacción, lo cual significa que se cumple la ley de conservación de la cantidad de movimiento.

De este análisis podemos obtener los datos siguientes:

Datos	*Incógnitas*
$v_1 = v_0$	$v_1' = v_2' = v = ?$
$v_2 = 0$	
m_1	
M	

Del análisis realizado se deduce que la solución del problema, o sea, la determinación de la velocidad final carro-hombre, se puede obtener a partir de la ecuación general de la ley de conservación de la cantidad de movimiento, es decir:

$$\vec{p_1} + \vec{p_2} = \vec{p_1'} + \vec{p_2'}$$

o

$$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = m_1\vec{v_1'} + m_2\vec{v_2'} \cdot$$

Si proyectamos las magnitudes incluidas en la expresión (1) sobre el eje X y las adecuamos a los datos, resulta que: $mv_0 = v(m + M)$.

Luego:

$$v = \frac{mv_0}{m + M}.$$

Es evidente que el resultado no depende del tiempo que dura la interacción de los pies del hombre con la superficie del carro, ni cómo varían dichas fuerzas durante el transcurso del tiempo de interacción.

La velocidad final del conjunto hombre-carro se calcula mediante la ecuación $v = mv_0/m + M$, la cual, como es evidente, es menor que v_0, pero tiene la misma dirección y sentido.

Trabajo de laboratorio 7
Comprobación de la ley de conservación de la cantidad de movimiento

Instrumentos y materiales: Carro, cronometrador de cinta, mordaza, pesa de masa 1 kg o un ladrillo o una bolsa de arena o tierra de masa 1 kg.

Indicaciones para el trabajo

1. Realiza un montaje similar al que se muestra en la figura 5.8.

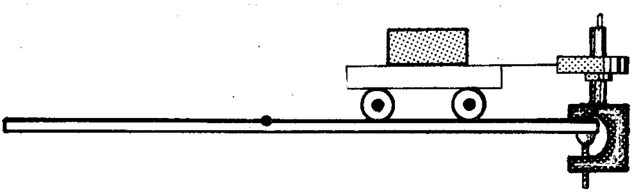


Fig. 5.8

2. Pon en movimiento al carro y cuando este pase por la posición A, deja caer sobre él con cuidado la carga.
3. Determina los valores de la velocidad del carro, antes y después de depositar la carga.
4. Calcula los valores de la cantidad de movimiento del sistema antes y después del fenómeno que se analiza.
5. Resume en una tabla confeccionada por ti los resultados del experimento. Elabora en tu libreta un informe en el que debes brindar las conclusiones que has obtenido sobre el fenómeno analizado.

Tareas

11. ¿Qué plantea la ley de conservación de la cantidad de movimiento para un sistema constituido por dos cuerpos?
12. ¿Qué le sucede a la cantidad de movimiento de un sistema si sobre él actúan fuerzas externas no compensadas?
13. De un tanque en movimiento se dispara el cañón. ¿Influirá el cañonazo sobre la velocidad del tanque?

5.3 *Aplicación de la ley de conservación de la cantidad de movimiento: movimiento reactivo*

La ley de conservación de la cantidad de movimiento permite describir el movimiento reactivo.

Este tipo de movimiento está difundido en la propia naturaleza. Así, por ejemplo, moluscos como los calamares y el pulpo, y algunos celentéreos como la medusa lo emplean para su locomoción. Los dos primeros se desplazan a través del agua, impulsados por un chorro de ese líquido que expulsan con gran velocidad.

El hombre conoció este tipo de movimiento desde hace mucho tiempo; lo empleó para hacer ascender hasta grandes alturas y con gran rapidez, los denominados fuegos artificiales. No obstante, es en la época actual cuando el movimiento reactivo ha alcanzado una gran aplicación.

Además de los ejemplos anteriores y gracias al extraordinario desarrollo alcanzado por la ciencia y la técnica, este movimiento constituye el principio de funcionamiento de los aviones a reacción, de los sistemas coheteriles de todo tipo y de las poderosas cosmonaves, capaces de poner en órbita a satélites o realizar viajes espaciales a la Luna o a otros planetas del Sistema Solar.

Las aplicaciones del movimiento reactivo en el campo de la cosmonaútica ha permitido, además, entre otros logros el que el hombre trascienda el marco de su habitat terrestre y haya iniciado la era del dominio del cosmos. En la figura 5.9 se muestra un esquema de la cosmonave que transportó al espacio cósmico al primer cosmonauta de América Latina, Coronel Arnaldo Tamayo Méndez.

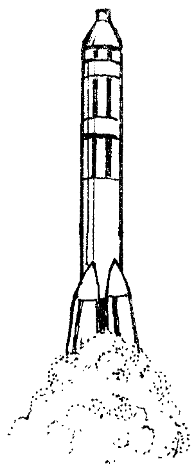


Fig. 5.9

Pero, *¿qué es el movimiento reactivo?*

Con la ayuda del modelo de cohete de agua escolar (fig. 5.10) se puede analizar las características principales del movimiento reactivo. En el interior del cohete existe cierta cantidad de agua que se mantiene a una presión superior a la atmosférica mediante aire comprimido que se inyecta con una bomba manual. Al liberar el cohete, el agua, bajo la acción de la fuerza de presión ejercida por el aire comprimido, comienza a salir a gran velocidad por la tobera en forma continua. Por reacción sobre el cohete, actúa una fuerza que lo impulsa en sentido contrario al chorro de agua: esta es la fuerza de reacción. De aquí el nombre de *movimiento reactivo.*

Es evidente que esto es consecuencia de la tercera ley de Newton y de la ley de conservación de la cantidad de movimiento.

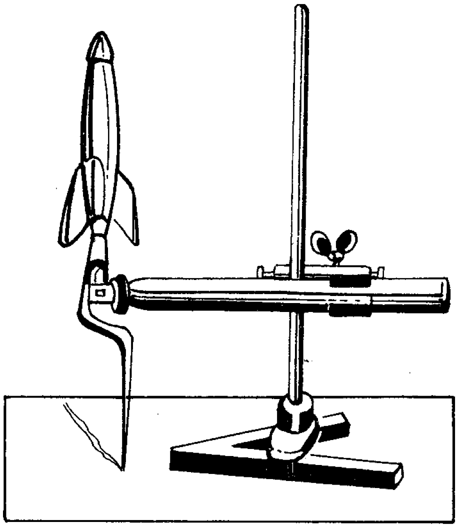


Fig. 5.10

La cantidad de movimiento del sistema cohete-agua antes del lanzamiento es nulo. Al liberar el cohete, el chorro adquiere cierta cantidad de movimiento, mientras que el cohete adquiere una cantidad de movimiento de igual valor, pero de sentido contrario, de forma que la cantidad de movimiento del sistema sea nulo, puesto que solo actúan en él fuerzas internas.

El cohete de agua es un modelo interesante que permite explicar el principio de funcionamiento de los cohetes reales. En estos últimos, el movimiento reactivo se produce como consecuencia de la expulsión por la cola del cohete de chorros de gases calientes a gran velocidad.

Es importante tener en cuenta que en los cohetes, las fuerzas internas producto de la interacción no son impulsivas de corta duración, como sucede en el caso de los proyectiles expulsados por las armas de fuego. En un cohete, la impulsión se mantiene continuamente a medida que el chorro de gases va saliendo. Por esta razón la velocidad del cohete se incrementa, y más aún si se considera que en la medida en que los gases escapan, la masa del sistema se reduce, lo cual incrementa la aceleración provocada por la fuerza reactiva que actúa sobre el cohete.

Para una interpretación más cabal del fenómeno descrito, desde un punto de vista cuantitativo, analicemos el caso siguiente: consideremos que sobre un bote hay parado un hombre; en el interior del bote hay una gran cantidad de piedras; todas iguales, de masa m. La masa total del sistema incluyendo la del hombre es M. Con el bote en reposo respecto a la orilla, el hombre comienza a lanzar sucesivamente piedras, todas con la misma velocidad v con respecto al bote, como se indica en la figura 5.11.

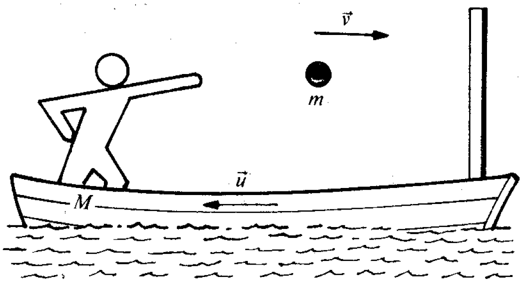


Fig. 5.11

Para el primer lanzamiento situaremos nuestro sistema de referencia en el agua, que consideraremos en reposo respecto a la orilla. Por causa de la interacción, la piedra adquiere una velocidad v, mientras que el conjunto hombre-bote adquiere una velocidad u.

En este caso las fuerzas que actúan son internas al sistema. Las fuerzas externas están equilibradas. Luego podemos aplicar la ley de conservación de la cantidad de movimiento:

$$\vec{p_1} + \vec{p_2} = \vec{p_1'} + \vec{p_2'}$$

donde:

$\vec{p_1}$ y $\vec{p_2}$ son la cantidad de movimiento de la piedra y el conjunto hombre-bote antes del lanzamiento; y
$\vec{p_1'}$ y $\vec{p_2'}$, la cantidad de movimiento correspondiente a estos cuerpos después del lanzamiento.

Pero:

$\vec{p_1} + \vec{p_2} = 0$ (porque la cantidad de movimiento inicial es nulo),

entonces:

$$\vec{p_1'} = -\vec{p_2'}$$
$$m\vec{v} = -(M - m)\vec{u}_1,$$

donde:

$\vec{u}_1$ es la velocidad que adquiere el conjunto hombre-bote después de lanzar la primera piedra.

$mv = -(M - m)u_1$ (trabajando con las proyecciones de $\vec{v}$ y $\vec{u}_1$)

$$u_1 = -\frac{m}{(M - m)} v. \tag{5.13}$$

De la ecuación 5.13 se deduce que la velocidad que adquiere el conjunto hombre-bote depende de la masa de la piedra que se lanza y de la velocidad con que esto se hace. Además, el conjunto se mueve en sentido contrario al de la piedra.

Analicemos qué sucede al lanzar la segunda piedra con la misma velocidad $\vec{v}$.

En este caso el sistema hombre-bote experimenta durante la interacción un nuevo impulso, por lo que su velocidad experimenta un nuevo incremento, pero en este caso, mayor que el primero, pues la masa del conjunto se redujo. Para facilitar el análisis cambiemos el sistema de referencia y ubiquémoslo en uno que se mueve con la misma velocidad del conjunto hombre-bote. Esto tiene por objetivo que al aplicar la ley de conservación de la cantidad de movimiento, el valor de la velocidad u_2 que adquiere el sistema sea en realidad el incremento de la velocidad.

Al adoptar este sistema de referencia la cantidad de movimiento inicial es nula. Después del lanzamiento, la de la piedra será $\vec{p}_1' = m\vec{v}$ y la del conjunto hombre-bote, $\vec{p}_2' = (M - 2m)\vec{u}_2$. Observa que la masa del conjunto ha disminuido en un valor equivalente a dos piedras.

Luego, aplicando la ley de conservación de la cantidad de movimiento resulta:

$\vec{p}_1' = -\vec{p}_2'$

$m\vec{v} = -(M - 2m)\vec{u}_2$

$mv = -(M - 2m)u_2$ (trabajando con las proyecciones de $\vec{v}$ y $\vec{u}_2$)

$$u_2 = -\frac{m}{(M - 2m)} v.$$

El incremento de la velocidad u_2 adquirida por el conjunto hombre-bote evidentemente es mayor en el segundo lanzamiento porque la masa resultante $(M - 2m)$ es menor.

Si procedemos de igual forma, se obtiene para el tercer lanzamiento un incremento de la velocidad igual a:

$$u_3 = -\frac{m}{(M - 3m)} v,$$

luego para un lanzamiento n-ésimo será:

$$u_n = -\frac{m}{(M - nm)} v.$$

Por otra parte, la velocidad del bote con respecto al agua es igual a la suma de las velocidades $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ en la que se cumple que:

$$u_1 < u_2 < u_3 < \ldots < u_n.$$

De este análisis es fácil explicar el comportamiento del cohete, en el cual la masa Δm que expulsa continuamente en forma de un chorro, de gases incandescentes que sale a gran velocidad v con respecto al cohete. Por esta razón la cantidad de movimiento del cohete se incrementa constantemente, y su velocidad aumenta a medida que su masa se reduce.

Por analogía con el análisis realizado se puede plantear que para el caso del cohete el incremento de su velocidad u que adquiere en cualquier instante de tiempo es:

$$\vec{u} = \frac{\Delta m \vec{v}}{m}$$

donde:

m es la masa del cohete en ese instante.

Tareas

14. ¿En qué consiste el movimiento reactivo?

15. ¿Puede un bote de velas impulsarse con el aire soplado sobre sus velas por un ventilador que está fijo en el bote?

16. Menciona ejemplos en los que el movimiento de los cuerpos seleccionados sea reactivo.

17. Explica el principio de funcionamiento de un molinete hidráulico que se utiliza para regar el agua en los jardines.

Tareas generales del capítulo

1. Calcula el módulo de la cantidad de movimiento de un automóvil de masa 1 500 kg que se mueve a una velocidad de 60 km/h.
2. ¿Cuál es el valor de la cantidad de movimiento de un camión de 10 t cuya velocidad es de 40 km/h?
3. ¿Qué valor posee el impulso capaz de producir en una masa de 8 kg una variación de velocidad de 4 km/h?
4. ¿Qué valor posee la fuerza aplicada a un cuerpo si al actuar sobre él durante 5 s le causa una variación de la cantidad de movimiento de valor igual a 7 kg m/s en su misma dirección y sentido.
5. La velocidad de un cuerpo de 3 kg de masa pasó de 10 m/s a 18 m/s bajo la acción de una fuerza de 12 N, paralela a la dirección de la velocidad inicial.
   a) ¿Qué impulso le comunicó la fuerza al cuerpo?
   b) ¿Durante qué tiempo actuó la fuerza?
6. Una pelota de béisbol de masa 80 g es lanzada con una velocidad de 24 m/s. Después de bateada, su velocidad es de 36 m/s, pero en sentido opuesto:
   a) ¿Cuánto varió la cantidad de movimiento de la pelota?
   b) ¿Cuál fue el valor del impulso provocado por el bate?
   c) Si la pelota permaneció en contacto con el bate durante 2 ms, ¿cuál es la fuerza media durante el golpe?
7. Un taco de billar le pega a una bola ejerciendo una fuerza media de 50 N durante un tiempo de 10 ms. Calcula el desplazamiento recorrido por la bola durante 2 s si se supone que esta se mueve con MRU a partir de impacto del taco.
8. Determina el impulso que debe aplicar un arco a una flecha de 200 g para que al lanzarla horizontalmente desde 5 m del suelo caiga a una distancia de 30 m. ¿Cuál será el valor medio de la fuerza impulsora si la cuerda actúa durante 1 ms sobre la flecha?
9. Una bola de 1 kg cae verticalmente desde una altura de 31,25 m, rebota en el piso y sube hasta una altura de solo 5 m. Si el

contacto de la bola con el suelo fue de 0,02 s, determina el valor medio de la fuerza del piso sobre la bola.

10. Un joven está sentado en un trineo que se halla en un estanque de hielo. ¿Cómo podrá alcanzar la orilla por sí mismo? En el trineo hay varias bolas de nieve.

11. Un tirador con esquíes puestos se halla sobre una superficie horizontal de hielo y hace un disparo horizontal con una pistola; si la masa del tirador con todo su equipo y la pistola es de 70 kg y la de la bala 10 g y su velocidad de 100 m/s, calcula la velocidad con que se mueve el tirador y en qué sentido lo hará.

12. ¿Qué velocidad de retroceso adquiere un cañón al hacer un disparo si la masa de este es de 10^3 kg, la del proyectil que dispara de 5 kg y la velocidad de este último es de 600 m/s?

    a) Considera el disparo horizontal.

    b) Considera ahora el disparo con 45° de elevación.

13. Un cañón dispara un proyectil de masa 10 kg con una velocidad inicial de 570 m/s, respecto a una lancha. ¿En cuántos metros por segundo disminuirá la velocidad de la lancha que transporta dicho cañón cuando se dispara el proyectil en la misma dirección y sentido del movimiento de esta? ¿Cuánto será la velocidad de la lancha inmediatamente después del disparo si esta se movía a razón de 10 m/s antes de hacerse el disparo? La masa de la lancha junto con la del cañón es de 4 t.

14. Si en el caso de la tarea 10, el trineo tiene una masa de 20 kg, la del joven es de 50 kg, y la de cada bola de nieve es de 1 kg, determina la velocidad del trineo cuando el joven lanzó la cuarta y última bola de nieve si lanza cada una con una velocidad de 6 m/s.

15. Un núcleo de radio 226, que contiene 88 protones, y 138 neutrones sufre un proceso de desintegración en el cual emite una partícula que contiene 2 protones y 2 neutrones. Las masas del protón y del neutrón son aproximadamente iguales. Cuando el núcleo está inicialmente en reposo, la partícula sale a una velocidad de $1{,}5 \cdot 10^7$ m/s.
    ¿Cuál es la velocidad final del núcleo residual? ¿Cuál es su sentido y dirección?

16. Un carro de 20 kg de masa se mueve con una velocidad de valor igual a 2 m/s. Un muchacho de 60 kg de masa salta del carro, al suelo. Al tocar el suelo ocurre que:
   a) Se mueve con una velocidad de valor igual a la inicial del carro pero de sentido contrario;
   b) no se mueve respecto al suelo;
   c) se mueve con una velocidad de 1 m/s y en el mismo sentido que el carro.

   En cada caso, ¿qué velocidad posee el cuerpo después del salto del muchacho?

17. Un vagón de 10 t de masa, abierto por su parte superior, se desliza por una vía horizontal de rozamiento despreciable. Llueve con intensidad y la lluvia cae verticalmente. El vagón estaba inicialmente vacío y se movía con una velocidad de 60 m/s. ¿Con qué velocidad se moverá el carro después de recoger 1 t de agua?

18. Un hombre, cuya masa es de 70 kg, corre con una velocidad de 7 m/s y alcanza un carro de 30 kg de masa que se mueve con una velocidad de valor igual a 2 m/s. Si el hombre salta sobre el carro quedando fijo sobre su superficie, calcula la velocidad final con que se mueven ambos.

Capítulo 6
TRABAJO Y ENERGÍA. LEY DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

En el capítulo anterior vimos la gran importancia teórica y práctica que tiene la ley de conservación de la cantidad de movimiento, en particular, para la solución de problemas donde la aplicación directa de las leyes de Newton se hace difícil y compleja. En este capítulo estudiaremos la ley de conservación de la energía mecánica, también de gran importancia y trascendencia, y para lo cual se requiere que continuemos profundizando en dos conceptos fundamentales ya conocidos: trabajo mecánico y energía mecánica, muy relacionados entre sí.

6.1 *Trabajo mecánico*

¿Qué magnitud es el trabajo mecánico?

La magnitud que hemos denominado trabajo apareció en mecánica en el siglo XIX (casi 150 años después del descubrimiento de las leyes de Newton), cuando la humanidad comenzó el uso de las máquinas y mecanismos. En efecto, durante el funcionamiento de una máquina se dice que ella "trabaja". Por ejemplo, realiza trabajo un tractor al tirar del arado, una máquina de tornear al elaborar una pieza, una grúa al elevar una carga.

Esto no significa que el trabajo esté relacionado solo con las máquinas. Antes de la aparición de los tractores, tornos y grúas, se araba la tierra, se elaboraban piezas, se elevaban cargas, y sin duda se realizaba trabajo.

Lo general, en todos los ejemplos mencionados es el movimiento de los cuerpos, y que sobre cada uno de estos cuerpos en movimiento actúan una o varias fuerzas. En una máquina de tornear la fuerza se aplica sobre el objeto que se elabora, en la grúa se aplica a la carga que se eleva, etcétera.

En grados anteriores, al abordar el concepto *trabajo mecánico* se indicó, que cuando sobre un cuerpo actúa una fuerza constante $\vec{F}$ y bajo la acción de esta, el cuerpo realiza un desplazamiento $\vec{s}$ en la dirección que actúa dicha fuerza, entónces sobre el cuerpo se realiza un trabajo que es igual al producto de los valores de la fuerza y el desplazamiento:

$$W = Fs. \tag{6.1}$$

Ya conoces, además, la unidad de trabajo en el Sistema Internacional: el joule (J) que es el trabajo que realiza una fuerza de 1 N al desplazar el cuerpo 1 m.

$$1 \text{ J} = 1\text{N} \cdot \text{m}.$$

Definición general de trabajo

Hasta ahora hemos analizado el caso en que la dirección de la fuerza coincide con la del desplazamiento. Sin embargo, la dirección de la fuerza puede también no coincidir con la del desplazamiento. En la figura 6.1 se muestra un cuerpo que se desliza por una superficie horizontal lisa; la fuerza $\vec{F}$ aplicada a él mediante una cuerda, está dirigida formando un ángulo α con respecto a la superficie horizontal. ¿Cómo calcular el trabajo que ejecuta la fuerza $\vec{F}$ si el desplazamiento del cuerpo es igual a $\vec{s}$?

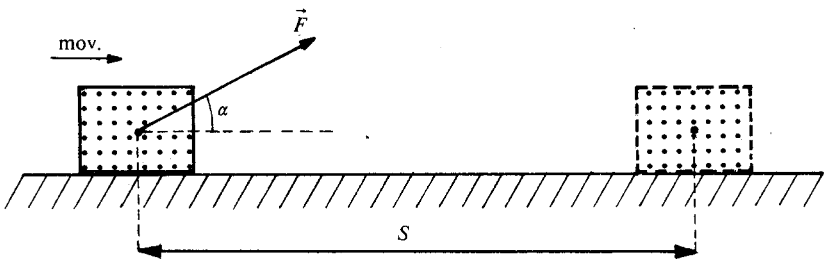


Fig. 6.1

Si proyectamos la fuerza $\vec{F}$ en la dirección del movimiento del cuerpo (fig. 6.2) obteniendo la proyección F_x, se podría calcular el trabajo de esta última mediante la expresión:

$$W = F_x s.$$

De la figura 6.2 tenemos que:

$$F_x = F \cos \alpha$$

por tanto:

$$W = Fs \cos \alpha. \tag{6.2}$$

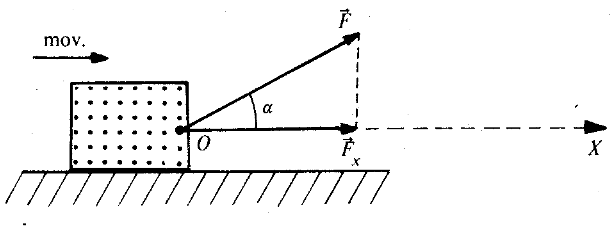


Fig. 6.2

La expresión (6.2) es la más general para calcular el trabajo en el caso en que la fuerza $\vec{F}$ es constante.

El trabajo realizado por una fuerza constante se define como aquella magnitud escalar que se calcula mediante el producto de los módulos de la fuerza y el desplazamiento por el coseno del ángulo entre los vectores fuerza y desplazamiento.

La expresión (6.1) es un caso particular de la (6.2) ya que en ese caso $\alpha = 0°$ y, por tanto, $\cos \alpha = 1$, en el cual $\vec{F}$ y $\vec{s}$ son colineales y del mismo sentido.

Hasta ahora consideramos que la dirección de la fuerza y del desplazamiento coincidían o forman un ángulo agudo. ¿Realizan trabajo las fuerzas dirigidas contrarias al movimiento, por ejemplo, la fuerza de rozamiento?

Para ellas, $\alpha = 180°$, $\cos \alpha = -1$ y el trabajo $W = -F \cdot s$, es decir, las fuerzas dirigidas en sentido contrario al desplazamiento realizan trabajo, pero este tiene signo contrario al del trabajo realizado por la fuerza dirigida en sentido del movimiento (desplazamiento) del cuerpo. Así pues, el trabajo puede ser tanto positivo como negativo.

El trabajo se considera positivo cuando las direcciones de la fuerza y el desplazamiento coinciden o forman un ángulo agudo ($0 \leqslant \alpha < 90°$) y se considera negativo cuando la fuerza y el desplazamiento son de sentidos contrarios o sus direcciones forman un ángulo obtuso ($90° < \alpha \leqslant 180°$).

Por último, la dirección de la fuerza puede ser perpendicular al desplazamiento del cuerpo en movimiento. En este caso, $\alpha = 90°$, $\cos \alpha = 0$ y $W = 0$. Por ejemplo, al desplazar una carga en dirección horizontal, la fuerza de gravedad a la que ella está sometida, es perpendicular a la dirección del desplazamiento (fig. 6.3).

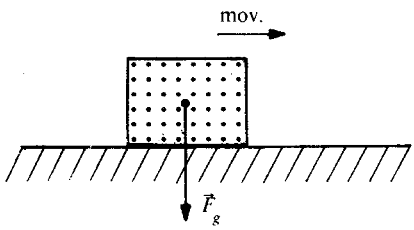


Fig. 6.3

Por esta razón, cuando un cuerpo se desplaza por un plano horizontal, el trabajo de la fuerza de gravedad es igual a cero. Tampoco realiza trabajo una fuerza que obliga al cuerpo a moverse uniformemente describiendo una circunferencia, ya que, como sabemos, esta fuerza está dirigida a lo largo del radio hacia el centro de la circunferencia y, por consiguiente, en cualquier punto es perpendicular al desplazamiento del cuerpo. Por ejemplo, la fuerza de tensión de un hilo al que está atado un cuerpo en movimiento uniforme por una circunferencia, no realiza trabajo.

Si la fuerza cuyo trabajo se desea calcular fuera variable y la trayectoria curvilínea, estaríamos frente a una situación de mayor generalidad; no obstante, la expresión $W = F s \cos \alpha$ no pierde su significado físico, solo cambia el método matemático para calcular el trabajo mediante ella.

Trabajo de la resultante de un sistema de fuerzas

En el caso en que actúan más de una fuerza, el cálculo del trabajo total puede hallarse mediante la suma algebraica de los trabajos o puede hallarse el trabajo realizado por la fuerza resultante, que es igual a la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan multiplicada por el desplazamiento del cuerpo.

En la figura 6.4 se representa un cuerpo m sometido a la acción de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$.

La fuerza $\vec{F}$, resultante de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, es $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

El cuerpo m se moverá bajo la acción de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ a lo largo de la recta r donde actúa su resultante.

Si s es la distancia recorrida sobre dicha recta, el trabajo de la resultante será:

$$W = F s.$$

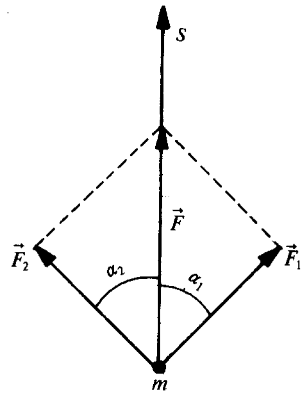


Fig. 6.4

Sean α_1 y α_2 los ángulos que forman $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ con la dirección de su resultante; entonces, si proyectamos $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ en la dirección de s tenemos:

$$F'_1 = F_1 \cos \alpha_1 \quad \text{y} \quad F'_2 = F_2 \cos \alpha_2,$$

y por tanto:

$$F = F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2$$

de ahí que:

$$W = Fs = (F_1\, s \cos \alpha_1 + F_2\, s \cos \alpha_2)$$

pero como:

$$F_1\, s \cos \alpha_1 = W_1 \qquad \text{y} \qquad F_2\, s \cos \alpha_2 = W_2$$

en este caso se obtiene:

$$W = W_1 + W_2.$$

Esto permite concluir que el trabajo de la resultante de un sistema es igual a la suma de los trabajos de sus componentes.

Problema resuelto

Un caballo tira de una carreta con una fuerza de 500 N que forma un ángulo de 30° con la horizontal (fig. 6.5). El carro se mueve

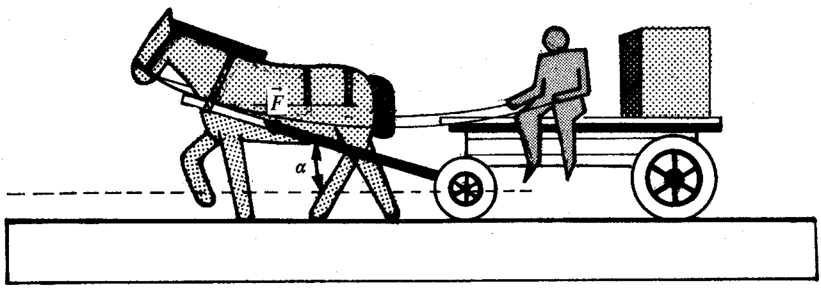


Fig. 6.5

con una velocidad constante de 6 km/h. ¿Qué trabajo realiza el caballo durante un tiempo de 5 s?

Solución

Para determinar el trabajo hay que emplear la expresión:

$$W = F s \cos \alpha \cdot \qquad (1).$$

En este caso, F y α son datos y el valor de s no se conoce, pero se puede hallar en función de v y t que también son datos.

Como el cuerpo se mueve con movimiento rectilíneo uniforme.

$$v = \frac{s}{t},$$

de donde:

$$s = vt. \qquad (2)$$

Sustituyendo la expresión (2) en la (1), obtenemos:

$$W = Fvt \cos \alpha$$

y por tanto:

$$W = 200 \text{ N} \cdot 1{,}6 \text{ m/s} \cdot 5 \text{ s} \cdot 0{,}8$$
$$W = 3\ 200 \text{ J}.$$

Tareas

1. ¿A qué es igual el trabajo de una fuerza dada si su dirección forma un ángulo con el desplazamiento del cuerpo?
2. ¿En qué condiciones una fuerza aplicada a un cuerpo en movimiento no realiza trabajo?

3. ¿De qué magnitudes depende el trabajo de una fuerza?
4. ¿Es el trabajo una magnitud escalar o vectorial?
5. ¿En cuál caso la fuerza realiza trabajo positivo y en cuál negativo? Cita dos ejemplos en cada caso.
6. ¿Cómo se puede calcular el trabajo de la resultante de un sistema de fuerzas?
7. Si un automóvil se mueve por una carretera horizontal, ¿realiza trabajo la fuerza de gravedad que actúa sobre el automóvil?
8. Un cuerpo fue lanzado verticalmente hacia arriba. Determina empleando la expresión general del trabajo si el trabajo de la fuerza de gravedad es positivo o negativo: a) al subir el cuerpo, b) al caer este.

6.2 *Relación entre el trabajo y la energía. Energía cinética*

Consideremos un cuerpo sobre el que actúa una fuerza constante $\vec{F}$, la cual puede ser también la resultante de varias fuerzas. La fuerza le comunica al cuerpo una aceleración, gracias a lo cual varía su velocidad, y además, en este caso, realiza trabajo, ya que el cuerpo se desplaza.

Es lógico suponer que entre el trabajo realizado por la fuerza y la variación de la velocidad del cuerpo existe determinada relación. Intentemos determinar esta relación.

Examinemos el caso más sencillo: cuando los vectores fuerza $\vec{F}$ y desplazamiento $\vec{s}$ están dirigidos a lo largo de una misma recta y en un mismo sentido. Tracemos un eje de coordenadas X dirigido hacia ese mismo lado (fig. 6.6) y proyectemos $\vec{F}$ y $\vec{s}$.

Entonces, los módulos de las proyecciones de la fuerza $\vec{F}$, del desplazamiento $\vec{s}$, de la aceleración $\vec{a}$ y de la velocidad $\vec{v}$ serán iguales a los módulos de los propios vectores.

El trabajo de la fuerza en este caso será (ec. 1):

$$W = F_x s_x \quad \text{o} \quad W = F \cdot s,$$

ya que $F_x = F$ y $s_x = s$.

De acuerdo con la segunda ley de Newton:

$$F = ma \tag{6.3}$$

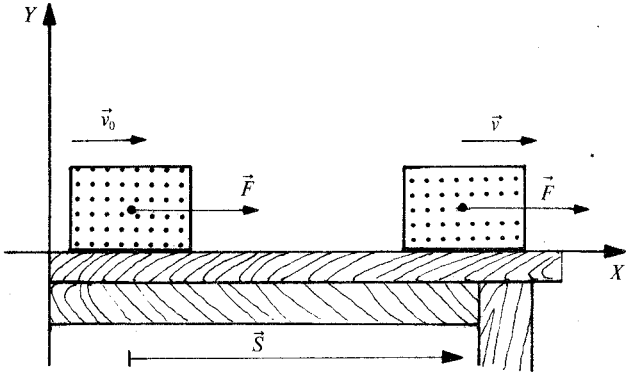


Fig. 6.6

y por tanto, $W = mas$.

Por otra parte, en el capítulo 2, determinamos que en un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado se cumple que:

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2\,a} \tag{6.4}$$

donde:

v_0 y v son las velocidades incial y final del cuerpo para el tramo del recorrido considerado.

Si sustituimos en la expresión (6.1), la (6.3) y la (6.4), obtenemos:

$$W = F\,s = ma\,\frac{v^2 - v_0^2}{2\,a} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}. \tag{6.5}$$

Hemos deducido una expresión que relaciona el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ con la variación de la velocidad del cuerpo (del cuadrado de la velocidad).

La expresión en el segundo miembro de la igualdad (6.5) es la variación[1] de la magnitud $mv^2/2$. Esta magnitud se denomina *energía cinética* del cuerpo en movimiento y se designa por la letra E_C. Entonces la expresión (6.5) adquiere la forma:

$$W = E_C - E_{C_0} \quad \text{o} \quad W = \Delta E_C \;\cdot \tag{6.6}$$

[1] Recordemos que se denomina variación de cierta magnitud, la diferencia entre sus valores final e inicial (esta puede ser positiva o negativa).
Esta se representa por la letra griega delta (Δ).

El trabajo de la resultante de las fuerzas aplicadas a un cuerpo es igual a la variación de la energía cinética del cuerpo.

De la expresión (6.5) se deduce que cuando la fuerza que actúa está dirigida en el mismo sentido del movimiento, es decir, realiza trabajo positivo ($W>0$), la energía cinética del cuerpo aumenta:

$$\frac{mv^2}{2} > \frac{mv_0^2}{2}.$$

Esto se debe a que aumenta el valor absoluto de su velocidad. Si la fuerza está dirigida contraria al desplazamiento, ella realiza trabajo negativo ($W<0$), la energía cinética disminuye.

De la ecuación (6.5) se desprende que la energía cinética se mide en las mismas unidades que el trabajo, es decir, en joule (J).

El teorema de la energía cinética fue obtenido a partir de la segunda ley de Newton; por ello, es válido independientemente del tipo de fuerzas que actúan sobre el cuerpo: la fuerza de elasticidad, la fuerza de fricción, la fuerza de gravitación universal, u otras.

El significado físico de la energía cinética es fácilmente comprensible.

Consideremos un cuerpo de masa m que se encuentra en reposo ($v_0 = 0$), al cual se requiere comunicarle una cierta velocidad v; por ejemplo, es necesario comunicar dicha velocidad a un proyectil que se encuentra en reposo en el cañón de una pieza de artillería. Para ello se requiere realizar un determinado trabajo W.

¿Cómo determinar la medida de este trabajo?

Del teorema de la energía cinética se deduce que:

$$W = \frac{mv^2}{2} - 0 = \frac{mv^2}{2}.$$

En la expresión de la energía cinética, v^2 es un escalar cuyo valor será siempre positivo, por lo que la energía cinética es una magnitud escalar que toma solo valores positivos.

La energía cinética que posee un cuerpo de masa m, que se mueve con velocidad v, es la magnitud física escalar que nos da una medida del movimiento mecánico del cuerpo y que es igual en valor al trabajo que debe realizar la fuerza que actúa sobre el mismo , para comunicarle dicha velocidad.

Es necesario tener en cuenta que como el movimiento es relativo, la velocidad de un cuerpo dependerá del sistema de referencia adoptado y la energía cinética podrá tomar valores diferentes; no obstante, lo que interesa en los fenómenos físicos son las variaciones de la energía cinética.

Problema resuelto

¿Qué trabajo es necesario realizar para que un tren que se mueve con una velocidad $v_0 = 72$ km/h, aumente su velocidad hasta $v = 108$ km/h? La masa del tren es $m = 1\,000$ t. ¿Qué fuerza debe ser aplicada al tren, si este aumento de velocidad ocurre a lo largo de una longitud de 2 km? Considere el movimiento uniformemente acelerado.

Solución

Como se conocen las velocidades inicial y final del tren en un tramo dado, el trabajo se puede calcular mediante la ecuación:

$$W = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Sustituyendo los datos dados en la ecuación anterior obtenemos:

$$W = \frac{10^6 \text{ kg } (30 \text{ m/s})^2}{2} - \frac{10^6 \text{ kg } (20 \text{ m/s})^2}{2}$$

$$W = 250 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

Para calcular la fuerza $\vec{F}$ partimos de la definición de trabajo para el caso en que la dirección de la fuerza y el desplazamiento coinciden, es decir:

$$W = F\,s$$

por consiguiente

$$F = \frac{W}{s},$$

de donde, sustituyendo, obtenemos:

$$F = \frac{250 \cdot 10^6 \text{ J}}{2\,000 \text{ m}}$$

$$F = 125 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

Tareas

9. ¿Qué es la energía cinética del cuerpo? ¿Es esta magnitud escalar o vectorial?
10. ¿En qué consiste el teorema de la energía cinética?
11. ¿Cómo varía la energía cinética de un cuerpo si la fuerza que se le aplica realiza trabajo positivo?
12. ¿Cómo varía la energía cinética de un cuerpo si la fuerza que se le aplica realiza trabajo negativo?
13. ¿Variará la energía cinética de un cuerpo en movimiento al cambiar la dirección del vector velocidad?

6.3 *Trabajo de la fuerza de gravedad. Fuerzas conservativas*

El teorema de la energía cinética, como ya fue analizado, es válido para cualquier tipo de fuerzas, ya que este teorema es una consecuencia directa de la segunda ley de Newton. Sin embargo, el trabajo realizado por cada una de las fuerzas mecánicas que conocemos puede ser calculado, no empleando el teorema de la energía cinética, sino a partir de la ecuación del trabajo $W = Fs$ y de las expresiones que obtuvimos para cada tipo de fuerza.

Calculemos el trabajo de la fuerza de gravedad durante la caída de un cuerpo (por ejemplo, verticalmente hacia abajo).

En el instante inicial de tiempo el cuerpo se encuentra a una altura h_1 respecto a un cierto nivel de referencia y en el instante final se encuentra a la altura h_2 respecto al mismo nivel (fig. 6.7). En este caso el cuerpo realiza un desplazamiento igual en módulo a $h_1 - h_2$.

Las direcciones de la fuerza de gravedad y el desplazamiento coinciden por lo que el trabajo de la fuerza de gravedad es positivo e igual a:

$$W = F_g(h_1 - h_2) \qquad \text{o} \qquad W = mg(h_1 - h_2). \tag{6.7}$$

Las alturas h_1 y h_2 pueden ser calculadas no necesariamente desde la superficie de la Tierra, sino a partir de cualquier nivel de referencia: el piso de una habitación, la superficie de una mesa, el fondo de una zanja cavada en la tierra, etc. Esto se debe a que en la expresión (6.7) lo que se tiene en cuenta es la diferencia de altura y esta no depende del nivel de referencia adoptado.

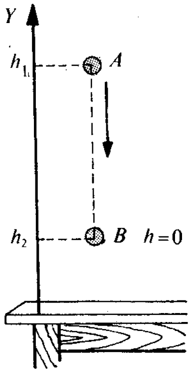


Fig. 6.7

Si en nuestro ejemplo, situamos el nivel de referencia de la altura en *B*, en este caso $h_2 = 0$. A este nivel se le denomina nivel cero.

En estas condiciones el trabajo realizado al llevar el cuerpo desde *A* hasta *B* se calcula mediante la expresión:

$$W = F_g h = mgh, \qquad (6.8)$$

donde:

h es la distancia vertical entre los niveles *A* y *B*.

Si el cuerpo se mueve verticalmente hacia arriba $\vec{F_g}$ y $\vec{s}$ tienen sentidos contrarios y el trabajo será negativo. En este caso si el cuerpo se eleva hasta una altura *h* respecto al nivel cero, el trabajo será:

$$W = -F_g h = -mgh.$$

Ahora, aclaremos qué trabajo realiza la fuerza de gravedad cuando el cuerpo se mueve, pero no verticalmente.

Como ejemplo, examinemos el movimiento de un cuerpo por un plano inclinado *AC* de altura *h* que forma un ángulo α con la horizontal (fig. 6.8).

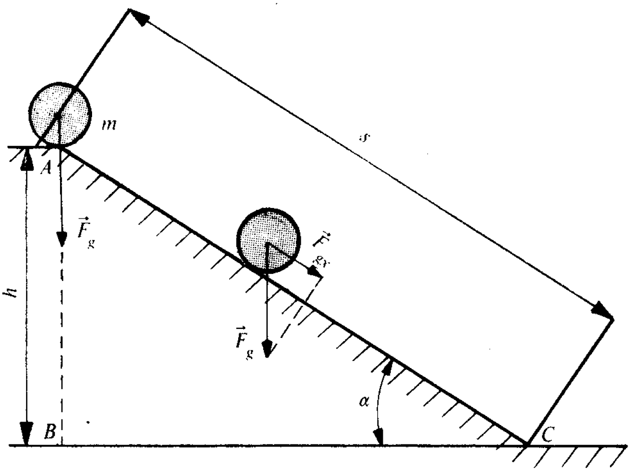


Fig. 6.8

Supongamos que un cuerpo de masa m realiza un desplazamiento $\vec{s}$ cuyo módulo es igual a la longitud del plano. El trabajo de la fuerza de gravedad $\vec{F_g}$ en este caso, es necesario calcularlo como el producto del valor absoluto del desplazamiento por la proyección de la fuerza de gravedad F_{gx} en la dirección del desplazamiento. Esto es:

$$W = F_{gx}\, s$$

donde:

$$F_{gx} = F_g \text{ sen } \alpha = mg \text{ sen } \alpha.$$

Del ΔABC se evidencia que:

$$s = \frac{h}{\text{sen } \alpha}.$$

De ahí que:

$$W = mg \text{ sen } \alpha \frac{h}{\text{sen } \alpha} = mgh,$$

o sea:

$$W = mgh = F_g h.$$

Como se puede apreciar hemos obtenido la misma expresión que la de la ecuación (6.8).

Resulta que el trabajo de la fuerza de gravedad no depende si el cuerpo se mueve verticalmente o por un camino más largo por un plano inclinado; es decir, para una misma "pérdida de altura" el trabajo es el mismo.

Lo anterior es válido también para un cuerpo que desciende desde una altura h por una trayectoria curvilínea cualquiera (fig. 6.9).

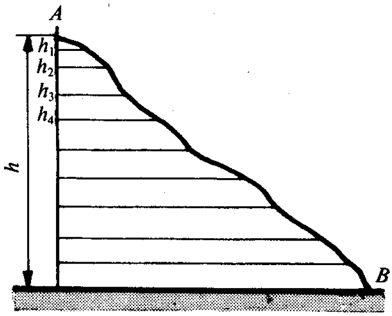


Fig. 6.9

En este caso para calcular el trabajo podemos representarnos mentalmente la trayectoria dividida en pequeños sucesivos desplazamientos rectilíneos, donde cada tramo será un plano inclinado de pequeña longitud.

El trabajo de la fuerza de gravedad no depende de la trayectoria del cuerpo y siempre es igual al producto del módulo de la fuerza de gravedad por la diferencia de alturas en las posiciones inicial y final del cuerpo.

Ya conocemos que durante el movimiento hacia abajo, el trabajo es positivo y para el movimiento hacia arriba, es negativo; por tanto, si después de subir, el cuerpo regresa al punto inicial, el trabajo de tal recorrido, que comenzó y terminó en el mismo punto es igual a cero.

Esta es una de las características de la fuerza de gravedad, el trabajo de la fuerza de gravedad en una trayectoria cerrada es igual a cero.

Esta característica de la fuerza de gravedad la poseen muchas otras fuerzas, como por ejemplo, las fuerzas elásticas, las fuerzas electrostáticas.

Todas las fuerzas cuyo trabajo no depende del camino recorrido, sino de las posiciones inicial y final, o lo que es equivalente, cuyo trabajo en una trayectoria cerrada es nulo se denominan fuerzas conservativas.

Las fuerzas que no cumplen con esta condición se denominan *fuerzas no conservativas.* Un ejemplo típico de fuerza no conservativa es la fuerza de rozamiento cinético. En este caso, como la fuerza es de sentido opuesto al desplazamiento ($\alpha = 180°$), el trabajo realizado por ella es siempre negativo y, por tanto, si un cuerpo se desplaza por una superficie con fricción desde un punto A a otro B y regresa de nuevo a A, el trabajo total por la trayectoria cerrada también será negativo, es decir, diferente de cero.

Tareas

14. ¿Depende el trabajo de la fuerza de gravedad de la longitud del recorrido realizado por el cuerpo y de la masa de este?
15. ¿A qué equivale el trabajo de las fuerzas que equilibran a la fuerza de gravedad?
16. Un cuerpo lanzado formando cierto ángulo con el horizonte, describió una parábola y cayó a la tierra. ¿A qué es igual el trabajo de la fuerza de gravedad si los puntos inicial y final de la trayectoria se encuentran situados en una misma horizontal?
17. ¿Qué fuerza es la que realiza trabajo durante el movimiento de un cuerpo por un plano inclinado sin rozamiento? ¿Depende este trabajo de la longitud del plano inclinado?
18. ¿Cuándo una fuerza es conservativa?
19. ¿Es la fuerza de gravedad una fuerza conservativa? Explica tu respuesta.
20. Cita ejemplos de fuerzas conservativas.

6.4 *Energía potencial gravitatoria*

La igualdad $W = mg\,(h_1 - h_2)$ que expresa el trabajo de la fuerza de gravedad puede ser representada de otra forma:

$$W = -(mgh_2 - mgh_1). \qquad (6.9)$$

Ahora en el segundo miembro de la igualdad vemos una expresión que es la variación de la magnitud igual al producto *mgh*. De esta se deduce que el trabajo de la fuerza de gravedad es igual a la variación de esta magnitud, pero con signo contrario.

En el epígrafe 6.2 analizamos que el trabajo de la fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo era igual a la variación de una magnitud que denominamos energía cinética ($1/2\ mv^2$); ahora nos encontramos otra magnitud cuya variación, aunque con signo contrario, también es igual al trabajo de cierta fuerza, que en este caso es la fuerza de gravedad. Por esta causa la magnitud *mgh* también se denomina energía, pero no cinética, sino potencial gravitatoria y es igual a la energía que adquiere un cuerpo al ser levantado una altura h respecto al nivel cero. Con frecuencia, para mayor brevedad, la magnitud *mgh* recibe el nombre de *energía potencial del cuerpo.*

El trabajo de la fuerza de gravedad es igual a la variación de la energía potencial tomada con signo contario.

El signo menos ($-$) delante de la variación de la energía potencial significa que, siendo positivo el trabajo de la fuerza de gravedad (el cuerpo cae), esta energía disminuye y por el contrario, para el trabajo negativo de la fuerza de gravedad (el cuerpo es lanzado hacia arriba), la energía potencial aumenta.

Si representamos la energía potencial por $E_p = mgh$, podremos escribir:

$$W = -(E_{p2} - E_{p1}) \quad \text{o} \quad W = \Delta E_p. \tag{6.10}$$

Si en la expresión (6.9) $h_2 = 0$ (nivel cero) y designamos la altura del cuerpo respecto a dicho nivel por h, entonces $E_{p2} = mgh_2 = 0$ y la ecuación (6.1) toma la forma:

$$E_p = W.$$

La energía potencial de un cuerpo, sobre el que actúa la fuerza de gravedad, es una magnitud física escalar que en valor es igual al trabajo realizado por dicha fuerza sobre el cuerpo, al hacerlo descender hasta el nivel cero de energía potencial.

A diferencia de la energía cinética, la cual depende de la velocidad del cuerpo, la energía potencial no depende de esta magnitud, de forma que un cuerpo en reposo puede poseer energía potencial. La energía potencial depende de la posición del cuerpo respecto al nivel cero, es decir, de las coordenadas del cuerpo (h, en este caso, es su coordenada).

Como el nivel cero puede ser elegido de manera arbitraria, un cuerpo que se encuentre por debajo de ese nivel, por ejemplo, una piedra en el fondo de un pozo, si se toma como nivel cero la superficie de la Tierra, su coordenada será negativa y en tal caso la energía potencial del cuerpo también será negativa.

Por tanto, el signo de la energía potencial y su valor absoluto dependen de la elección del nivel cero.

No obstante, en lo que respecta al trabajo que se realiza durante el desplazamiento del cuerpo, este queda definido por la variación de la energía potencial del cuerpo y no depende de la elección del nivel cero.

Problema resuelto

Un proyectil de 1 kg es lanzado desde la superficie de la Tierra. ¿Qué trabajo ha realizado la fuerza de gravedad cuando el proyectil se encuentra a una altura de 20 m?

Solución

$h = 20$ m

En el problema se pide el trabajo de la fuerza de gravedad, que como se sabe, es una fuerza conservativa. Por tanto, el trabajo no depende de la trayectoria, solo de las posiciones inicial y final, y se puede aplicar la expresión que relaciona el trabajo con la variación de la energía potencial:

$$W = -(E_{p2} - E_{p1}).$$

Tomando como nivel cero el de la energía potencial en la superficie de la Tierra, queda:

$$W = -E_p = -mgh$$
$$W = -11 \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 20 \text{ m}$$
$$W = -196 \text{ J}.$$

El signo menos se debe a que el trabajo es en contra de la fuerza de gravedad, es decir, este es negativo.

Tareas

20. ¿Cómo está relacionado el trabajo de la fuerza de gravedad con la energía potencial de un cuerpo?

21. ¿Cómo varía la energía potencial de un cuerpo durante su caída libre?

22. ¿Qué sucede con la energía potencial de un cuerpo durante su movimiento hacia arriba?

23. ¿En qué difiere la energía potencial de un cuerpo elevado a cierta altura de la energía cinética?

6.5 *Trabajo de la fuerza elástica. Energía potencial elástica*

Como sabemos, la fuerza elástica surge al deformarse los cuerpos. Su valor absoluto es proporcional a la deformación y está dirigida en sentido contrario a la dirección del desplazamiento del cuerpo durante la deformación.

$$F = -k\,x.$$

En la figura 6.10a se muestra un muelle no deformado. Su extremo derecho está fijo, mientras que en el extremo izquierdo está sujeto un cuerpo.

Si comprimimos el muelle desplazando con la mano su extremo izquierdo una distancia x_1 (fig. 6.10b), surgirá cierta fuerza elástica $F_{elást\ 1}$ que actuará sobre el cuerpo por parte del muelle. La proyección de esta fuerza sobre el eje X será igual a:

$$F_{elást\ 1} = -kx_1.$$

Soltemos ahora el muelle. Supongamos que el extremo izquierdo se desplazó desde la posición A hasta la B (fig. 6.10c) siendo ahora la deformación x_2. En este caso la proyección de la fuerza en el eje X será:

$$F_{elást\ 2} = kx_2.$$

Durante el desplazamiento de las espiras del muelle la fuerza elástica realiza un trabajo. Vamos a calcularlo.

Como vemos en la figura, la dirección de la fuerza y el desplazamiento coinciden; por esta causa, para calcular el trabajo de la fuerza elástica, hay que multiplicar los valores absolutos de esa fuerza y del desplazamiento. El módulo del desplazamiento es igual a la diferencia de las coordenadas del extremo del muelle: $x_1 - x_2$.

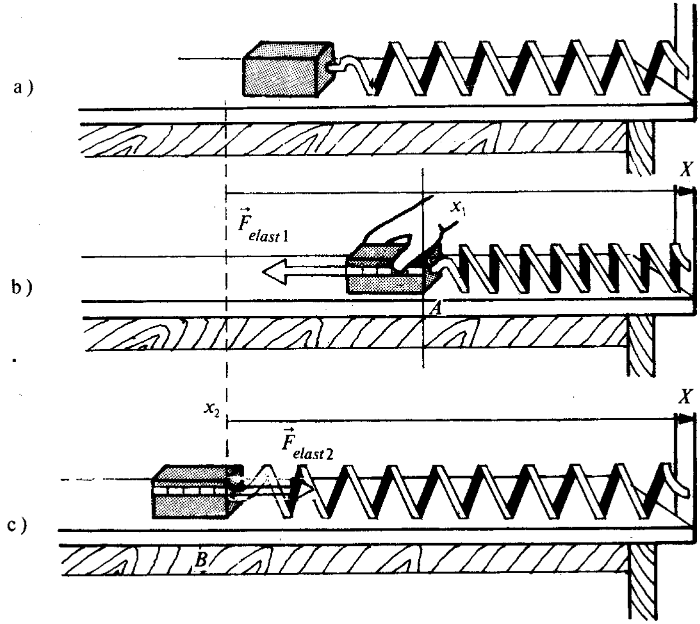


Fig. 6.10

Ahora bien, la fuerza elástica no es constante, varía de punto en punto cuando el cuerpo se mueve, de ahí que para calcular el trabajo de la fuerza elástica hay que tomar el valor medio del módulo de esta y multiplicarlo por $(x_1 - x_2)$, es decir:

$$W = F_{elást\text{-}med}\,(x_1 - x_2). \qquad (6.11)$$

La fuerza elástica es proporcional a la deformación del muelle, por eso el valor medio del módulo de esa fuerza puede ser hallado aplicando el método que utilizamos para definir el valor medio de la velocidad del movimiento uniformemente variado:

$$v_{med} = \frac{v + v_0}{2}.$$

De forma semejante, el valor medio de la fuerza elástica se determina de la manera siguiente:

$$F_{elást\text{-}med} = k\frac{x_1 + x_2}{2}. \qquad (6.12)$$

Sustituyendo la expresión (6.12) en la (6.11), obtenemos:

$$W = k\frac{x_1 + x_2}{2}(x_1 - x_2). \tag{6.13}$$

De Matemática conoces que:

$$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = (x_1^2 - x_2^2).$$

La expresión 6.13 toma el aspecto:

$$W = \frac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2). \tag{6.14}$$

Esta expresión se puede escribir también así:

$$W = -\left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}\right). \tag{6.15}$$

En esta expresión el segundo miembro representa la variación de la magnitud $kx^2/2$ con signo menos.

En el epígrafe 6.4 la magnitud mgh cuya variación con signo negativo resultó ser igual al trabajo de la fuerza de gravedad, se le denominó energía potencial gravitatoria. Análogamente a la magnitud $kx^2/2$ se le denomina *energía potencial elástica.*

El trabajo de la fuerza elástica es igual a la variación de la energía potencial tomada con signo contrario.

Designando la energía potencial elástica por E_p podemos escribir:

$$W = -(E_{p2} - E_{p1}).$$

Lo mismo que la energía potencial gravitatoria, la energía potencial elástica depende de las coordenadas (en este caso x_1 y x_2). Podemos decir que en todos los casos la energía potencial depende de las coordenadas.

De la ecuación (6.15) se evidencia que el trabajo de la fuerza elástica solo depende de las coordenadas inicial y final, y por tanto no depende de la trayectoria, por lo que el trabajo de la fuerza elástica por una trayectoria cerrada es igual a cero, con lo que se confirma que la fuerza elástica al igual que la fuerza de gravedad es una fuerza conservativa.

Si tomamos en la expresión (6.15) la coordenada del extremo del muelle deformado como cero ($x_2 = 0$) y designamos su alargamiento por x, entonces tenemos que:

$$E_p = W.$$

De ahí se deduce que la energía potencial de un cuerpo deformado elásticamente es igual al trabajo que realiza la fuerza elástica cuando el cuerpo pasa al estado en el cual la deformación de este es cero.

Hasta ahora al hablar de energía cinética o potencial nos referíamos a la energía de cuerpos aislados.

En el caso de la energía cinética, esta se puede asociar a un cuerpo aislado que se mueve con una velocidad v determinada (respecto a un sistema de referencia elegido). Pero un cuerpo por si solo no puede poseer energía potencial. Esta está determinada por la fuerza que actúa sobre un cuerpo por parte de otro, por eso solo la poseen los cuerpos que interactúan.

La energía potencial es la energía de interacción entre los cuerpos.

Por ejemplo, cuando un cuerpo se sitúa próximo a la Tierra, sobre él actúa la fuerza $m\vec{g}$ y a su vez, este actúa sobre la Tierra con una fuerza $-m\vec{g}$. El cuerpo por separado no posee energía potencial, ni la Tierra tampoco; sin embargo, el sistema compuesto por el cuerpo y la Tierra posee energía potencial.

En el caso de un cuerpo elásticamente deformado, por ejemplo un muelle, posee energía potencial no cada punto de este, sino que el cuerpo entero, constituido por puntos en interacción.

Como la fuerza de interacción depende de las coordenadas de los cuerpos, la energía potencial también es función de sus coordenadas. En esto consiste la diferencia entre la energía potencial y la cinética.

Tareas

24. ¿Cómo se determina el valor medio de la fuerza elástica?
25. ¿Qué es la energía potencial elástica?
26. ¿Cómo se relaciona el trabajo de la fuerza elástica con la energía potencial elástica?

27. ¿Qué hay de común entre la energía potencial de un cuerpo sobre el que actúa la fuerza de gravedad y la de un cuerpo sometido a la fuerza elástica?

6.6 *Ley de conservación de la energía mecánica*

Analicemos cómo varía la energía de dos cuerpos que interactúan entre sí mediante fuerzas elásticas o gravitacionales (fuerzas conservativas)

Los cuerpos que interactúan pueden poseer simultáneamente energía potencial y cinética. Por ejemplo, un avión en vuelo posee energía cinética porque este se mueve con respecto a la Tierra y, además, el sistema avión-Tierra posee energía potencial gravitatoria, porque ambos interactúan entre sí por medio de la fuerza de atracción universal. Dos esferas que chocan poseen al mismo tiempo energía cinética, por estar en movimiento y potencial por estar elásticamente deformadas

Designemos por E_{p1} y E_{c1} las energías potencial y cinética respectivamente de dos cuerpos que interactúan para un determinado instante de tiempo y por E_{p2} y E_{c2} las energías potencial y cinética para otro instante cualquiera

Con anterioridad vimos que el trabajo de la fuerza de gravedad o de la fuerza elástica es igual a la variación de la energía potencial del cuerpo tomada con signo contrario:

$$W = -(E_{p2} - E_{p1}). \qquad (6.10)$$

Por otra parte, de acuerdo con el teorema de la energía cinética, el trabajo efectuado por esas mismas fuerzas es igual a la variación de la energía cinética:

$$W = E_{c2} - E_{c1}.$$

De la comparación de las dos ecuaciones anteriores, se aprecia que una misma cantidad de trabajo determina variaciones iguales, en valor absoluto, de las energías cinética y potencial, pero de signos contrarios, si no actúan fuerzas no conservativas, es decir:

$$E_{c2} - E_{c1} = -(E_{p2} - E_{p1}). \qquad (6.16)$$

El signo negativo que antecede a la variación de la energía potencial significa que al aumentar la energía potencial, la energía cinética disminuye en la misma proporción y viceversa. De aquí se puede concluir que es como si tuviera lugar la transformación de un tipo de energía en otro.

La ecuación (6.16) puede ser escrita de la forma siguiente:

$$E_{c1} + E_{p1} = E_{c2} + E_{p2}. \tag{6.17}$$

La suma de las energías cinética y potencial de los cuerpos que están en interacción por medio de las fuerzas de gravitación o elásticas (conservativas), permanece siempre constante. En esto consiste la ley de conservación de la energía mecánica.

A la suma de las energías cinética y potencial de un sistema de cuerpos se le denomina *energía mecánica total.*

La energía mecánica total de un sistema de cuerpos que están en interacción solo mediante fuerzas conservativas, permanece siempre constante.

La transformación de la energía potencial en cinética o la cinética en potencial constituye uno de los fenómenos más trascendentales de la naturaleza.

La ley de conservación y transformación de la energía permite comprender más claramente el significado físico del trabajo. Del hecho de que un mismo trabajo conduce al aumento de la energía cinética y a la disminución de la energía potencial en esa misma magnitud, se desprende que el trabajo es igual a la cantidad de energía que se transforma de un tipo en otro.

La ley de conservación de la energía mecánica al igual que la ley de conservación de la cantidad de movimiento, tienen un carácter más general y son de absoluta precisión, incluso en los casos en que las leyes de la mecánica de Newton dejan de ser válidas.

Llamamos la atención, de que la ley anteriormente enunciada se refiere solo a la conservación de la energía mecánica.

La ley de conservación de la energía es mucho más general, abarca cualquier tipo de energía: mecánica, térmica, eléctrica, nuclear, etc., y esta se cumple en cualquier caso, incluyendo cuando actúa la fuerza de rozamiento, solo que en esta ocasión el trabajo realizado contra dicha fuerza no es equivalente a ninguna de las formas de energía mecánica, pero sí hay equivalencia entre el trabajo realizado y el aumento de la energía térmica obtenida por el rozamiento.

Problemas resueltos

1. ¿Qué altura h alcanza un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0?

Solución

Tenemos como origen de coordenadas el punto desde el cual fue lanzado el cuerpo. En este punto la energía potencial del cuerpo es igual a cero, mientras que la energía cinética es igual a $1/2\ mv_0^2$. Esto significa que la energía total del cuerpo en este punto es:

$$E_t = 0 + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}.$$

En el punto más alto, a la altura h, la energía potencial es igual a mgh, y la energía cinética es igual a cero.

La energía total en el punto más alto es igual a:

$$E_t = mgh + 0 = mgh.$$

De acuerdo con la ley de conservación de la energía mecánica total:

$$mgh = 1/2\ mv_0^2$$

Por tanto:

$$h = \frac{v_0}{2g}.$$

2. Una escopeta de juguete lanza sus proyectiles de 50 g impulsándolos con un resorte que tiene una constante elástica de 10 N/cm. Determina la velocidad inicial del proyectil si el muelle se deforma en 10 cm. Desprecia el rozamiento.

Solución

Dada la situación planteada en el problema y las magnitudes que son datos, para determinar la velocidad inicial del proyectil, puede aplicarse la ley de conservación de la energía mecánica.

Antes de disparar, toda la energía mecánica es potencial elástica igual a $1/2\ kx^2$.

Después que el muelle recupera su longitud normal, toda la energía es cinética igual a $1/2\ mv_0^2$.

Por tanto, aplicando la ley de conservación de la energía mecánica se tiene que:

$$1/2\ mv_0^2 = 1/2\ kx^2,$$

de donde:

$$v_0^2 = \frac{kx^2}{m}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{kx^2}{m}}.$$

Sustituyendo por los valores numéricos:

$$v_0 = \sqrt{\frac{10^3 \text{N/m} \cdot (0{,}1)^2}{0{,}05 \text{ kg}}} = \sqrt{2 \cdot 10^2 \text{ m}^2/\text{s}^2}$$

$v_0 \approx 14{,}1$ m/s.

3. Una grúa eleva una carga de masa m desde la altura h_0 hasta h (fig. 6.11). Con ello la velocidad de la carga aumenta de v_0 a v. ¿Qué trabajo realiza la fuerza F de tensión del cable del que está suspendida la carga?

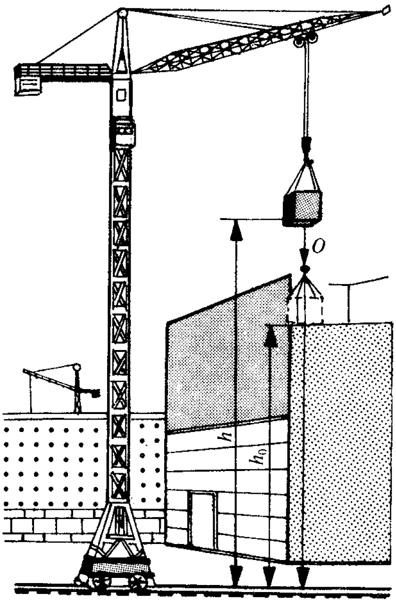


Fig. 6.11

Solución

En el caso que examinamos, la carga está sometida a la fuerza de gravitación terrestre $\overrightarrow{mg}$ (conservativa) y a la tensión del cable $\vec{F}$

(no conservativa); en esta situación no se conserva la energía mecánica de la carga.

La fuerza resultante $\vec{F_R}$ a la que está sometida la carga es igual a $\vec{F} + m\vec{g}$. Como $\vec{F}$ y $m\vec{g}$ están dirigidas en sentido contrario, el trabajo de la resultante de ellas será:

$W = (F - mg)(h - h_0)$.

De acuerdo con el teorema de la energía cinética dicho trabajo es igual a la variación de la energía cinética de la carga.

$W = \Delta E_c$

de donde:

$$(F - mg)(h - h_0) = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

De aquí:

$$F(h - h_0) = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} + mgh - mgh_0$$

La expresión en el primer miembro de la igualdad es el trabajo de la fuerza no conservativa, mientras, que en el segundo miembro figura la variación de la energía mecánica total del sistema, o sea:

$W_{F\ no\ cons} = \Delta E_c + E_p = \Delta E = E - E_0$.

Cuando en un sistema de cuerpos actúan fuerzas no conservativas la energía mecánica total varía y la variación de esta energía es igual al trabajo realizado por las fuerzas no conservativas.

$W_{F\ no\ cons} = \Delta E$.

Tareas

28. ¿A qué se denomina energía mecánica total?
29. Enuncia la ley de conservación de la energía mecánica total.
30. ¿Es nulo el trabajo de las fuerzas de rozamiento? Justifica tu respuesta.
31. ¿Se cumple la ley de conservación de la energía mecánica total de un cuerpo (o sistema de cuerpos) si solo actúan simultáneamente las fuerzas de gravedad y elástica?

6.7 *Aplicación de las leyes de conservación: choque*

La determinación del estado mecánico de dos cuerpos después de una interacción en la que intervienen solo fuerzas impulsivas, es un problema que no resulta muy complejo, aunque no se conozca el comportamiento, en cada instante, de las fuerzas. La solución de estos problemas se obtiene mediante la aplicación de las leyes de conservación.

El choque de dos cuerpos no solo ocurre cuando estos ponen en contacto directo algunas de sus partes, también ocurre cuando entre ellos surgen fuerzas que modifican sus estados mecánicos sin que se produzca dicho contacto. Así, por ejemplo, los átomos y moléculas interactúan mediante fuerzas eléctricas o magnéticas.

Cuando en un choque, los cuerpos, antes y después de la interacción, solo poseen velocidades cuyas direcciones son colineales, el choque se denomina unidimensional. Para el caso de dos cuerpos, los centros de masa de ambos siempre se mueven sobre una misma dirección.

En los choques ordinarios se cumple generalmente la ley de conservación de la cantidad de movimiento. Sin embargo, la ley de conservación de la energía mecánica se cumple en determinados casos. Por esta razón podemos clasificar los choques en elásticos e inelásticos.

Cuando se conserva la energía cinética, el choque es elástico, si no es así, entonces es inelástico.

La mayoría de los choques son inelásticos, solo las colisiones entre partículas atómicas y subatómicas son verdaderamente elásticas; no obstante, muchos de los choques se pueden estudiar considerándolos aproximadamente elásticos.

Choque elástico unidimensional

Analicemos el tratamiento que se da a los problemas relacionados con el choque elástico unidimensional de dos cuerpos.

Consideremos el caso de dos carros (1 y 2) que se mueven con rozamiento despreciable. Las masas de los carros son respectivamente m_1 y m_2 (fig. 6.12).

Para simplificar la tarea consideremos que el carro 1 se mueve inicialmente en línea recta, con una velocidad $\vec{v}_1$ respecto a la superficie S, hacia el carro 2 que se encuentra en reposo en la misma superficie.

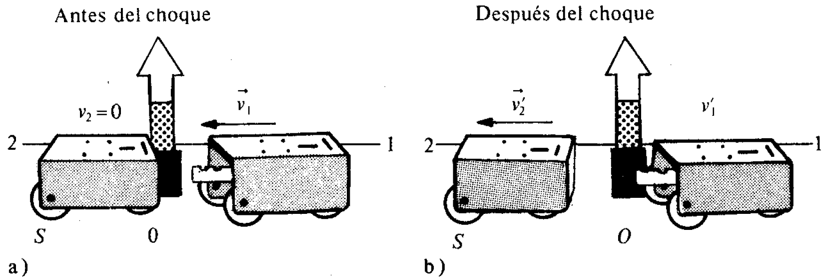


Fig. 6.12

¿Cómo determinar las velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ *de los carros después de que estos chocan elásticamente?*

Nos encontramos en presencia de carros cuya estructura ya conocemos. En las condiciones representadas en la figura 6.12a, las fuerzas externas que actúan sobre el sistema están compensadas. Si ubicamos el origen de nuestro sistema de coordenadas en un punto que coincida en el centro de masa del carro 2, pero fijo al laboratorio y con la dirección y sentido de su eje X coincidente con la de $\vec{v}_1$, la cantidad de movimiento del sistema es: $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$.

Al producirse el choque, sobre ambos carros actúan fuerzas de naturaleza elástica, internas al sistema, que cumplen con la tercera ley de Newton, que son colineales al eje X. Por esta razón, la velocidad del carro 1 se reducirá hasta hacerse igual a $\vec{v}_1$, mientras que el carro 2 adquiere una velocidad $\vec{v}_2'$.

¿Por qué esto es así?

Después del choque ambos carros se moverán con las velocidades $\vec{v}_1'$ y $\vec{v}_2'$, cuyas direcciones se mantienen colineales con v_1 (fig. 6.12b).

Puesto que las únicas fuerzas no equilibradas que actúan sobre los carros son internas al sistema, entonces se cumple la ley de conservación de la cantidad de movimiento:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'.$$

Si proyectamos las magnitudes involucradas en esta ecuación sobre el eje X, tenemos:

$$m_1v_1 = m_1v_1' + m_2v_2'. \tag{6.18}$$

Como tenemos dos incógnitas, v_1' y v_2', y una sola ecuación, recurriremos a la ley de conservación de la energía mecánica, que se cumple en este caso por ser despreciables las fuerzas de rozamiento, es decir:

$$1/2\, m_1 v_1^2 + 1/2\, m_2 v_2^2 = 1/2\, m_1 v_1'^2 + 1/2\, m_2 v_2'^2$$

$$m_1 v_1^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2. \qquad (6.19)$$

Como tenemos dos ecuaciones, la (6.18) y la (6.19), y por ser las incógnitas los valores de las velocidades $\vec{v_1'}$ y $\vec{v_2'}$ que están presentes en dichas ecuaciones, es decir, agrupando la ecuación (6.18) primero y, en la (6.19), después, obtenemos:

$$m_1 (v_1 - v_1') = m_2 v_2' \qquad (6.20)$$

$$m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 v_2'^2$$

$$m_1 (v_1 + v_1')(v_1 - v_1') = m_2 v_2'^2, \qquad (6.21)$$

Dividiendo (6.21) por (6.20), resulta:

$$\frac{m_1 (v_1 + v_1')(v_1 - v_1')}{m_1 (v_1 - v_1')} = \frac{m_2 v_2'^2}{m_2 v_2'}$$

$$v_1 + v_1' = v_2'. \qquad (6.22)$$

Sustituyendo (6.22) en (6.20), tenemos:

$$m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_1 + v_1')$$

$$m_1 v_1 - m_1 v_1' = m_2 v_1 + m_2 v_1'$$

$$v_1 (m_1 - m_2) = v_1' (m_1 + m_2)$$

$$v_1' = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_1. \qquad (6.23)$$

De igual forma es fácil comprobar si sustituimos (6.22) en (6.20) que:

$$v_2' = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_1. \qquad (6.24)$$

¿Puedes comprobar que la ecuación (6.24) es correcta? Hazlo.

Las ecuaciones (6.23) y (6.24) son aplicables a cualquier choque unidimensional elástico, siempre que se cumplan las condiciones dadas en el problema analizado. Así, por ejemplo, si las masas de los dos cuerpos (carros 1 y 2) son iguales, es decir, si $m_1 = m_2$, entonces, al sustituir en (6.24) y (6.23), resulta que: $v_1' = 0$ y $v_2' = v_1$, lo cual significa que el carro 1, como consecuencia del choque, se detiene, mientras que el 2 adquiere una velocidad igual en valor y del mismo sentido que la inicial de 1. Experimentalmente se comprueba que el carro 1 trasmite toda su cantidad de movimiento al 2; ello corrobora el cumplimiento de la ley de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía mecánica.

Por otra parte, si $m_2 \gg m_1$, al trabajar con las ecuaciones (6.23) y (6.24), resulta que:

$$m_1 + m_2 \approx m_2 \quad \text{y} \quad \frac{m_1}{m_2} \approx 0.$$

Al tener en cuenta estas consideraciones, se obtiene que:

$$v_1' \approx -v_1, \quad \text{ya que} \quad m_1 - m_2 \approx -m_2 \quad \text{y} \quad v_2' \approx 0.$$

Esto significa que el carro 1 rebota con igual velocidad que la que tenía inicialmente, mientras que el carro 2 permanece inmóvil. Casos como este se dan, por ejemplo, cuando dejamos caer una pelota de goma al suelo o cuando una pelota de tennis choca contra la pared de una cancha. En ambos casos la masa de la pelota es incomparablemente menor que la de la Tierra.

¿Qué sucede cuando la masa m_1 es mucho mayor que la m_2, es decir, $m_1 \gg m_2$? ¿Cómo comprobarlo prácticamente en el aula?

Choque perfectamente inelástico

En este tipo de choque no se cumple la ley de conservación de la energía; en ellos actúan fuerzas no conservativas y, en consecuencia, parte de la energía cinética inicial se transforma en energía interna del sistema o sea, se eleva la temperatura en la zona donde se produce el impacto.

En un choque perfectamente inelástico los dos cuerpos, después de la interacción, se mueven con la misma velocidad (fig. 6.13). En estos choques solo se cumple la ley de conservación de la cantidad de movimiento.

Para estudiar el choque perfectamente plástico tomemos un carro 1 de masa m_1, y fijémosle una porción de plastilina en su parachoques. Si un carro 2 de masa m_2 lo colocamos en reposo sobre una mesa y lo hacemos chocar contra el carro, que se mueve inicialmente con una velocidad $\vec{v_1}$ (fig. 6.13a), ¿cómo determinar la velocidad final de los carros?

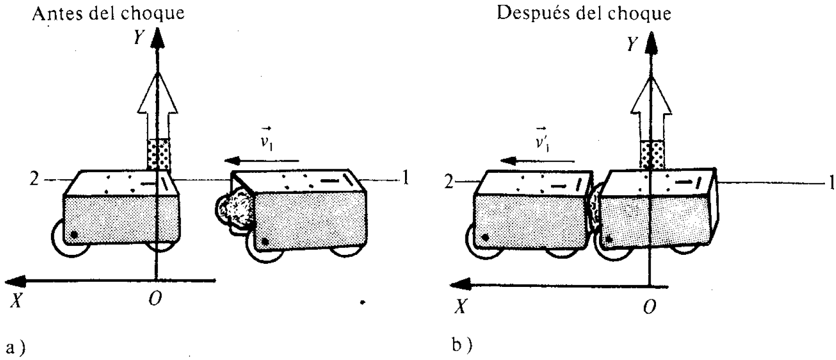


Fig. 6.13

En este caso las consideraciones iniciales hechas para el choque elástico son válidas, solo que al chocar los carros, la plastilina se deforma introduciéndose en los intersticios del carro 1, por lo que ambos móviles quedan adheridos moviéndose después del choque con una velocidad v' (fig. 6.13b). Si ubicamos el sistema de coordenadas, como se indica en la figura y aplicamos la ley de conservación de la cantidad de movimiento, se obtiene que:

$$m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = m_1\overrightarrow{v_1'} + m_2\overrightarrow{v_2'}, \tag{6.25}$$

pero $v_2 = 0$ y $v_1' = v_2' = v'$, al proyectar los vectores de la ecuación (6.25) sobre el eje de referencia, resulta:

$$m_1v_1 = (m_1 + m_2)\, v'$$

$$v' = \frac{m_1v_1}{m_1 + m_2}.$$

Problema resuelto

El péndulo balístico se utiliza para medir la velocidad de los proyectiles disparados por armas de fuego. El péndulo consiste en un bloque grande de madera de masa M que cuelga verticalmente mediante dos cuerdas. El proyectil cuya velocidad v_1 se desea medir y que posee una masa m_1 se dispara horizontalmente, de forma que se incruste en el bloque (fig. 6.14). Si el intervalo de tiempo que emplea el proyectil en detenerse es muy pequeño, responde:

a) ¿qué tipo de choque se produce entre el proyectil y el bloque?,
b) ¿cómo determinar la velocidad del proyectil?

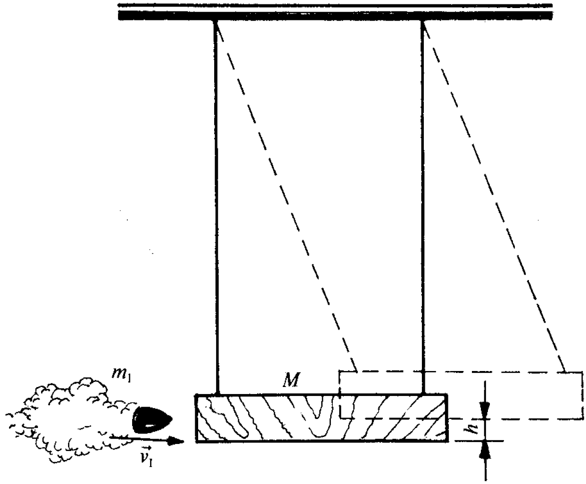


Fig. 6.14

Solución

Si el cañón del arma de fuego esta muy próximo al bloque, el intervalo de tiempo que emplea el proyectil en llegar a este cuerpo es tan pequeño que se puede despreciar la acción de la fuerza de gravedad, y considerar que las únicas fuerzas que actúan son internas. Estas fuerzas son de rozamiento; la que actúa sobre el proyectil lo frena hasta que alcance el valor final v. La fuerza de rozamiento que actúa sobre el bloque lo acelera hasta que alcance la velocidad v igual que la del proyectil. En estas condiciones ambos se mueven con la velocidad v, pero manteniéndose en reposo uno con respecto al otro. Tracemos el sistema de referencia de forma que su origen coincida con el centro de masa del bloque, y su eje, con la dirección y sentido de v.

Por las razones expuestas podemos considerar que se conserva la cantidad de movimiento en la dirección horizontal, ya que el choque es inelástico. La cantidad de movimiento antes del choque es $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$ y, después del choque, $\vec{p}_1' = (m_1 + M)\vec{v}$.

Después de la interacción, el conjunto bloque-proyectil no se mueve horizontalmente, sino que se mueve por un arco de circunferencia, ascendiendo hasta una altura máxima h con respecto a la posición inicial que consideremos como nivel cero de energía potencial, o sea, el eje X.

Para calcular la velocidad v_1 del proyectil aplicaremos la ley de conservación de la cantidad de movimiento al inicio y culminación del choque, es decir:

$m_1\vec{v}_1 = (m_1 + M)\,\vec{v}$

$m_1v_1 = (m_1 + M)\,v$ (proyectando sobre el eje X)

$$v_1 = \frac{(m_1 + M)v}{m_1} \qquad (1)$$

Para calcular v_1 es necesario determinar primero el valor de la velocidad v del conjunto después de la interacción. Esta la podremos calcular basándonos en la ley de conservación de la energía. Consideraremos que la fuerza de rozamiento con el aire es despreciable, por lo que se cumple que la energía cinética, un instante después de la interacción en la posición 1, es igual a la energía potencial en la posición 2 (fig. 6.14).

Luego:

$E_{c1} = E_{p1}$

$1/2\ (m_1 + M)v^2 = (m_1 + M)gh$

$v^2 = 2\,gh$

$$v = \sqrt{2\,gh}\ . \qquad (2)$$

Es evidente que midiendo la altura hasta la cual asciende el conjunto se puede calcular v mediante la fórmula (2) y sustituir esta en la ecuación (1).

Trabajando literalmente obtenemos:

$$v_1 = \frac{m_1 + M}{m_1}\sqrt{2\,gh}\ . \qquad (3)$$

a) El choque que se produce entre el proyectil y el bloque es perfectamente inelástico.

b) La velocidad del proyectil se calcula mediante la fórmula (3) si se conocen los valores de m_1, M y h.

¿Por qué en este ejercicio no aplicamos la ley de conservación de la energía mecánica directamente para el proyectil antes del impacto y la posición 2 sin considerar la posición 1?

Tareas

32. ¿A qué denominamos choque unidimensional?

33. ¿Cuándo un choque se denomina elástico?

34. ¿Qué diferencia existe entre un choque elástico y uno inelástico?

35. ¿Qué condiciones se deben dar para que el choque sea perfectamente inelástico?

36. Dos esferitas de mercurio 1 y 2 chocan y se unen formando una sola. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones se cumple en este choque? Explica tu respuesta.

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

$$1/2\ m_1v_1^2 + 1/2\ m_2v_2^2 = 1/2\ m_1v_1'^2 + 1/2\ m_2v_2'^2.$$

TRABAJO DE LABORATORIO 8 El trabajo realizado sobre un cuerpo por una fuerza no conservativa es igual a la variación de su energía mecánica

Cuando un cuerpo considerado como perfectamente elástico choca contra una pared u otro cuerpo cuya masa es mucho mayor, dicho cuerpo elástico surge una deformación y como consecuencia de las fuerzas elásticas se detiene al cabo de un intervalo de tiempo muy breve. En este instante su velocidad se hace cero y por tanto su energía cinética. Es por ello que esta magnitud experimenta una variación igual a $\Delta E_c = E_{cf} - E_{ci}$ donde E_{cf} es la energía cinética final y E_{ci} es la energía cinética que poseía el cuerpo antes del choque. Esta variación de la energía cinética del cuerpo es una consecuencia del trabajo realizado por las fuerzas elásticas, es decir

$$\Delta E_c = W_{fe} \qquad (1)$$

donde:

W_{fe} es el trabajo realizado por dichas fuerzas.

Es conocido que el trabajo realizado por las fuerzas elásticas es igual a:

$$W_{fe} = 1/2\ k\ x^2$$

por lo que la expresión (1) se puede expresar de la forma siguiente:

$$\Delta E_c = 1/2\ k\ x^2.$$

Consideremos el caso de un cuerpo elástico (un carro que tiene fijo en su parte frontal un resorte), el cual experimenta dos choques sucesivos contra una pared. En el primer caso, el carro, que se movía con una velocidad v_1, se detiene cuando el resorte se deforma una magnitud x_1. En el segundo caso, el carro que al aproximarse a la pared poseía una velocidad v_2, se detiene cuando el resorte se comprime una magnitud igual a x_2.

Analicemos en cada caso las transformaciones de energía que se producen. Es evidente que en ambos casos la energía cinética de traslación del cuerpo se transforma en energía potencial elástica del resorte como una consecuencia del trabàjo de las fuerzas elásticas, es decir:

$$\Delta E_{c1} = 1/2k\,(x_1)^2 \tag{3}$$
$$\Delta E_{c2} = 1/2\,k\,(x_2)^2, \tag{4}$$

pero

$$\Delta E_{c1} = -\,1/2\,mv_1^2 \tag{5}$$
$$\Delta E_{c2} = -\,1/2\,mv_2^2. \tag{6}$$

Las variaciones de energía son negativas, pues la velocidad del carro disminuye durante el choque.

Si se sustituyen los valores (5) y (6) en (3) y (4) respectivamente, resulta:

$$-\,1/2\,mv_1^2 = 1/2\,k\,(x_1)^2 \tag{7}$$
$$-\,1/2\,mv_2^2 = 1/2k\,(x_2)^2. \tag{8}$$

Las ecuaciones (7) y (8) constituyen la expresión de la ley de conservación dè la energía para cada choque.

Una forma fácil de comprobar la certeza de ambas expresiones y por consiguiente la ley de conservación de la energía es la siguiente:

Al dividir (7) por (8)

$$\frac{-\,1/2\,mv_1^2}{-\,1/2\,mv_2^2} = \frac{1/2\,(x_1)^2}{1/2\,(x_2)^2}$$

y simplificar y extraer raíz cuadrada en ambos miembros, queda:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{x_1}{x_2}, \tag{9}$$

pero

$$v_1 = \frac{l_1}{t} \text{ y } v_2 = \frac{l_2}{t},$$

luego:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{l_1}{t}}{\frac{l_2}{t}}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{l_1}{l_2} \qquad (10)$$

al sustituir (10) en (9), se obtiene finalmente:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{x_1}{x_2}. \qquad (11)$$

En resumen, si se cumple la relación (11), es evidente el cumplimiento de la ley de conservación de la energía y ello es, a su vez, una confirmación de que el trabajo de las fuerzas elásticas es igual a la variación de la energía cinética del cuerpo.

Este trabajo de laboratorio tiene por objetivo el comprobar que el trabajo realizado por las fuerzas elásticas que surgen en un cuerpo elástico deformado, como consecuencia de un choque, es igual a la variación que experimenta su energía cinética.

Instrumentos y materiales: Carro de inercia, registrador de tiempo con su cinta, fuente de corriente directa, 3 cables de conexión, cinta adhesiva, regla graduada en milímetro, 2 mordazas, bloque de madera de base cuadrada, cronómetro, interruptor.

Indicaciones para el trabajo

1. Sitúate frente a una de las paredes del laboratorio. Coloca en el suelo el registrador de tiempo y monta su circuito de alimentación. Toma una porción de unos 80 cm de longitud de cinta cronometradora y fíjala mediante el papel adhesivo a la parte posterior del carro. Toma otra porción de unos 7 u 8 cm de longitud de esa cinta y con la ayuda del papel adhesivo, haz un anillo que ajuste a la varilla del resorte del carro (figs. 6.15 y 6.16). Desplaza el anillo hasta que toque la parte frontal del carro. Marca con un lápiz sobre la varilla (sin comprimir) el límite exterior del anillo.

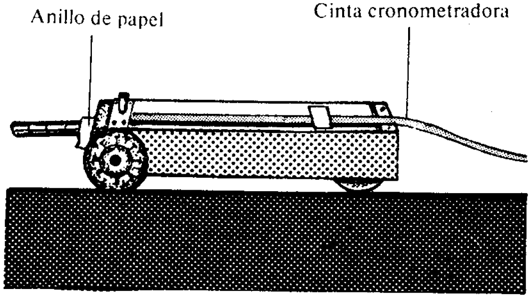


Fig. 6.15

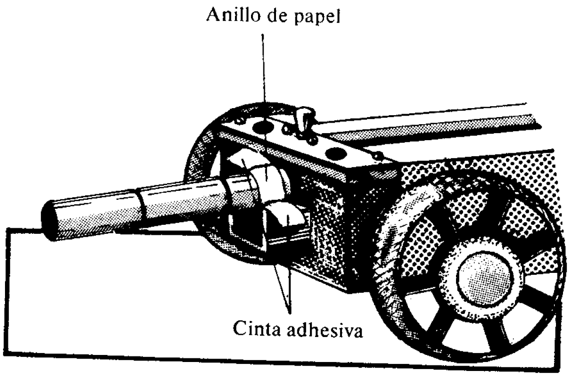


Fig. 6.16

2. Pasa el extremo libre de la cinta fija al carro por la zona de registro del cronometrador. Coloca el móvil de forma que su varilla quede dirigida normalmente hacia la pared y a una distancia aproximadamente de 1 m de ella. Pon en funcionamiento el registrador y da un pequeño impulso al carro.
3. Al producirse el choque, el resorte se comprime y la varilla penetra dentro de la estructura del carro, por lo que la posición del anillo cambia. Con el lápiz, marca sobre la varilla la nueva posición que ocupa el borde exterior del anillo.
4. Devuelve el anillo a su posición inicial y repite el experimento. Aplica en este caso un impulso mayor. Es necesario colocar una nueva cinta cronometradora antes de efectuar el segundo experimento. Marca otra vez la posición que ocupa el borde exterior

del anillo después de realizado el experimento. Estas actividades se pueden realizar sobre la mesa de trabajo, pero en este caso el choque del carro se producirá contra un bloque de madera grueso que se fijará rígidamente a uno de los extremos de la mesa de trabajo mediante dos mordazas. La ejecución posterior es semejante a la descrita anteriormente.

5. Mide la longitud (l) que separa cinco marcas de cada una de las cintas cronometradoras. Anote los resultados en la tabla 6.1. Mide las deformaciones (x) sufridas por el resorte en cada choque y anote esos valores en la columna 4 de la tabla.
6. Con los valores de l y x obtenidos en ambos experimentos, determina el valor de las relaciones l_1/l_2 y x_1/x_2. Anota estos resultados en las columnas 6 y 8 de la tabla 6.1.

Tabla 6.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
No. del experimento	*Longitud en la cinta (cm)*	Δl	*Deformación en el resorte (cm)*	Δx	$\frac{l_1}{l_2}$	$\Delta\left(\frac{l_1}{l_2}\right)$	$\frac{x_1}{x_2}$	$\Delta\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$
1								
2								

7. Según este desarrollo, sobre la base de los valores compilados en las columnas 6 y 8 de la tabla y considerando los errores cometidos en las mediciones, ¿qué se puede concluir sobre los resultados de los experimentos efectuados?

Tareas generales del capítulo

1. Un niño tira de una carretilla mediante una cuerda con una fuerza de 100 N. Si la cuerda forma un ángulo de 30° con la horizontal. ¿Qué trabajo realiza el niño si desplaza la carretilla 50 m?

2. Un deportista de 50 kg trepa por una cuerda vertical hasta una altura de 10 m. ¿Qué trabajo realiza si se mueve con velocidad constante?

3. Un caballo tira de un carro de 0,5 t, provocándole un desplazamiento de 5 m a partir del reposo, en un tiempo de 10 s. Si el carro se mueve por una superficie horizontal de rozamiento despreciable, calcula el trabajo realizado por el caballo.

4. En la figura 6.17 se representa un cuerpo sobre el cual actúan varias fuerzas: determina el trabajo de cada una y el trabajo de la resultante cuando el cuerpo se ha desplazado 3 m en la dirección y sentidos indicados por el vector $\vec{s}$.

$\bar{F}_1 = 5$ N
$F_2 = 20$ N
$F_N = 4$ N
$f_r = 10$ N
$F_g = 16$ N.

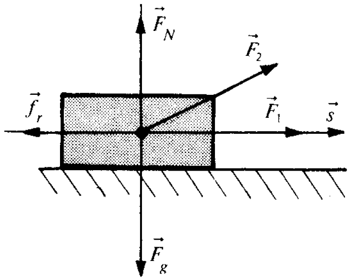


Fig. 6.17

5. Un ascensor de 1 500 kg de masa comienza a subir con una aceleración de 1 m/s^2. Calcula el trabajo realizado por el motor de este durante los primeros segundos del movimiento.

6. En la figura 6.18 se muestra la gráfica de la dependencia de la fuerza aplicada a un cuerpo y su desplazamiento.
   a) Calcula el trabajo realizado por la fuerza al desplazar el cuerpo 15 m.
   b) Demuestra que ese trabajo es numéricamente igual al área del rectángulo *OABC*.

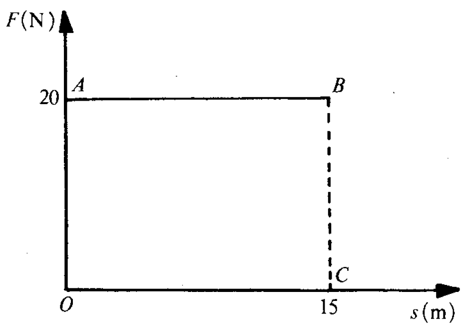


Fig. 6.18

7. Sobre una carga, que resbala con rozamiento por una superficie plana horizontal, actúa una fuerza de 200 N formando un ángulo de 60^0 con la horizontal.
   a) ¿Qué trabajo realizará la fuerza al desplazarse el cuerpo a 5 m, si el movimiento transcurre a velocidad constante?
   b) ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento de la carga contra el plano si su masa es igual a 31 kg?
8. ¿Qué trabajo hay que realizar para que un automóvil que se mueve a una velocidad de 60 km/h aumente su velocidad a 80 km/h si la masa del automóvil es de 1 t?
9. A un cuerpo en reposo de 3 kg se le aplica una fuerza de 40 N. Después de esto, el cuerpo recorre 3 m por una superficie horizontal lisa. A continuación la fuerza disminuye a 20 N y el cuerpo recorre 3 m más. Halla la energía cinética del cuerpo y su velocidad al final de este tramo.
10. ¿Qué trabajo debe ser realizado para detener un tren de 1 000 t que se mueve con una velocidad de 108 km/h?
11. Sobre un cuerpo de 5 kg que se mueve a una velocidad de 6 m/s actúa una fuerza de 3 N dirigida en el sentido opuesto al movimiento. Como resultado, la velocidad del cuerpo disminuye hasta 2 m/s. ¿Qué trabajo en valor y signo realiza la fuerza? ¿Qué distancia recorrió el cuerpo?
12. ¿Qué trabajo realiza la fuerza de rozamiento sobre un automóvil de 1 000 kg cuando su velocidad disminuye de 54 km/h a 36 km/h?
13. Una piedra de 50 g es lanzada verticalmente hacia arriba. ¿Qué trabajo realiza la fuerza de gravedad cuando la piedra se encuentra a una altura de 8 m?
14. Un cuerpo cuya masa es de 50 kg se desliza con rozamiento por un plano inclinado que tiene un ángulo respecto al horizonte de 30°. Moviéndose a velocidad constante, el cuerpo recorre la longitud del plano que es igual a 6 m. Calcula el trabajo de la fuerza de gravedad durante este movimiento y la fuerza de rozamiento que actúa sobre el cuerpo.
15. Una carga de 2,5 kg cae desde una altura de 10 m. ¿En cuánto variará su energía potencial 1 s después de comenzar la caída? (Considera la velocidad inicial de la carga igual a cero.)
16. Un cuerpo de 2 kg es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad de 10 m/s. ¿Qué trabajo realiza la fuerza de gra-

vedad desde el punto de lanzamiento hasta el punto de altura máxima?

17. Un estudiante determinó la fuerza máxima con la que puede estirar un dinamómetro. Esta resultó igual a 400 N. ¿Qué trabajo se realiza al alargar el muelle? La constante de elasticidad del muelle 10 000 N/m.

18. ¿Qué trabajo realiza un resorte al ser comprimido 15 cm si para deformarlo en 2 cm es necesario aplicar una fuerza de 20 N?

19. Un muelle está colgado de uno de sus extremos mientras que del extremo libre está suspendido un cuerpo de 18 kg de masa. En estas condiciones la longitud del muelle es de 10 cm. Cuando de este se suspende un cuerpo de 30 kg de masa, su longitud constituye 12 cm. Calcula el trabajo que deberá realizarse para estirar el muelle de 10 a 15 cm.

20. En la figura 6.19 se muestra la gráfica de la dependencia entre la fuerza elástica que surge al comprimir el muelle de una pistola de juguete y su deformación.

    a) Calcula el trabajo que se realiza al comprimir el muelle 2 cm.

    b) Demuestra que ese trabajo es numéricamente igual al área del triángulo *AOB*.

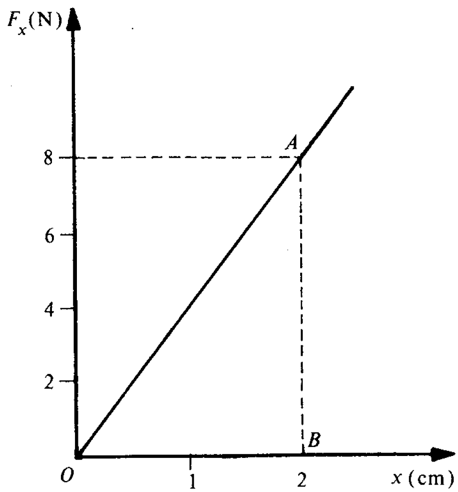


Fig. 6.19

21. Un cuerpo de 2 kg es impulsado por un resorte una distancia de 10 cm. Si la fuerza del resorte varió desde 20 N hasta cero linealmente. Determina el trabajo realizado por el resorte.

22. Un cuerpo cae desde cierta altura respecto a la superficie de la Tierra. En el instante en que choca con esta, su velocidad es de 30 m/s. ¿De qué altura cae el cuerpo?

23. Un proyectil, que al ser disparado con una velocidad inicial de 280 m/s, vuela verticalmente hacia arriba. ¿A qué altura sobre el lugar del disparo su energía cinética será igual a la potencial?

24. Un cuerpo cae desde una altura $h_0 = 20$ m. Si la masa del cuerpo es de 2 kg y partió del reposo, determina:
   a) la energía potencial y mecánica total en el punto donde comienza a caer,
   b) la energía potencial, cinética y mecánica total cuando está a la mitad de su altura inicial,
   c) la energía cinética y mecánica total cuando llega al suelo. Considera que no hay rozamiento.

25. Desde un avión cuya velocidad es 270 km/h se deja caer una bomba de 10 kg. Si el avión se encuentra a una altura de 100 m, calcula:
   a) la energía cinética inicial de la bomba,
   b) su energía potencial inicial,
   c) su energía mecánica,
   d) la velocidad de la bomba al llegar al suelo.

26. ¿Desde qué altura debe caer un peñasco de 1 000 kg para que tenga la misma energía cinética que un camión de 8 t que viaja a una velocidad de 90 km/h a lo largo de una carretera horizontal?

27. Una escopeta de juguete lanza sus proyectiles de 50 g impulsándolos con un resorte que tiene una constante elástica de 10 N/cm. ¿Cuál será el alcance máximo que se puede lograr cuando el muelle se deforma en 10 cm? Desprecia el rozamiento.

28. En la figura 6.20 se representa un cuerpo cuya masa es de 20 kg que baja un plano inclinado desde un punto A, donde la altura es de 2,45 m y llega a la base con una velocidad de valor igual a 4 m/s. Calcula el trabajo de la fuerza de rozamiento y su valor si el plano tiene una longitud de 4,9 m.

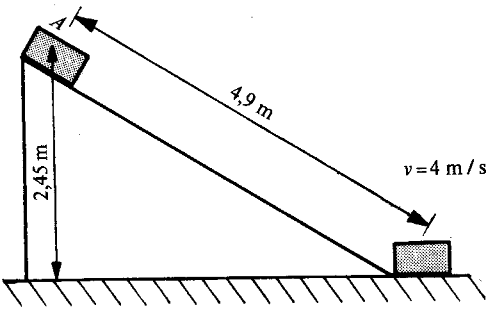


Fig. 6.20

29. Se deja caer una piedra de 2 kg desde una altura de 10 m y llega a tierra con una velocidad de 10 m/s. Calcula el trabajo realizado por la fuerza de resistencia del aire.

30. En la figura 6.21 se representa un péndulo de 1 m de longitud. Determina el valor de la velocidad al pasar por el punto A y la tensión de la cuerda si la masa es 10 g. Desprecia el rozamiento.

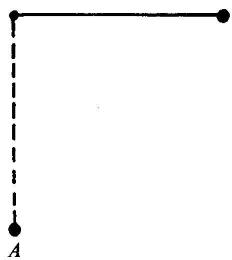


Fig. 6.21

31. Un resorte tiene una constante $k = 10$ N/m. Un pequeño bloque de masa igual a 0,1 kg se coloca junto al resorte y, ejerciendo presión contra este, se acorta su longitud 0,05 m. Si entonces se suelta el bloque, el resorte recuperará su longitud natural, poniendo el bloque en movimiento. Calcula:
   a) la velocidad que adquiere el bloque,
   b) la altura h a que ascendería el bloque por el plano inclinado que se representa en la figura 6.22.
   Desprecia el rozamiento.

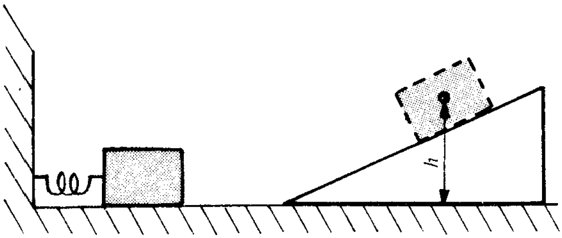


Fig. 6.22

32. Un bloque de 1 kg se abandona, partiendo del reposo, en el punto A, sobre una pista curva constituida por un cuadrante de circunferencia de radio igual a 1,5 m (fig. 6.23). El cuerpo se desliza sobre la pista y alcanza el punto B con una velocidad de valor igual a 3,6 m/s. A partir del B se desliza sobre una superficie horizontal una distancia de 2,7 m hasta llegar al punto C, en el cual se detiene.

    a) ¿Cuál es el coeficiente cinético de rozamiento sobre la superficie horizontal?

    b) ¿Cuál fue el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento mientras el cuerpo se deslizó de A a B?

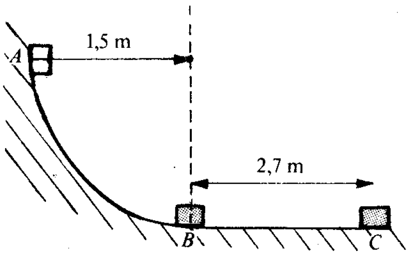


Fig. 6.23

33. Una flecha de 200 g y velocidad 20 m/s se incrusta en un taco de madera que se halla en una superficie horizontal lisa, tal y como se representa en la figura 6.24. Determina la altura a la que ascenderá el taco por el plano inclinado suponiendo que este también es liso y la masa del taco es de 2 kg.

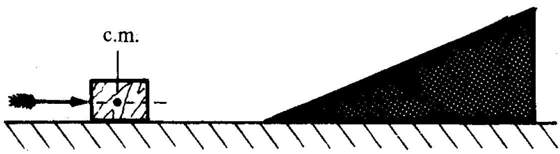


Fig. 6.24

34. Un blanco para tiro de fusil se monta de la manera que indica la figura 6.25. La masa del carro es de 2 kg, la constante elástica del resorte es de 450 N/m, la masa de la bala es de 5 g y su velocidad inicial de 200 m/s. Determina la medida en que se comprime el resorte después de incrustarse en el carro horizontalmente.

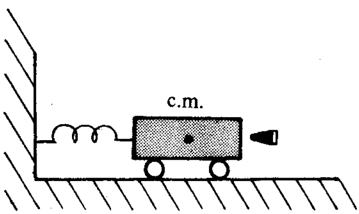


Fig. 6.25

35. ¿A qué altura ascenderá un péndulo balístico de 5 kg, cuando se le incrusta un proyectil de 200 g que se movía a razón de 200 m/s antes de penetrarlo (fig. 6.26)?

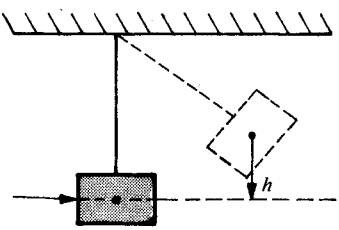


Fig. 6.26

36. ¿Cuál será la velocidad de un proyectil de 50 g que eleva a un péndulo balístico de 2 kg a 4 cm de altura?

Capítulo 7
OSCILACIONES MECÁNICAS

En este capítulo realizaremos el estudio cinemático y dinámico de un tipo de movimiento particularmente importante: el movimiento mecánico oscilatorio de los cuerpos.

El estudio del movimiento mecánico oscilatorio de los cuerpos resulta particularmente importante por la gran variedad de circunstancias conque este se presenta en la naturaleza y en la técnica. Por ejemplo, oscilan las cuerdas de una guitarra al ser pulsadas por el intérprete, las moléculas de los gases que componen el aire cuando hablamos, los átomos que forman parte de la estructura de un cuerpo sólido, etcétera.

También resulta importante el estudio de este tipo de movimiento, porque las ecuaciones que lo caracterizan nos permiten describir las oscilaciones electromagnéticas, las cuales tienen especial interés desde el punto de vista teórico y de sus aplicaciones en el mundo actual.

El estudio de las oscilaciones mecánicas constituye, además, la base para el conocimiento de los fenómenos mecánico-ondulatorios, que serán tratados en el próximo capítulo, y por ende, para el estudio de las ondas electromagnéticas y de los fenómenos ópticos en cursos posteriores.

7.1 *Conceptos movimiento mecánico oscilatorio y movimiento armónico simple*

¿Qué se entiende por movimiento oscilatorio?

Responder a esta pregunta no te resultará particularmente difícil, pues con este tipo de movimiento ya estás familizarizado desde el octavo grado, cuando estudiaste los fenómenos sonoros, y posteriormente en el noveno grado, los fenómenos electromagnéticos.

En la figura 7.1 se muestran casos sencillos de cuerpos que realizan un movimiento de tipo oscilatorio. En todos estos casos el movimiento se produce al separar el cuerpo de su posición de equilibrio y liberarlo, o al actuar una fuerza impulsiva que lo saca de la posición de equilibrio.

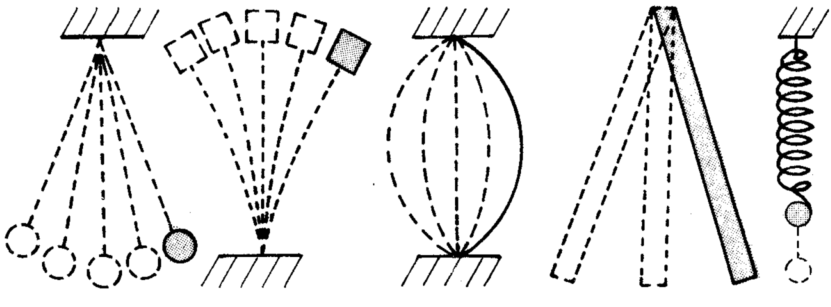


Fig. 7.1

La observación cuidadosa del movimiento del cuerpo en cualquiera de los casos mostrados en la figura 7.1, nos permite recordar que la peculiaridad fundamental de este tipo de movimiento, y que por tanto lo distingue de los movimientos traslacionales, es la de que el cuerpo se desplaza sucesivamente a uno y otro lado de la posición de equilibrio, de manera que las características del estado mecánico del cuerpo (posición, velocidad y aceleración) se repiten cada cierto intervalo de tiempo. Debemos recordar también que si las características del estado mecánico se repiten a iguales intervalos de tiempo (en la realidad aproximadamente iguales), el movimiento oscilatorio, o más simplemente las oscilaciones, se denominan *periódicas*.

Se denomina movimiento oscilatorio periódico, o simplemente oscilación periódica, al movimiento de un cuerpo que se desplaza sucesivamente a uno y otro lado de su posición de equilibrio, de manera que las características de su estado mecánico se repiten a iguales intervalos de tiempo.

En los ejemplos mostrados en la figura 7.1, las oscilaciones tienen lugar bajo la acción de las fuerzas internas elásticas o gravitatorias que provocan el movimiento del cuerpo, y de las fuerzas disipativas (de fricción) que se oponen al movimiento del cuerpo. En tal situación las oscilaciones se denominan *libres*.

Oscilaciones libres son aquellas que surgen como consecuencia de desviar al sistema de su estado de equilibrio estable, bajo la acción de las fuerzas internas y disipativas.

La experiencia demuestra que cuando en un sistema se producen oscilaciones libres, el desplazamiento a uno y otro lado de la posición de equilibrio es cada vez menor, hasta que el cuerpo se detiene, o sea que las oscilaciones se amortiguan. Este fenómeno se produce como consecuencia de las fuerzas disipativas que actúan sobre cualquier sistema en movimiento, por eso las oscilaciones libres siempres son amortiguadas, y se acostumbra a llamarlas *oscilaciones libres amortiguadas* o simplemente *oscilaciones amortiguadas.*

Las *oscilaciones libres no amortiguadas* constituyen una idealización o modelo del movimiento oscilatorio que puede resultar muy útil para describir los movimientos oscilatorios reales en forma aproximada si las fuerzas disipativas son muy pequeñas y el tiempo de observación es también relativamente pequeño.

Se denominan oscilaciones libres no amortiguadas aquellas que tienen lugar bajo la acción de fuerzas internas solamente. Estas oscilaciones constituyen pues, una idealización o modelo en el que se supone que pueden se ignoradas las fuerzas disipativas.

Para que las oscilaciones no se amortiguen, es preciso que un agente externo restituya periódicamente la energía al sistema oscilatorio; este tipo de oscilaciones se denominan *forzadas.* Ejemplos de oscilaciones forzadas son muy abundantes en la naturaleza y en la técnica: el batir de las alas de los insectos y los pájaros, los pistones en un motor, el martillo de un timbre eléctrico, etcétera.

Las características de los movimientos oscilatorios amortiguado y forzado las estudiaremos al final de este capítulo.

Iniciaremos ahora el estudio de las leyes específicas del movimiento oscilatorio por el caso más simple, que es el de las oscilaciones libres no amortiguadas, que como ya sabemos constituyen una idealización o modelo del movimiento oscilatorio.

Las oscilaciones libres no amortiguadas más sencillas son aquellas en las que la posición de cada punto del cuerpo varía en el transcurso del tiempo según una función seno o coseno (que como conoces de Matemática son las funciones periódicas más sencillas), y por eso a este tipo de oscilaciones se les denomina *movimiento armónico simple,* conocido por sus siglas MAS.

Se denomina movimiento armónico simple el movimiento oscilatorio no amortiguado de un punto material, cuya posición varía en función del tiempo según una función armónica seno o coseno de la forma:

$$x = A \textbf{ sen } (\omega t + \varphi) \qquad \text{o} \qquad x = A \textbf{ cos } (\omega t + \varphi).$$

En la figura 7.2 se representan las características del movimiento de un punto material que realiza un MAS, y que pueden corresponder con muy buena aproximación, por ejemplo, al movimiento del cuerpo en un sistema cuerpo-resorte o de un péndulo simple, si las fuerzas disipativas son muy pequeñas, el cuerpo puede ser considerado puntual, y en el caso del péndulo, este es lo suficientemente largo y su amplitud lo suficientemente pequeña para considerar que el arco descrito es aproximadamente recto.

El significado físico de cada uno de los términos que aparecen en la ecuación que define al MAS es el siguiente:

x *(elongación)* es la posición del punto en cualquier instante.

A *(amplitud)* es el valor máximo que puede tomar x

$\omega t + \varphi$ *(fase)* determina conjuntamente con la amplitud el valor de x en cualquier instante.

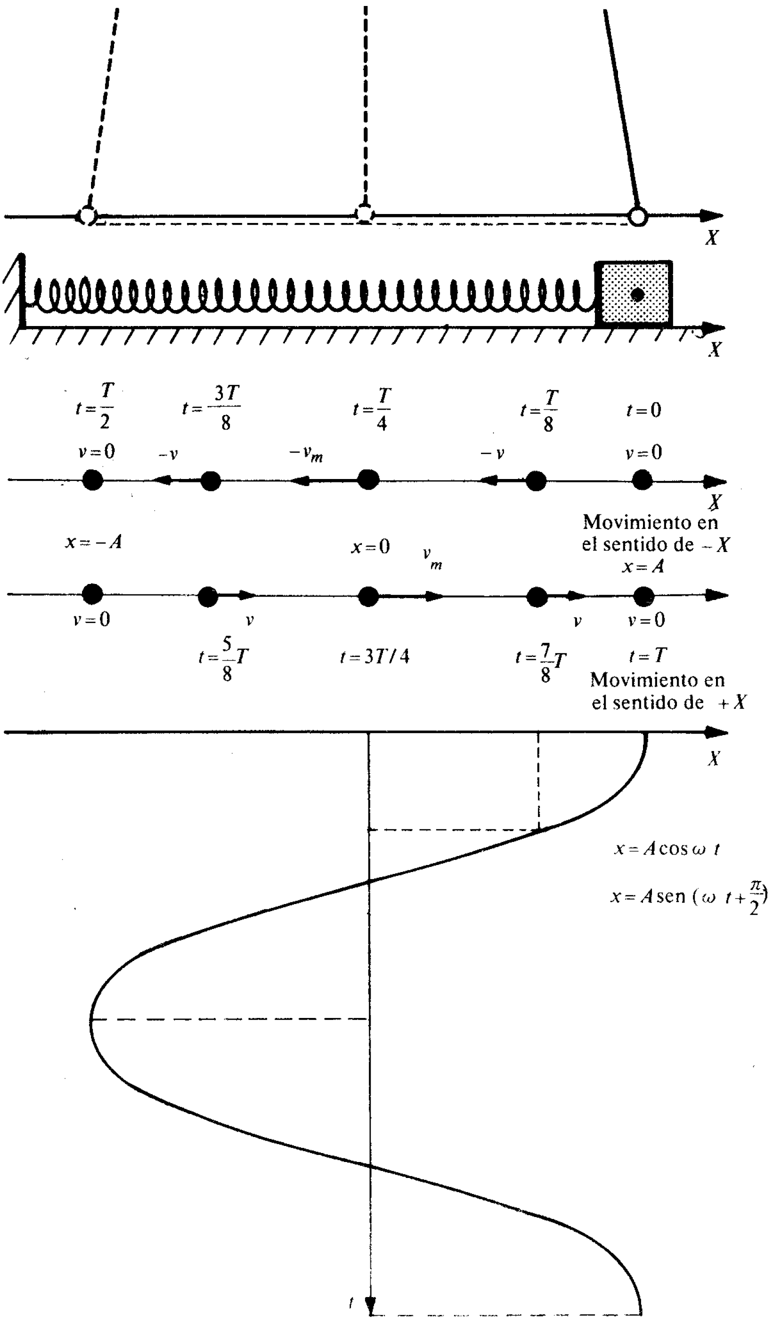
ω *(frecuencia angular)* es igual a $\frac{2\pi}{T} = 2\pi f$. En estas expresiones, T es el tiempo en que el punto material realiza una *oscilación completa* o recorrido de ida y vuelta, y se denomina período de las oscilaciones; $f = 1/T$ es el número de oscilaciones en un segundo y se denomina frecuencia de las oscilaciones. Por tanto, la frecuencia angular ω es el número de oscilaciones en 2π segundos y expresa el cambio de fase por unidad de tiempo.

φ *(fase inicial)* es el valor del ángulo que determina el valor de x en el instante inicial ($t = 0$).

Este modelo tiene una gran importancia, pues no solamente el movimiento oscilatorio de los cuerpos puede ser descrito, en muchos casos, sobre esta base con muy buena aproximación, sino también porque en general el movimiento oscilatorio se puede estudiar como una superposición de varios movimientos armónicos simples, como estudiarás en cursos superiores.

Tareas

1. Cita algunos ejemplos de movimientos oscilatorios en la naturaleza y en la técnica. Explica por qué se pueden clasificar como oscilatorios.
2. ¿A qué tipo de oscilaciones se les denomina libres? ¿Existen en la naturaleza oscilaciones de este tipo? Explica.



X
X
$t=\frac{T}{2}$
$t=\frac{3T}{8}$
$t=\frac{T}{4}$
$t=\frac{T}{8}$
$t=0$
$v=0$
$-v$
$-v_m$
$-v$
$v=0$
X
Movimiento en el sentido de $-X$
$x=-A$
$x=0$
v_m
$x=A$
$v=0$
v
v
$v=0$
$t=\frac{5}{8}T$
$t=3T/4$
$t=\frac{7}{8}T$
$t=T$
Movimiento en el sentido de $+X$
X
$x=A\cos\omega t$
$x=A\,\text{sen}\,(\omega t+\frac{\pi}{2})$
t

Fig. 7.2

3. ¿Qué oscilaciones se denominan amortiguadas? Cita algunos ejemplos de este tipo de oscilaciones.
4. ¿Qué oscilaciones se denominan forzadas? Cita ejemplos de este tipo de oscilaciones.
5. ¿Bajo qué condiciones se mantienen en un sistema oscilaciones libres?
6. Completa el cuadro 1.

Cuadro 1

Tipo de oscilación	Tipo de fuerzas que actúan
	Fuerzas internas
Amortiguadas	
	Fuerzas externas no disipativas

7. Define el concepto *oscilaciones armónicas* y explica su importancia para el estudio del movimiento oscilatorio.

7.2 *Cinemática del movimiento armónico simple*

Existen varias formas de abordar el estudio cinemático del MAS; una de ellas es la de establecer alguna relación entre este y otro movimiento cuyas ecuaciones sean conocidas. Por su simplicidad, desde el punto de vista conceptual y matemático (solamente se requieren conocimientos básicos de álgebra y trigonometría), vamos a escoger dicha forma.

Si observamos sobre una pantalla la proyección del movimiento de un pequeño objeto (puntual), situado sobre el borde de un disco que gira con movimiento circular uniforme, como se representa en la figura 7.3, dicha proyección del objeto sobre la pantalla se desplazará a uno y otro lado de la pantalla, es decir, oscila.

Vamos a demostrar que el movimiento de la proyección del objeto puntual sobre la pantalla en estas condiciones, se corresponde con la definición de movimiento armónico simple y a obtener sobre esta base las ecuaciones que lo caracterizan cinemáticamente.

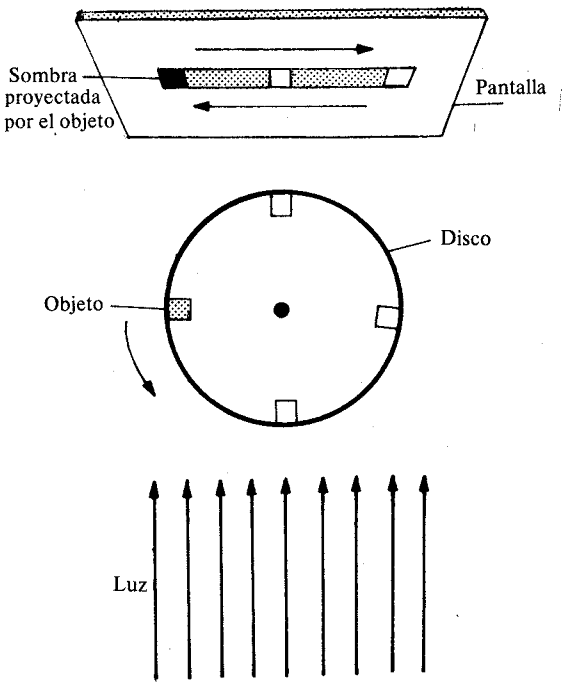


Fig. 7.3

La situación planteada se puede representar esquemáticamente como se muestra en la figura 7.4.

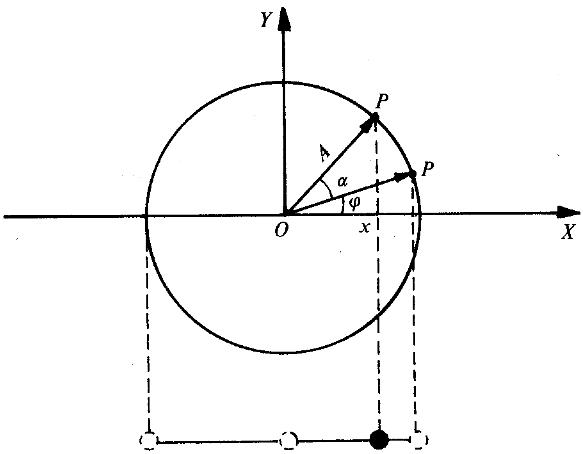


Fig. 7.4

Si en la figura 7.4 consideramos que el punto P describe con movimiento circular uniforme una circunferencia de radio A, con una velocidad angular ω, y que en el instante inicial el punto P se encuentra en una posición tal que el radio OP (en lo adelante lo denominaremos radio vector de posición) forma un ángulo φ con el eje X, entonces, al cabo de un tiempo cualquiera t, el punto P habrá recorrido un arco de circunferencia de forma tal que el radio vector de posición barre un ángulo $\alpha = \omega t$.

Por tanto, la posición de la proyección del punto P sobre el eje X para un instante cualquiera t vendrá dada por:

$$x = A \cos (\omega t + \varphi)$$

donde $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Queda demostrado, pues, que el movimiento de la proyección del punto P sobre el eje X es un movimiento armónico simple.

Resulta importante llamar la atención sobre el hecho de que en correspondencia con la ecuación para x en función de t, el signo de x será positivo cuando el radio vector de posición se encuentra en el primero o cuarto cuadrante, y negativo cuando se encuentra en el segundo o tercer cuadrante, pues en el primer caso el $\cos (\omega t + \varphi)$ es positivo y en el segundo caso, es negativo. Esto está en plena correspondencia con la orientación dada al sistema de coordenadas seleccionado para describir el movimiento.

Analicemos ahora cuáles serán las ecuaciones cinemáticas restantes, o sea, la de la velocidad y la de la aceleración en función del tiempo.

La ecuación de la velocidad en función del tiempo para un MAS, puede ser fácilmente deducida si analizamos la figura 7.5.

Si v es la velocidad lineal del punto P, en un instante cualquiera t, la velocidad de la proyección será la de la componente de v en la dirección X, la cual vendrá dada por:

$$v_x = -v \operatorname{sen} (\omega t + \varphi).$$

El signo menos indica que el sentido de la velocidad en este instante está dirigido en el sentido negativo del eje X.

En relación con el signo de v_x debe notarse que en el primero y segundo cuadrantes la función seno es positiva y el signo de v_x será negativo; cuando la posición del radio vector es tal que el ángulo respecto al eje X se encuentra en el tercero o cuarto cuadrante, la

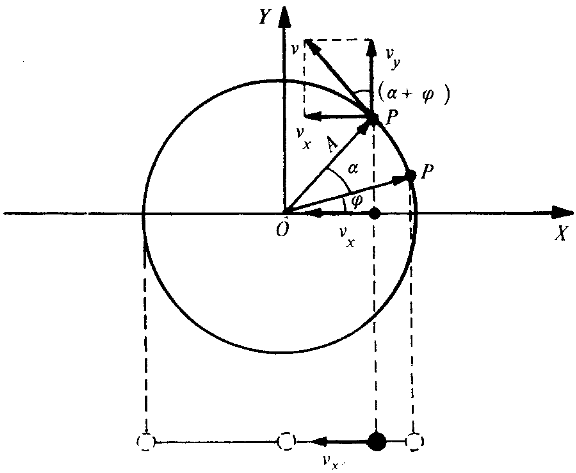


Fig. 7.5

función seno es negativa y el signo de v_x será positivo, en correspondencia con el hecho de que la velocidad está orientada en el sentido positivo del eje X.

Cuando $(\omega t + \varphi) = \pi/2$, la proyección ocupa la posición $x = 0$ y $v_x = v$ es el valor máximo de la velocidad, el cual denotaremos por v_m. Por otra parte, como $v = \omega R$ y en este caso $R = A$, entonces:

$$v_m = \omega A$$

y $v_x = - \omega A \text{ sen } (\omega t + \varphi)$.

La ecuación para la aceleración en función del tiempo para el MAS, también puede ser deducida con facilidad si analizamos que la aceleración en un movimiento circular uniforme está dirigida radialmente hacia el centro de giro como se muestra en la figura 7.6.

Del análisis de la figura se puede deducir que la aceleración de la proyección en un instante cualquiera t, viene dado por:

$$a_x = - a \cos (\omega t + \varphi)$$

En este caso, el signo menos también significa que durante el tiempo que el radio vector se encuentre en los cuadrantes primero y cuarto, el sentido de la aceleración estará dirigido en el sentido negativo del eje X y que cuando se encuentre en los cuadrantes tercero y segundo estará dirigido en el sentido positivo de dicho eje X.

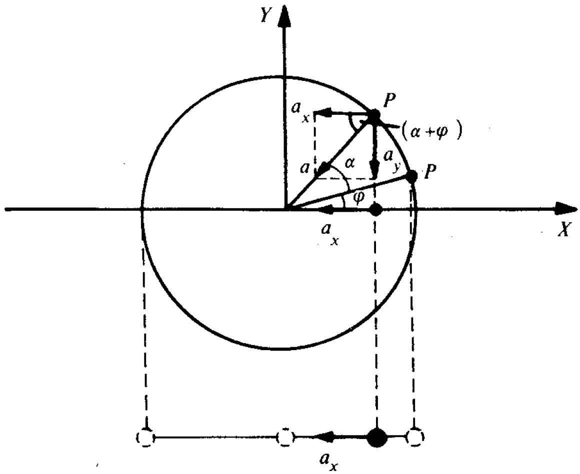


Fig. 7.6

Cuando $(\omega t + \varphi) = \pi/2$, $\cos(\omega t + \varphi) = 0$ y el valor de la proyección de la aceleración en ese punto ($x = 0$) es $a_x = 0$, o sea el punto de coordenada $x = 0$ es un punto de equilibrio.

Cuando $(\omega t + \varphi) = 0$, $\cos(\omega t + \varphi) = 1$ y el valor de la proyección de la aceleración en ese punto ($x = A$), $a_x = a$ es el valor máximo que puede tomar dicha aceleración. Este valor lo denotaremos por a_m.

Como para un movimiento circular uniforme

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

entonces, $a_x = -\omega^2 R \cos(\omega t + \varphi)$.

En resumen, hemos encontrado que las ecuaciones cinemáticas del MAS son:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$
$$v_x = -v_m \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$
$$a_x = -a_m \cos(\omega t + \varphi)$$

donde $v_m = \omega A$, $a = \omega^2 A$ y $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Puede resultar conveniente recordar que cualquiera de estas ecuaciones puede ser escrita utilizando indistintamente las funciones seno o coseno, cambiando solamente el valor de φ, de forma tal que para $t = 0$ se tenga un resultado compatible con las condiciones iniciales del sistema oscilatorio que se esté analizando.

Por otra parte, en aquellos casos èn que el movimiento se comienza a estudiar a partir de la posición de equilibrio o de amplitud máxima, es posible escribir la ecuación de manera tal que $\varphi = 0$ si se escoge convenientemente la función.

La representación comparativa de las gráficas de estas ecuaciones como se muestra en la figura 7.7, permite comprender mejor el significado físico de estas.

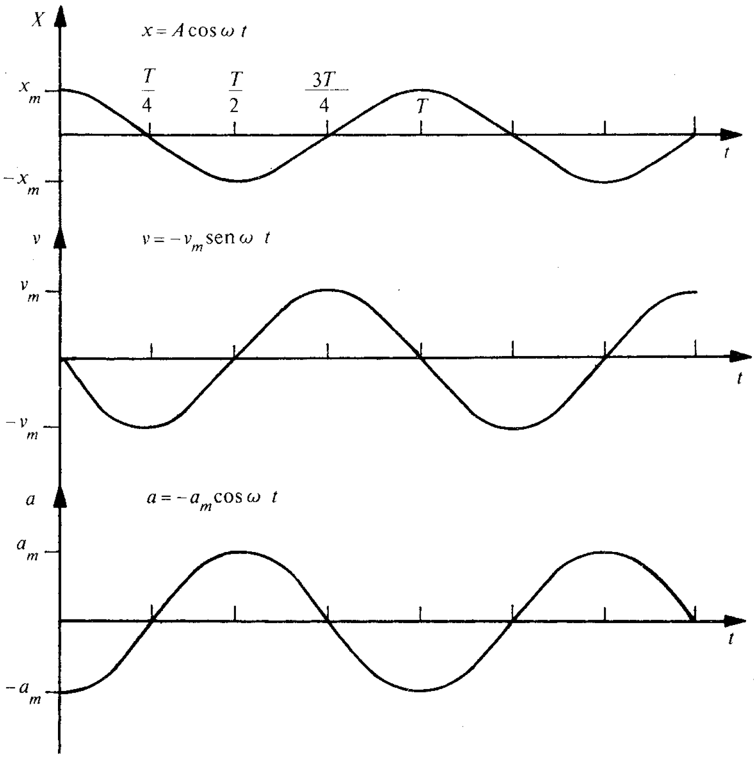


Fig. 7.7

Como puede apreciarse en la figura 7.7 y en correspondencia con las ecuaciones para cada caso se tiene que:

En $t = 0$, $x = x_m$, $v = 0$ y $a = -a_m$.

O sea, que el punto se encuentra inicialmente en la posición de máxima amplitud en el sentido positivo del eje X, siendo su velocidad igual a cero, y su aceleración máxima en el sentido negativo de este eje.

En $t = T/4$, $x = 0$, $v = -v_m$ y $a = 0$.

Es decir, que el punto se encuentra pasando por la posición de equilibrio ($x = 0$ y $a = 0$), y su velocidad es máxima y dirigida en el sentido negativo del eje X.

En $t = T/2$, $x = -x_m$, $v = 0$ y $a = a_m$.

En este instante el punto se encuentra en la posición de máxima amplitud en el sentido negativo del eje X, con velocidad igual a cero y aceleración máxima dirigida en el sentido positivo del eje X.

En $t = 3\ T/4$, $x = 0$, $v = v_m$ y $a = 0$.

Ahora el punto se encuentra nuevamente en la posición de equilibrio, pero moviéndose en el sentido positivo del eje X.

En $t = T$, $x = x_m$, $v = 0$ y $a = -a_m$.

En este instante se repiten las condiciones iniciales.

Tareas

8. Escribe en términos de los parámetros ω, T y f, las ecuaciones para la elongación, la velocidad y la aceleración, en función del tiempo, para un MAS. Considere que en $t = 0$, $x = 0$ y $v = 0$.

9. El esquema de la figura 7.8 representa un cuerpo animado de MAS.

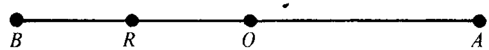


Fig. 7.8

Llena la tabla 7.1 indicando si los valores de x, v y a son positivos, negativos o nulos en los casos siguientes:
a) El cuerpo se encuentra en O dirigiéndose hacia A.
b) El cuerpo llega a A.
c) El cuerpo se encuentra en A dirigiéndose hacia O.
d) El cuerpo pasa por O en su camino hacia B.
e) El cuerpo pasa por R en su camino hacia B.
f) El cuerpo llega a B.
g) El cuerpo pasa por R en su camino hacia O.

Tabla 7.1

	a	b	c	d	e	f	g
x							
v							
a							

10. Dada la ecuación $x = 0{,}2 \cos \pi t$ (x en m si t en s):
    a) calcula los valores de A, ω, T y f;
    b) escribe las ecuaciones para la velocidad y la aceleración;
    c) representa gráficamente las ecuaciones del inciso b.
11. Si la ecuación del movimiento de un cuerpo es $x = 0{,}2 \cos 2\pi t$, llena la tabla 7.2 para los valores de x, v, y a.

Tabla 7.2

t	0	$T/4$	$T/2$	$3T/4$	T
x					
v					
a					

7.3 *Dinámica del movimiento armónico simple*

Analicemos primeramente el carácter de la fuerza bajo la cual se producen las oscilaciones armónicas.

En general, para todo tipo de movimiento:

$$F = m\,a$$

y como en un MAS

$$a = -\omega^2 A \text{ sen } (\omega t + \varphi) = -\omega^2 x,$$

entonces

$$F = -m\omega^2 x,$$

lo que se puede escribir como:

$$F = -k\,x$$

donde

$$k = m\omega^2.$$

Por tanto, siempre que un cuerpo puntual se mueve bajo la acción de una fuerza de la forma $F = -kx$, está animado de un MAS.

De hecho hemos arribado a una definición dinámica del MAS (equivalente a la definición cinemática).

Si sobre un cuerpo puntual actúa una fuerza de la forma $F = -k\,x$, su movimiento será armónico simple.

El parámetro k es una constante característica del sistema oscilatorio, en función de la cual se puede expresar la frecuencia angular de las oscilaciones mediante la relación:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

De esta forma hemos arribado a otra importante conclusión: ω solo depende de m y k.

Completemos el estudio dinámico del MAS analizando su comportamiento energético.

Cuando el punto se encuentra en la posición de elongación máxima, su energía mecánica es de carácter potencial, pues como su velocidad es nula, su energía cinética es cero.

Al pasar el punto por la posición de equilibrio, su velocidad es máxima y por tanto su energía cinética también lo es. Como en esta posición la energía potencial es nula, la energía mecánica es de carácter cinético.

Para cualquier posición entre $x = -A$ y $x = A$, la energía mecánica será la suma de las energías cinética y potencial:

$$E_m = E_c + E_p.$$

En la figura 7.9 se representa cómo varían en función de la posición, la energía cinética y la energía potencial de un punto material animado de un MAS.

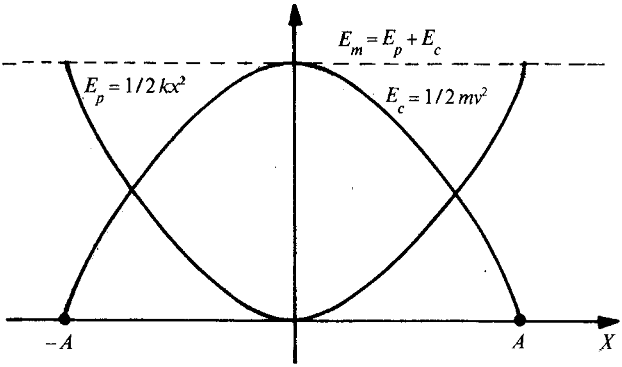


Fig. 7.9

Tareas

12. ¿Cómo se define dinámicamente el MAS?

13. Identifica cuál o cuáles de las fuerzas, cuyos valores vienen dados por las ecuaciones siguientes, podrán provocar un movimiento armónico simple:

$$F = 8\,x^2, \qquad F = -3\,x, \qquad F = -\frac{5}{x}, \qquad F = 3\,x.$$

7.4 *Sistema cuerpo-resorte y péndulo simple*

Analicemos ahora la aplicación del modelo de las oscilaciones armónicas al caso de dos sistemas oscilatorios simplificados: el sistema cuerpo-resorte y el péndulo simple.

En la figura 7.10 se representa un sistema oscilatorio cuerpo resorte. Si las fuerzas disipativas y la masa del resorte se pueden considerar despreciables, y el cuerpo puede ser tratado como un punto material, las oscilaciones se producirán por la acción de la fuerza elástica del resorte.

Como para un resorte $F = -kx$, las oscilaciones que se producirán en las condiciones anteriores serán armónicas simples.

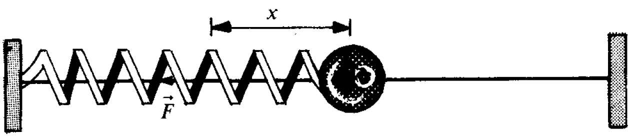


Fig. 7.10

Como

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

para este sistema

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{y} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Otro sistema oscilador que se puede considerar bajo ciertas condiciones armónico simple, es el denominado péndulo simple o matemático. Demostrémoslo:

Precisemos primeramente que un péndulo simple es un sistema oscilador compuesto por un cuerpo que puede ser considerado puntual y que se sostiene de un hilo inextensible y de masa despreciable en comparación con la del cuerpo.

La figura 7.11 permite analizar con facilidad las características de este sistema oscilatorio.

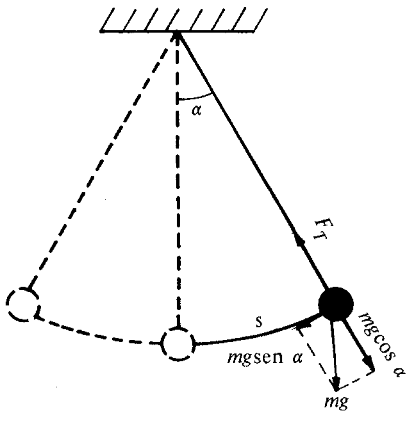


Fig. 7.11

El péndulo se mueve por la trayectoria representada bajo la acción de una fuerza resultante de la forma:

$$F = - \text{mg sen } \alpha$$

si α es pequeño, sen $\alpha \approx \alpha$ y como $\alpha = \frac{s}{l} \approx \frac{x}{l}$

entonces,

$$F = - mg \frac{x}{l}$$

o $F = - kx$

donde:

$$k = \frac{mg}{l}.$$

Por tanto, para amplitudes pequeñas las oscilaciones del péndulo son armónicas y su período será igual a:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/l}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

y su frecuencia $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$. O sea, que el período (o la frecuencia) solo depende de l y g.

En el caso de este sistema, la ecuación que caracteriza las transformaciones energéticas durante las oscilaciones, se puede escribir de la forma:

$$E_m = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{mg}{l} x^2$$

pues $E_p = \frac{1}{2} kx^2$ y $k = \frac{mg}{l}$

Tareas

14. ¿Cuál será el valor del período de un péndulo matemático de longitud 5 m, que oscila en un lugar donde la aceleración gravitatoria es 9,78 m/s?

15. ¿La energía cinética de un cuerpo que oscila animado de MAS puede ser mayor que su energía mecánica si su energía potencial es siempre positiva? Explica tu respuesta.

16. Escribe e interpreta las ecuaciones para el cálculo del período y la frecuencia en función de los parámetros característicos del sistema oscilador en los casos de:
a) el sistema cuerpo resorte, b) el péndulo simple.

17. ¿Qué condición debe cumplir un sistema oscilador constituido por un cuerpo que pende de un hilo, para que pueda ser considerado como un péndulo matemático?

18. ¿Se puede asegurar que la relación $\sqrt{g/l}$ para un péndulo matemático tiene el mismo significado físico que la relación $\sqrt{k/m}$ para un sistema cuerpo-resorte.

19. Dos péndulos simples, cuyos hilos tienen iguales longitudes, oscilan en lugares diferentes. Se observa que el período de uno de ellos es mayor que el otro. ¿A qué atribuyes que se deba esta situación? Explica tu respuesta.

20. Compara los períodos de dos péndulos A y B en los siguientes casos:
   a) Ambos tienen igual masa y el A es cuatro veces más largo que el B.
   b) Ambos tienen igual longitud y el A tiene 16 veces más masa que el B.

21. ¿Cuál será el valor del período de un péndulo matemático de longitud 5 m que oscila en un lugar donde la aceleración gravitatoria es 8,78 m/s^2.

7.5 *Oscilaciones amortiguadas y forzadas. Resonancia*

Oscilaciones amortiguadas

Ya conocemos que la amplitud de las oscilaciones libres de un sistema oscilatorio real, disminuye en el transcurso del tiempo como consecuencia de las fuerzas disipativas, las cuales hacen que disminuya la energía mecánica del sistema.

Analicemos de qué forma varía la amplitud en las oscilaciones amortiguadas.

En la figura 7.12 se representa una varilla hueca terminada en un fino orificio, llena en su interior de un líquido coloreado, y que puede oscilar suspendido de un eje. Si en el instante de comenzar a oscilar, se deja escapar el líquido a la vez que un pedazo de cartón, sobre el cual cae el líquido, se mueve uniformemente en la dirección indicada, en la superficie de este aparecerá reflejada la forma en que va disminuyendo la amplitud de las oscilaciones.

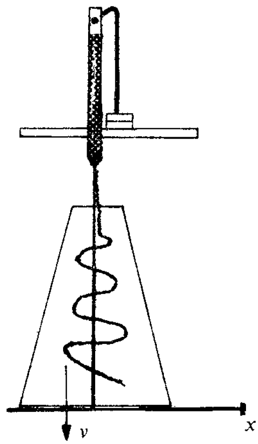


Fig. 7.12

Si el amortiguamiento se incrementa, por ejemplo, si se le pega a la varilla un pedazo de cartón, con su superficie perpendicular a la dirección de las oscilaciones, se podrá observar cómo la amplitud disminuye más rápidamente. En el caso de que el amortiguamiento sea muy grande puede ocurrir que el cuerpo no llegue a rebasar la posición de equilibrio y no se produzcan oscilaciones.

En ocasiones, el amortiguamiento de las oscilaciones resulta perjudicial y es necesario reducir al máximo la acción de las fuerzas disipativas. También hay circunstancias en las cuales el amortiguamiento de las oscilaciones se trata de incrementar, pues estas resultan perjudiciales; como ejemplos de esta última situación, tenemos las oscilaciones de los vehículos automotores, de las agujas indicadoras en instrumentos de medición tales como balanzas y multímetros, etcétera.

Oscilaciones forzadas

Para que las oscilaciones libres no se amortiguen, es preciso que un agente externo actúe sobre el sistema oscilatorio, restituyendo la energía mecánica que se pierde por la acción de las fuerzas disipativas. Conocemos que en este caso las oscilaciones se denominan *forzadas*.

A continuación analizaremos las características esenciales de un sistema oscilatorio forzado.

Resulta conveniente señalar que bajo la acción de una fuerza externa, cualquier cuerpo puede oscilar, por ejemplo, se puede poner a oscilar un libro que descansa sobre la superficie de una mesa, moviéndolo con la mano hacia un lado y otro en la misma dirección. Este tipo de oscilaciones por lo general carece de interés. Los efectos más interesantes y las aplicaciones principales de las oscilaciones forzadas tienen lugar en los sistemas que pueden oscilar por sí solos.

Una idea cualitativa de cómo tienen lugar las oscilaciones forzadas nos la puede dar el examen de la situación que tiene lugar cuando se impulsa a un niño en un columpio.

Un columpio es de hecho un péndulo, es decir, un sistema oscilatorio que posee determinada frecuencia. Hacer que mediante una pequeña fuerza constante, un columpio oscile es imposible. Tampoco se conseguirá que el columpio oscile con gran amplitud si se empuja arbitrariamente. Sin embargo, si se comienza a empujar rítmicamente en el sentido del movimiento, se logrará sin mucho esfuerzo que se alcance una gran amplitud.

Analicemos más detalladamente las características de las oscilaciones forzadas sobre la base del sistema mostrado en la figura 7.13.

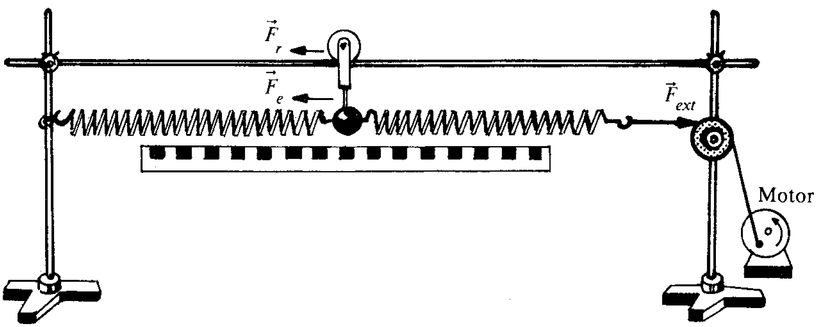


Fig. 7.13

Supongamos que la fuerza aplicada al cuerpo en esta situación es periódica de la forma $F_{ext} = F_m$ sen. $\omega_e t$, y que actúa en la dirección del eje X.

En estas condiciones, si el cuerpo en el instante inicial ($t = 0$) está en reposo y se le somete a la acción de la fuerza F_e, el cuerpo comienza a moverse hacia la derecha, ganando cierta energía aportada por el trabajo que realiza la fuerza externa F_{ext}. A este movimiento se opone la fuerza elástica del muelle $F_e = -kx$ y la fuerza de rozamiento, que en el caso de fricción de tipo vizcosa y velocidades no muy grandes, tiene la forma $F_r = -\beta v$, siendo β el coeficiente de rozamiento en este tipo de situación.

Como resultado de la acción de estas fuerzas, llega un momento en el cual el cuerpo se detiene y luego comienza a regresar a su posición de equilibrio. En general, no es difícil imaginar que el sistema oscila en torno a esa posición, pero sucede que en la etapa inicial, la fuerza de rozamiento es pequeña, pues el cuerpo aún no ha adquirido una gran velocidad; sin embargo, a medida que pasa el tiempo, la energía cinética del cuerpo va aumentando, producto del trabajo de la fuerza externa y,en consecuencia, también aumenta la cantidad de energía que se disipa por causa del rozamiento. La energía que adquiere el sistema en un período es proporcional a la amplitud de las oscilaciones, pues el trabajo que realiza la fuerza externa es proporcional al recorrido que realiza el cuerpo; pero sucede que como el trabajo que realiza la fuerza de rozamiento es proporcional a la amplitud y a la velocidad, y esta última magnitud es proporcional a la amplitud, entonces el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es proporcional al cuadrado de la amplitud.

Al aumentar la amplitud se producen mayores velocidades, lo cual da por resultado que el trabajo de la fuerza de fricción, por ser proporcional al cuadrado de la amplitud, crezca con mayor rapidez que la energía que adquiere el sistema por la acción de la fuerza externa. Esto implica que el movimiento oscilatorio no puede rebasar una determinada amplitud A_m (fig. 7.14) para la cual la energía que recibe el sistema coincide con la que se disipa por causa de la fuerza de fricción.

Mientras menor es el rozamiento del sistema, mayor es la amplitud a la cual se estabilizan las oscilaciones, pues el trabajo de la fuerza de rozamiento es proporcional al coeficiente de rozamiento β. Cuando existe poco rozamiento, las amplitudes de las oscilaciones se estabilizan en un valor relativamente grande.

Mediante el sistema oscilatorio representado en la figura 7.12, podemos analizar cómo varía la amplitud de las oscilaciones forzadas en relación con la frecuencia.

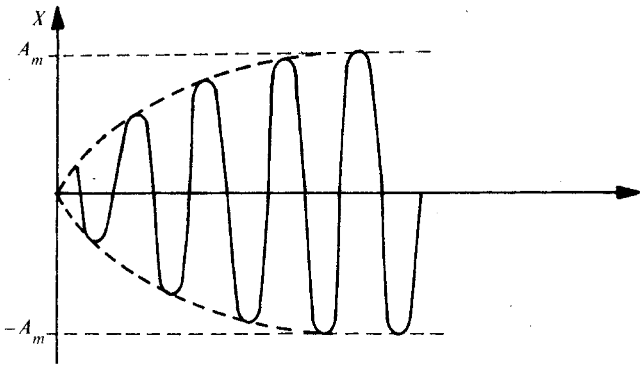


Fig. 7.14

Aumentando la frecuencia de la fuerza externa, sin variar su amplitud, aumenta la amplitud de las oscilaciones y que esta amplitud alcanza su máximo valor cuando la frecuencia de la fuerza externa es igual (en realidad cuando es ligeramente inferior) a la frecuencia de las oscilaciones propias. Al continuar aumentando la frecuencia de la fuerza externa por encima del valor de la frecuencia de las oscilaciones propias, la amplitud de las oscilaciones comienza a disminuir y, para frecuencias muy altas tiende a cero.

Resonancia

Al fenómeno de que la amplitud de las oscilaciones alcance su valor máximo se le denomina *resonancia de amplitud* o simplemente *resonancia* y, a la frecuencia a la cual se produce, *frecuencia de resonancia.*

En la figura 7.15 se representa cómo varía la amplitud de las oscilaciones con la frecuencia para diferentes valores del coeficiente de amortiguamiento viscoso. Nótese que la frecuencia de resonancia depende del coeficiente de amortiguamiento, o sea, del valor de las fuerzas disipativas, y que mientras menor sea la fuerza de fricción, mayor y más próxima a la frecuencia de las oscilaciones propias es la frecuencia a la cual se produce la resonancia.

La frecuencia de resonancia de amplitud coincide exactamente con la frecuencia de las oscilaciones propias solamente en el caso ideal de que no existan fuerzas disipativas, aunque si la influencia de estas es muy pequeña, prácticamente coinciden.

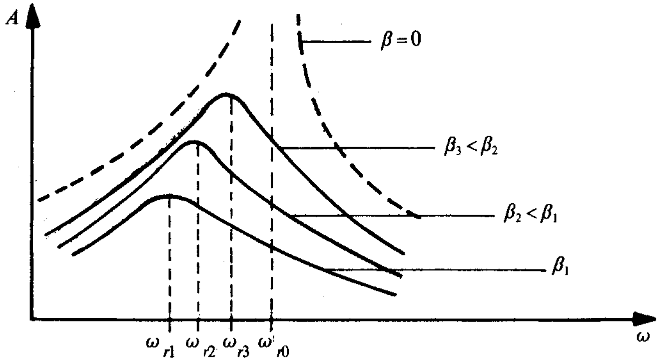


Fig. 7.15

Durante las oscilaciones forzadas ocurre otro interesante fenómeno: el valor máximo de la velocidad también depende de la frecuencia del agente externo y, alcanza su máximo valor cuando la frecuencia del agente externo coincide exactamente con la frecuencia de las oscilaciones propias del sistema y no depende de la magnitud de las fuerzas de fricción. Este fenómeno se conoce con el nombre de *resonancia de velocidad.*

En la figura 7.16 se representa cómo varía el valor máximo de la velocidad con la frecuencia del agente externo.

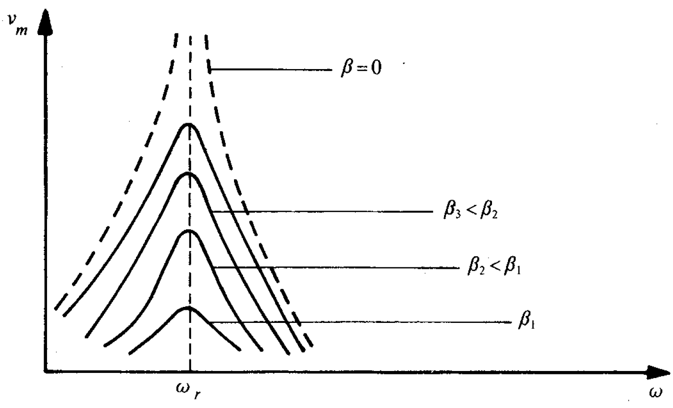


Fig. 7.16

Tareas

22. Explica qué le sucede a la amplitud de las oscilaciones forzadas si el agente externo, en relación con la energía disipada por el sistema, entrega:

    a) más energía,
    b) menos energía,
    c) igual energía.

23. Explica en cuál de los casos siguientes el sistema oscila en resonancia de amplitud si su frecuencia propia es ω_0 y la del agente externo aplicado es:

    a) $\omega_1 > \omega_0$,
    b) $\omega_2 < \omega_0$,
    c) $\omega_3 = \omega_0$.

24. Analiza desde el punto de vista energético las oscilaciones libres, las amoriguadas y las forzadas, y el fenómeno de la resonancia.

TRABAJO DE LABORATORIO 9. Determinación del período de las oscilaciones de un sistema cuerpo-resorte

Mediante este trabajo de laboratorio, podrás determinar experimentalmente el período de las oscilaciones de un sistema cuerpo-resorte y compararlo con el valor teórico dado por la expresión

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} .$$

Instrumentos y materiales: Resorte, cuerpo de 100 g, soporte universal, cronómetro, pinza doble nuez y mordaza.

Indicaciones para el trabajo

1. Fija la base del soporte a uno de los bordes de la mesa con la mordaza. Cuelga el resorte del extremo superior de la varilla mediante la pinza. Coloca en el extremo inferior del resorte el cuerpo de 100 g. Mide lo que se estira el resorte bajo la acción de la fuerza de gravedad que actúa sobre el cuerpo de 100 g y calcula

la constante elástica del resorte. Estima el error cometido en la determinación de k.

2. Determina mediante el cronómetro el período de las oscilaciones del sistema cuerpo-resorte (realiza al menos 5 series de mediciones). Estima el error cometido en la determinación del período.
3. Calcula el valor del período a partir de los valores de m y k, y compáralos con el valor experimental.

Analiza si las diferencias están dentro de los límites de error previsto.

7.6 *Ejercicios resueltos*

1. Un sistema cuerpo-resorte es separado de su posición de equilibrio una distancia de 0,05 m, como se representa en la figura 7.17, y al soltarlo comienza a oscilar armónicamente. Si la masa del cuerpo es de 4 kg y la constante elástica de 625 N/m:

a) determina las ecuaciones cinemáticas del movimiento,
b) construye las gráficas correspondientes a las ecuaciones anteriores para un período,
c) calcula el valor de la fuerza que actúa sobre el cuerpo en el instante $t = 0{,}04$ s.

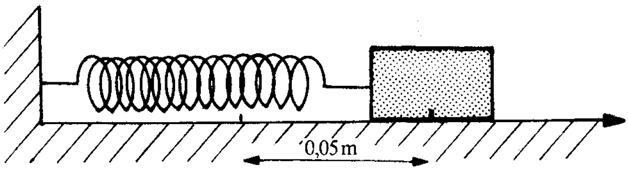


Fig. 7.17

Solución

a) En general, las ecuaciones cinemáticas del movimiento oscilatorio armónico tienen la forma:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$
$$v = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$
$$a = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi).$$

En este caso particular:

$$A = 0{,}05 \text{ m}$$

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{625 \text{ N/m} / 4 \text{ kg}} = 12{,}5 \text{ rad/s}.$$

El valor de φ depende de las condiciones iniciales. Como para este caso debe cumplirse que si $t = 0$, $x = A$ y $v = 0$, entonces:

$$\cos \varphi = 1 \longrightarrow \varphi = 0$$
$$\text{y sen } \varphi = 0 \longrightarrow \varphi = 0 \text{ o } \varphi = \pi,$$

el valor de φ debe ser el que satisfaga ambas condiciones, por tanto:

$\varphi = 0.$

Las ecuaciones cinemáticas serán entonces:

$x = 0{,}05 \cos 12{,}5\, t$ (x en m si t en s)
$v = -0{,}7 \text{ sen } 12{,}5\, t$ (v en m/s si t en s)
$a = -10{,}5 \cos 12{,}5\, t$ (a en m/s^2 si t en s)

b) Además de la forma de las ecuaciones, para construir las gráficas correspondientes, es preciso conocer el período de las oscilaciones. Como:

$\omega = 2\pi/T,$

$$\text{entonces } T = \frac{2\,\pi}{\omega} = \frac{6{,}28 \text{ rad}}{12{,}5 \text{ rad/s}} = 0{,}5 \text{ s}.$$

Las gráficas correspondientes a cada una de las ecuaciones serán como se muestra en la figura 7.18.

c) En general, $F = -kx$. Por tanto, para obtener el valor de F en $t = 0{,}04$ s, es preciso conocer el valor de x en dicho instante. Por tanto, para $t = 0{,}04$ s:

$$x = 0{,}05 \cos (12{,}5 \cdot 0{,}04) = 0{,}05 \cos (0{,}5) = 0{,}05 \cos (\pi/6)$$
$$= 0{,}05 \cdot \sqrt{3}/2 = 0{,}04 \text{ m}$$

y $F = -625 \text{ N/m} \cdot 0{,}04 \text{ m} = -25 \text{ N}.$

2. En la figura 7.19 se muestra la gráfica de $x = f(t)$ para un sistema cuerpo-resorte que realiza oscilaciones armónicas.

a) Escribe las ecuaciones cinemáticas del movimiento.

b) Calcula los valores de x, v y a en el instante $t = 0{,}25$ s.

c) Si las oscilaciones corresponden a un sistema cuerpo-resorte y la masa del cuerpo es de 0,5 kg, ¿cuál es la constante elástica del resorte?

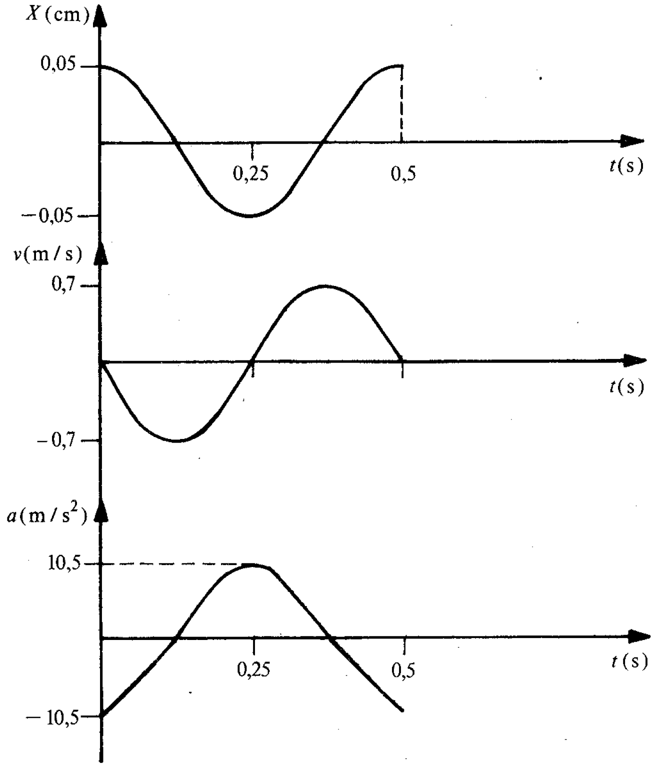


Fig. 7.18

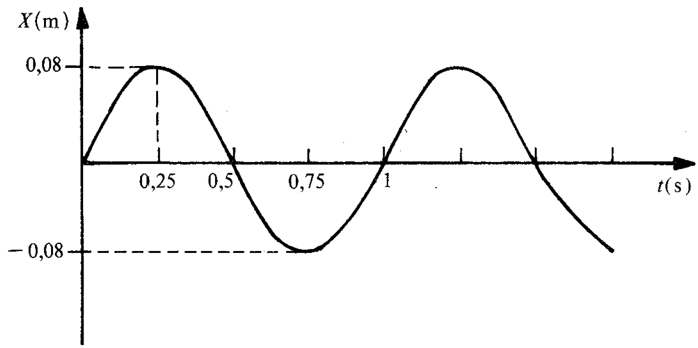


Fig. 7.19

Solución

Las ecuaciones cinemáticas generales del MAS son:

$x = A \cos (\omega t + \varphi)$
$v = -\omega A \text{ sen } (\omega t + \varphi)$
$a = -\omega^2 A \cos (\omega t + \varphi).$

Para este caso particular, de la gráfica se puede obtener que
$A = 8$ cm $= 0{,}08$ m
$T = 1$ s y $\omega = 2\pi/T = 2\pi$ rad/s.

Como en $t = 0$, $x \doteq 0$ y $v = v_m$, entonces
$\cos \varphi = 0 \longrightarrow \varphi = \pi/2$ o $3\pi/2$
$\text{sen } \varphi = -1 \longrightarrow \varphi = 3\pi/2.$
De manera que para satisfacer ambas condiciones tiene que ser
$\varphi = 3\pi/2.$
Las condiciones cinemáticas para este caso serán entonces:
$x = 0{,}08 \cos (2\pi t + 3\pi/2)$ (x en m si t en s)
$v = -0{,}5 \text{ sen } (2\pi t + 3\pi/2)$ (v en m/s si t en s)
$a = -3 \cos (2\pi t + 3\pi/2)$ (a en m/s^2 si t en s).

También es posible escribir las ecuaciones de manera más sencilla, escribiendo directamente a partir de la gráfica que:
$x = A \text{ sen } \omega t = 0{,}08 \text{ sen } 2\pi t$ (x en m si t en s)
y a partir de aquí

$v = \omega A \cos \omega t = -0{,}5 \cos 2\pi t$ (v en m/s si t en s)
$a = \omega^2 A \text{ sen } \omega t = -3 \text{ sen } 2\pi t$ (a en m/s^2 si t en s).

b) Para calcular los valores de x, v y a en $t = 0{,}25$ s hasta con sustituir este valor de t en las ecuaciones correspondientes:

$x = 0{,}08 \cos (2\pi\ 0{,}25 + 3\pi/2) = 0{,}08$
$v = -0{,}05 \text{ sen } (2\pi \cdot 0.25 + 3\pi/2) = 0{,}5 \text{ sen } 2\pi = 0$
$a = -3 \cos (2\pi \cdot 0{,}25 + 3\pi/2) = -3$ m/s^2.

c) En el caso de un sistema cuerpo-resorte

$$\omega = \sqrt{k/m} \longrightarrow k = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 19{,}7 \text{ N/m}.$$

3. Un péndulo simple realiza oscilaciones pequeñas en correspondencia con la ecuación $x = 1{,}5 \cos 200\ \pi t$ (x en cm si t en s).
a) Representa la posición del péndulo en el instante de comenzar las oscilaciones.

b) Escribe las ecuaciones del movimiento para $v = f(t)$ y $a = f(t)$.
c) Calcula la longitud del péndulo considerando que $g = 9{,}8$ m/s^2.
d) Calcula la masa del péndulo si su energía potencial máxima es de 10^4 J.

Solución

a) Para representar la posición en el instante inicial, es preciso conocer el valor de la coordenada del cuerpo en dicho instante. Como para este caso $x = 1{,}5 \cos 200\pi t$ (x en cm si t en s), en $t = 0$ se tendrá que:

$$x = 1{,}5 \cos 0 = 1{,}5 \text{ cm}.$$

Por tanto, la posición del péndulo será la representada en la figura 7.20.

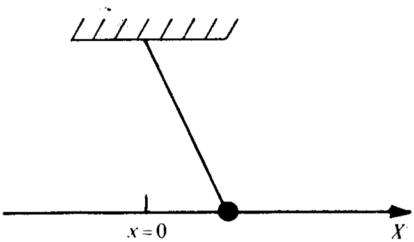


Fig. 7.20

b) Como la ecuación para la coordenada es de la forma:

$$x = A \cos \omega t \quad (x \text{ en cm si } t \text{ en s}),$$

entonces

$$v = -\omega A \text{ sen } \omega t \quad (v \text{ en cm/s si } t \text{ en s})$$

y

$$a = -\omega^2 A \cos \omega t \; (a \text{ en cm/s}^2 \text{ si } t \text{ en s}).$$

Como para este caso $A = 1{,}5$ cm, $\omega = 200\ \pi$ rad/s (además $\varphi = 0$), tendremos pues que:

$$v = -300\pi \text{ sen } 200\ \pi t \quad (v \text{ en cm/s si } t \text{ en s})$$

$$a = 6 \cdot 10^4 \pi^2 \cos 200\pi t \quad (a \text{ en cm/s}^2 \text{ si } t \text{ en s}).$$

Como

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

y como

$$T = \omega/2\pi$$

$$l = 0{,}25 \text{ m}$$

d) Como

$$E_{p\ max} = E_{c\ max}$$

y

$$E_c = 1/2\ m\ v^2,$$

donde

$$v = \omega\ A,$$

entonces

$$E_p = 1/2\ m\ \omega^2 A^2$$

y

$$m = \frac{2\ E_p}{\omega^2 A^2} = \frac{2(10^4)\text{J}}{(200\ \pi)^2\ (1{,}5\ 10^{-2}\ \text{m})^2}$$

$$m = 0{,}05 \text{ kg.}$$

Otra forma de calcular la masa es la de utilizar directamente la ecuación para la energía potencial máxima en el caso del péndulo simple, a saber

$$E_{p\ max} = \frac{1}{2}\ \frac{m\ g}{l}\ A^2.$$

4. ¿Cómo varía el período de las oscilaciones de un péndulo al trasladarlo de la Tierra a la Luna? La masa de la Luna es 81 veces menor que la masa de la Tierra y el radio de la Tierra es 3,7 veces mayor que el radio de la Luna.

Solución

Como la longitud del péndulo no varía, la relación entre los períodos de oscilaciones en la Luna y la Tierra está dada por:

$$\frac{T_L}{T_T} = \frac{2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_L}}}{2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_T}}} = \sqrt{\frac{g_T}{g_L}}$$

donde se conoce que g es la aceleración de caída libre en cada uno de estos astros. De acuerdo con la ley de gravitación universal, esta será:

$$g = \gamma\frac{M}{R^2},$$

donde γ es la constante de gravitación. Por lo que sustituyendo en la relación de períodos:

$$\frac{T_L}{T_T} = \frac{\sqrt{\gamma\dfrac{M_T}{R_T^2}}}{\sqrt{\gamma\dfrac{M_L}{R_L^2}}} = \sqrt{\frac{M_T R_L^2}{M_L R_T^2}}$$

como

$$\frac{M_T}{M_L} = 81 \text{ y } \frac{R_L}{R_T} = \frac{1}{3{,}7},$$

entonces

$$\frac{T_L}{T_T} = \sqrt{81 \cdot \left(\frac{1}{3{,}7}\right)^2}$$

$$\frac{T_L}{T_T} \approx 2{,}4,$$

lo cual nos dice que el período de un péndulo en la Luna es 2,4 veces mayor que en la Tierra.

5. ¿Cómo varía el período de un cuerpo que oscila verticalmente suspendido de dos resortes iguales en serie si se colocan los resortes en paralelo?

Solución

El período de las oscilaciones de un resorte está dado por:

$$T = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

donde k es la constante elástica del resorte e igual a la relación entre la fuerza elástica y la deformación:

$$k = \frac{F}{x}.$$

En la figura 7.21a se muestra el cuerpo colgando de uno de los resortes cuya fuerza elástica máxima es F, producto de la deformación x para equilibrar la fuerza de gravedad F_g que actúa sobre el cuerpo.

Durante la unión en serie de los dos resortes iguales la fuerza recuperadora F_1 (fig. 7.21b) que ejerce el sistema es igual a F pues equilibra la misma fuerza de gravedad F_g ya que se trata del mismo cuerpo, pero con una deformación del sistema (x_1) igual a $2x$ producto de la deformación x en cada resorte.

Por tanto tenemos que:

$$F_1 = F$$

pero $F_1 = k_1 x_1 = k\ x$

y $x_1 = 2\ x$

por lo que

$$k_1 = \frac{k\ x}{2\ x} = \frac{k}{2}$$

siendo k_1 la constante elástica del sistema formado por los dos resortes en serie.

Durante la unión en paralelo de dos resortes iguales, la fuerza F_2 necesaria para aumentar la longitud de ambos resortes en x, debe ser dos veces mayor que F (fig. 7.21c). Por lo que:

$$F_2 = 2F$$

$$k_2x_2 = 2\ kx,$$

pero $x_2 = x$

por tanto, $k_2 = 2\ x$

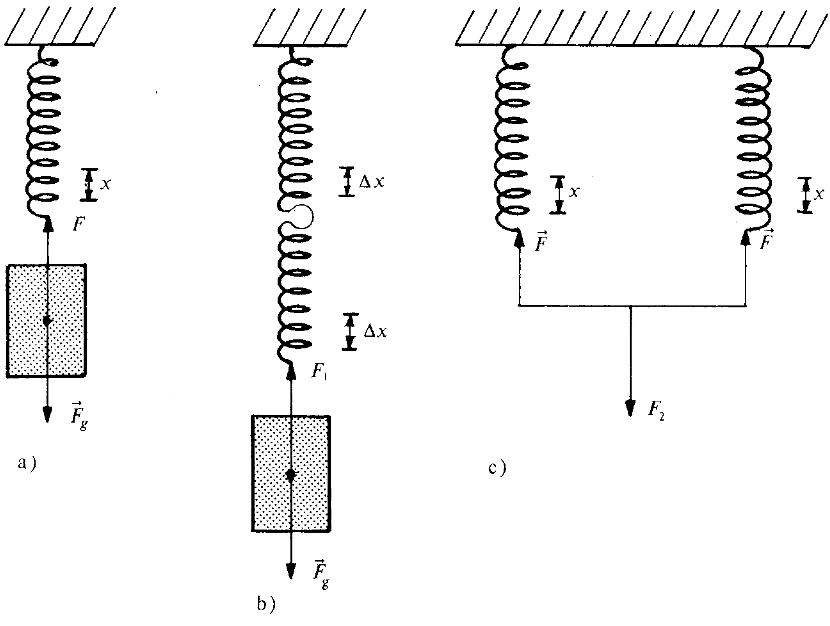


Fig. 7.21

siendo k_2 la constante elástica del sistema formado por los dos resortes colocados en paralelo.
Al unir los resortes en serie:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\,m}{k}}$$

Al unir los resortes en paralelo

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

de aquí

$$\frac{T_1}{T_2} = 2$$

El período disminuye en 2 veces.

Tareas generales del capítulo

1. Un sistema cuerpo-resorte es separado de su posición de equilibrio como se representa en la figura 7.22 y al soltarlo comienza a oscilar armónicamente. Si la masa del cuerpo es de 7 kg y la constante elástica del resorte de 588 N/m:
   a) determina la ecuación de la posición en función del tiempo;
   b) representa la gráfica de dicha ecuación.

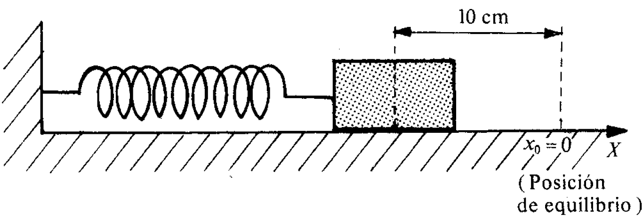


Fig. 7.22

2. La gráfica de la figura 7.23 nos da los valores de la elongación para cada instante de una partícula que oscila. Plantea la ley del movimiento representado.

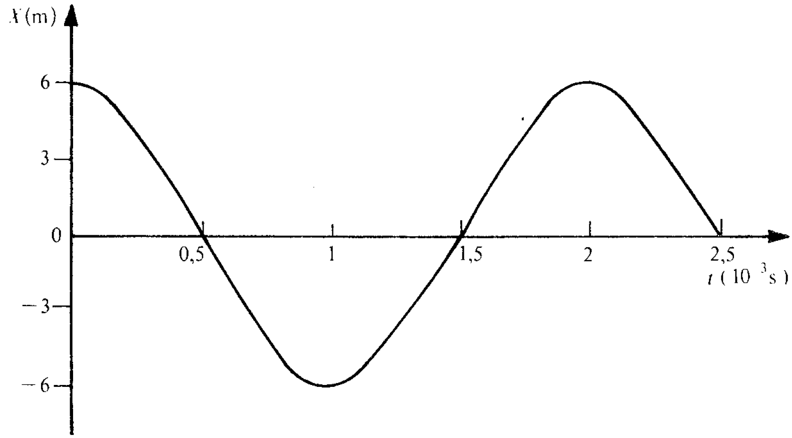


Fig. 7.23

3. La ecuación que rige el movimiento de un cuerpo que oscila armónicamente es $x = 40$ sen $(8\pi t + \pi/2)$ (x en m si t en s).
   a) Evalúa la elongación para los instantes $t_1 = 0$ y $t_2 = 0{,}625$ s
   b) Construye la gráfica de x en función de t.
4. La coordenada x de un cuerpo cambia con el tiempo de la manera siguiente: $x = 3{,}5 \cos 4\pi t$ (x en cm si t en s).
   ¿Cuál será la amplitud de las oscilaciones y la frecuencia angular? ¿Cuál será la fase de las oscilaciones pasados 5 min desde el momento del comienzo de las oscilaciones?
5. La gráfica $x = f(t)$ (fig. 7.24) corresponde a la oscilación armónica de una partícula. Determina:
   a) el período de las oscilaciones, b) la frecuencia cíclica,
   c) la amplitud, d) la ecuación del movimiento.

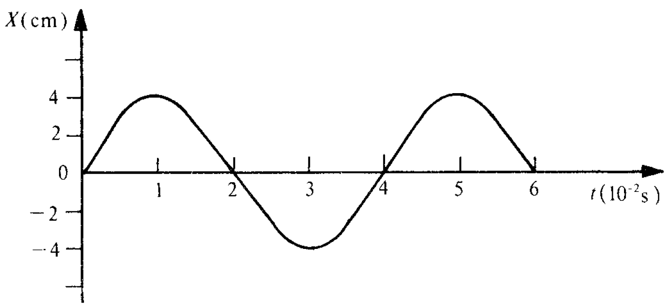


Fig. 7.24

6. La elongación de un movimiento armónico simple viene dada por la ecuación $x = 25$ sen $4\pi t$ (x en mm si t en s). Determina:
   a) la amplitud,
   b) la frecuencia y el período,
   c) la ecuación de la velocidad y el valor máximo de esta,
   d) la ecuación de la aceleración y el valor máximo de esta.

7. Una partícula vibra con un movimiento armónico simple de 2 mm de amplitud y su aceleración en los extremos de la trayectoria es de 78,96 m/s². Calcula:
   a) la frecuencia,
   b) el valor de la velocidad cuando pasa por la posición de equilibrio.

8. Un cuerpo realiza oscilaciones a razón de 100 en 25 s, separándose 3 cm como máximo de su posición de equilibrio.
   a) Calcula la frecuencia, el período y la frecuencia angular.
   b) Plantea la ley del movimiento suponiendo que las oscilaciones comienzan en la máxima elongación positiva.

9. Un cuerpo oscila armónicamente de acuerdo con la ecuación $x = 10$ sen $0{,}5\pi t$ (x en cm si t en s). ¿Qué tiempo invierte en recorrer la longitud entre la posición de equilibrio y la posición máxima?

10. A partir de los datos que ofrece la gráfica $x = f(t)$ de un MAS (fig. 7.25), determina:
    a) la velocidad máxima del cuerpo,
    b) la aceleración máxima,

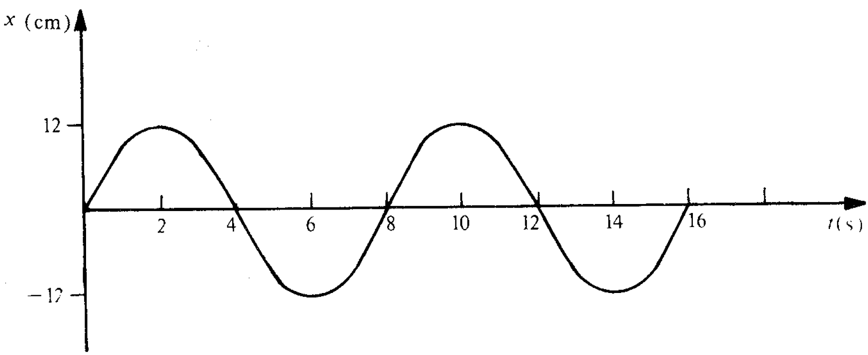


Fig. 7.25

c) el valor de la velocidad y la aceleración para los instantes $t = 4$ s y $t = 1$ s.

11. Un cuerpo suspendido de un resorte se desvía 2 cm de su posición de equilibrio y se deja oscilar. ¿Qué parte del período T habrá transcurrido cuando este cuerpo recorra el primer centímetro?

12. Para un sistema oscilatorio cuerpo-resorte, la constante elástica del muelle es 10^2 N/m y la masa del cuerpo de 4 kg. Si oscila armónicamente con elongación máxima de 0,2 m, calcula los valores de la:

a) energía potencial elástica máxima,
b) energía cinética máxima,
c) energía mecánica,
d) velocidad máxima.

13. Un sistema cuerpo-resorte, cuya $k = 100$ N/m, oscila con un movimiento armónico simple de amplitud 0,5 mm y una frecuencia de 15 Hz. Calcula la velocidad, la aceleración y la energía cinética que posee al cabo de un segundo de comenzar el movimiento. Considera que el movimiento se inicia a partir de la posición extrema positiva.

14. El resorte de la figura 7.26 está comprimido 7 cm respecto a su longitud normal. La masa del cuerpo unido a él es de 175 g y la constante elástica de 2 500 N/m. Calcule la velocidad que poseerá el cuerpo al pasar por el punto de equilibrio.

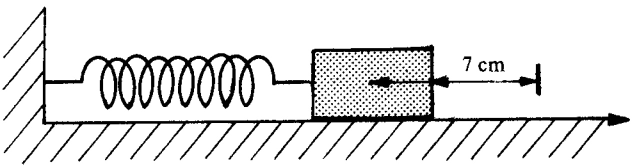


Fig. 7.26

15. Sean dos sistemas oscilatorios: un cuerpo que cuelga de un hilo y otro unido a un resorte, según se representa en la figura 7.27. Ambos oscilan armónicamente. Completa las tablas 7.3 y 7.4 para cada sistema, considerando que para el sistema cuerpo-resorte son datos k y x_m y para el péndulo, m y v_m.

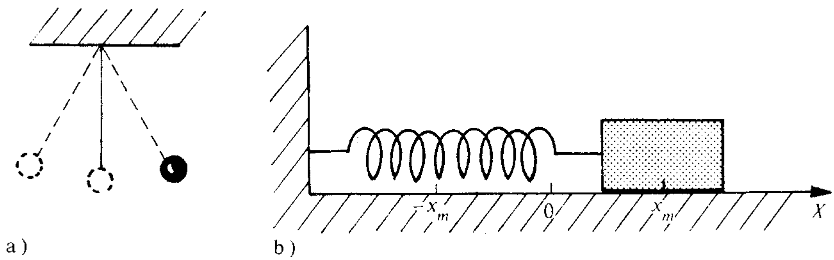


Fig. 7.27

Tabla 7.3

x	E_p	E_c	E
0			
x_m			
$x_m/2$			
$x_m/\sqrt{2}$			

Tabla 7.4

x	E_p	E_c	E
0			
x_m			
$x_m/2$			
$x_m/\sqrt{2}$			

16. La ecuación del movimiento de un sistema es de la forma $x = 2$ sen $(\pi t/4 + \pi/4)$ (x en m si t en s), y la masa del cuerpo que vibra en el sistema es de 16 g.
    Construye las gráficas de la energía cinética, potencial y total del cuerpo para un período.

17. De un mismo alambre cuelgan varios cuerpos como se aprecia en la figura 7.28. Al poner a oscilar el péndulo *P*, uno de los restantes alcanza una amplitud igual a la de *P*, no así el resto. ¿Cuál de ellos alcanza dicha amplitud? ¿Cómo explicas este fenómeno?

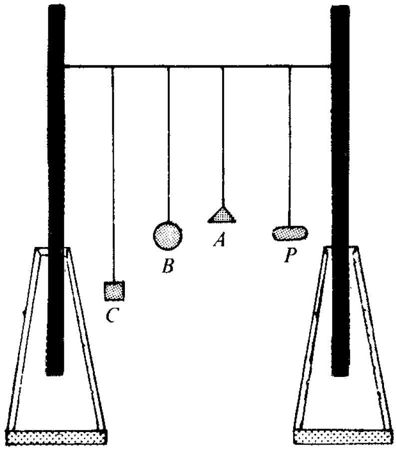


Fig. 7.28

18. En la gráfica $x_m = f(\nu)$ (fig. 7.29) se representan las curvas de resonancia correspondientes a dos sistemas oscilatorios.
    a) ¿Qué valor toma la amplitud de oscilaciones del sistema *A* cuando lo hace con una frecuencia de 60 Hz?
    b) ¿Cuál es el valor de la frecuencia de resonancia de cada sistema?

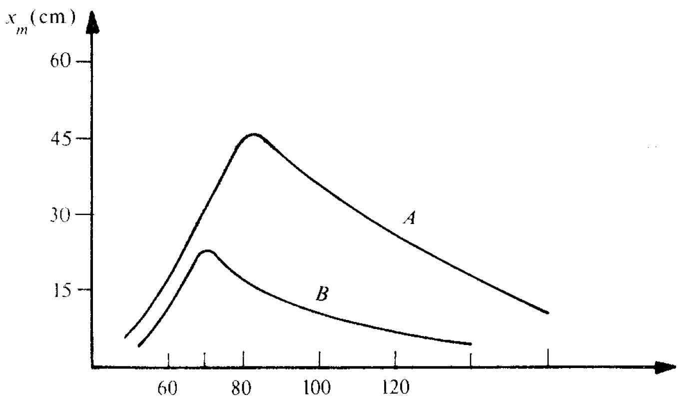


Fig. 7.29

19. Un sistema oscilador realiza sus oscilaciones libres cumpliendo la ecuación $x = 5{,}3$ sen $100\ \pi\ t$. Se le aplica una fuerza que actúa periódicamente, y cuyo valor varía en la forma:

$$F = \cos\left(\frac{250}{2{,}5}\ \pi\ t + \frac{\pi}{2}\right).$$

¿Se lograrán oscilaciones de máxima amplitud? Representa aproximadamente la forma de la gráfica $x_m = f(\omega)$ para este caso.

20. Un péndulo realiza 10 oscilaciones y otro en el mismo tiempo realiza 6. La diferencia en las longitudes de los dos péndulos es de $\Delta l = 16$ cm. Determina las longitudes l_1 y l_2 de los péndulos.

21. ¿Qué valor posee el período de las oscilaciones de un péndulo de longitud l que oscila en un elevador que se mueve con una aceleración a_0 dirigida verticalmente hacia arriba?

22. Una esfera que se encuentra suspendida de un hilo en un vagón de ferrocarril se balancea a causa del movimiento del tren sobre los raíles. ¿A qué velocidad del tren la amplitud de las oscilaciones será máxima si la longitud de los raíles es de 12,5 m y la del péndulo es de 44 cm?

23. Un tablero se mueve horizontalmente con movimiento armónico simple cuya amplitud es de 0,3 m. Si el tablero da 15 oscilaciones por minuto, calcula el valor mínimo que debe tener el coeficiente de fricción para que un cuerpo colocado sobre el tablero no se deslice cuando este se mueva.

24. La ecuación del movimiento de un sistema es de la forma

$$x = 2\ \text{sen}\left(\frac{\pi\ t}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\ [\text{m}]$$

vibra y la masa del cuerpo que en el sistema es de 16 g. Construye las gráficas de energía cinética, potencial y total del cuerpo para un período.

25. Dos bloques, con masas m_1 y m_2 están unidos por un muelle con coeficiente de rigidez k; inicialmente el muelle está comprimido en una cantidad x, de modo que el primer bloque se encuentra apretado contra la pared y el segundo se mantiene en

su posición mediante un tope (fig. 7.30).
¿Cómo se moverán los bloques si eliminamos el tope?

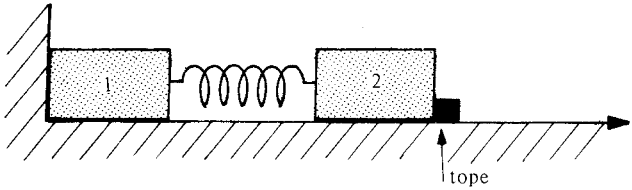


Fig. 7.30

Capítulo 8
ONDAS MECÁNICAS

El concepto de *movimiento ondulatorio,* o más simplemente el concepto de *onda,* no nos resulta ajeno. En la naturaleza, el movimiento mecánico ondulatorio es tan frecuente como el movimiento mecánico corpuscular, baste citar un ejemplo con el cual ya estamos familiarizados de cursos anteriores: el sonido.

En este capítulo ampliaremos y profundizaremos en las características fundamentales del movimiento mecánico ondulatorio, lo cual nos permitirá dar una interpretación unificada a un gran número de fenómenos aparentemente diversos, y aplicar posteriormente estos conocimientos al estudio de las ondas electromagnéticas.

8.1 *Concepto y características del movimiento mecánico ondulatorio*

Recordemos brevemente algunos ejemplos de movimiento ondulatorio y qué se entiende en general por una onda.

Si al extremo de una cuerda de escalamiento le damos una sacudida, esta perturbación del estado mecánico provocada en dicho extremo se propaga a lo largo de la cuerda (fig. 8.1a), sin que esta se desplace como un todo. Si se pulsa la cuerda de una guitarra, las oscilaciones que tienen lugar en ella se propagan en forma de compresiones y enrarecimientos del aire que la rodea, las cuales pueden alcanzar e impresionar nuestros órganos auditivos, sin que por ello ocurra un desplazamiento neto del aire por el que se propagan las oscilaciones provocadas por la cuerda vibrante. Si se deja caer una pequeña piedra en el centro de una piscina estando la superficie del agua tranquila, la perturbación provocada por la caída de la piedra se propaga en forma de pequeñas olas que forman círculos concéntricos (fig. 8.1b) sin que por ello se desplace el agua.

Conocemos que en estos casos estamos en presencia de lo que denominamos *movimiento mecánico ondulatorio,* o simplemente *onda mecánica.*

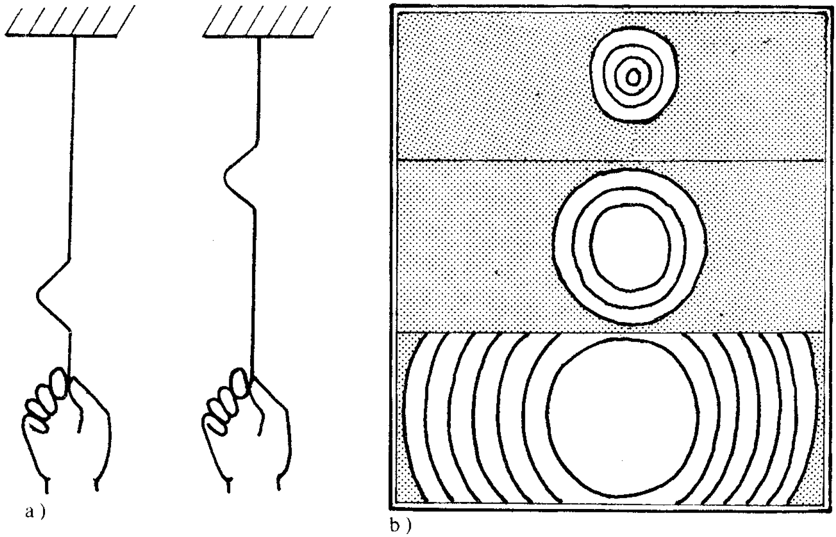


Fig. 8.1

Se denomina onda mecánica a la propagación de una perturbación de naturaleza mecánica en un medio.

¿Cuáles son las características fundamentales de este tipo de movimiento?

Detengámonos en esta cuestión de manera que puedas recordar y ampliar tus conocimientos sobre las características de las ondas.

En primer término debemos señalar que *las ondas mecánicas solamente pueden ser originadas en la sustancia* (en cualquiera de sus estados de agregación). Esta importante característica puede ser convincentemente ilustrada mediante un experimento como el mostrado en la figura 8.2.

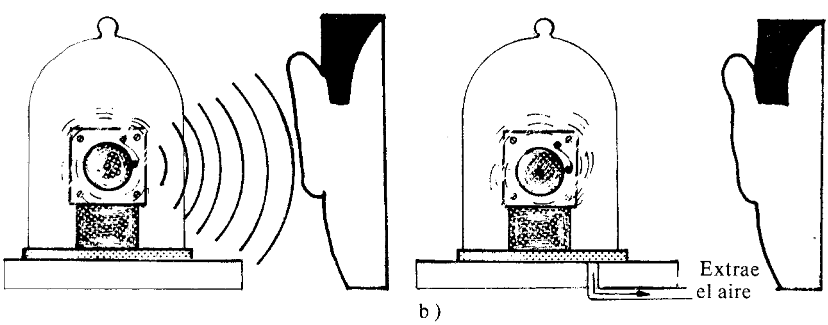


Fig. 8.2

Analicemos otra importante característica del movimiento ondulatorio: si el extremo de un resorte (o de una cuerda) se hace oscilar como se indica en la figura 8.3a, al cabo de cierto intervalo de tiempo, un punto cualquiera *P* alejado del extremo del resorte, también comenzará a oscilar (fig. 8.3b), es decir, una onda mecánica se propaga a través del resorte. Notemos que todos los puntos del resorte se mueven (verticalmente en torno a la posición inicial que es la posición de equilibrio), pero no existe una traslación neta de las diferentes partes del resorte en el sentido en que se propaga la onda.

Si el extremo del resorte se hace oscilar como se ilustra en la figura 8.3c, también al cabo de cierto tiempo el punto *P* comenzará a oscilar (fig. 8.3d). En este caso la dirección de las oscilaciones de las diferentes partes que componen el resorte coincide con la dirección en que se propaga la onda, pero tampoco hay una traslación neta de las partes que componen el resorte en el sentido de propagación de la onda.

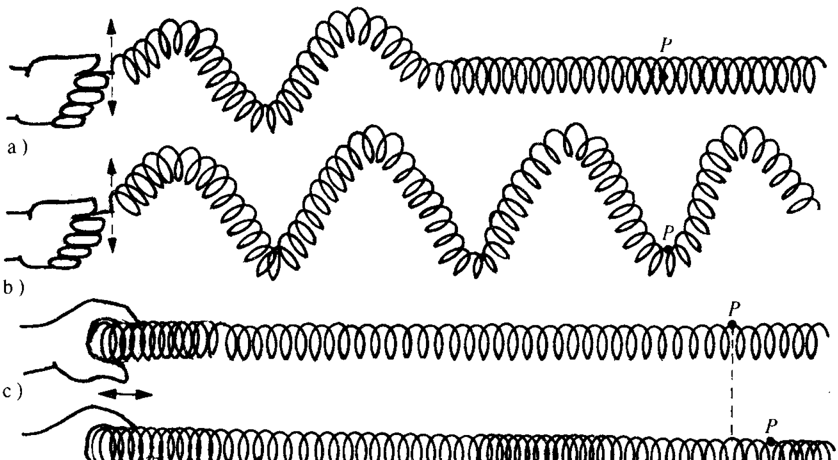


Fig. 8.3

La ausencia del transporte neto de sustancia en el movimiento ondulatorio constituye una característica fundamental de las ondas que distingue a este tipo de movimiento del corpuscular. O sea, durante el movimiento ondulatorio se trasmiten las oscilaciones (en general las perturbaciones), y con ello, por supuesto, la energía y la cantidad de movimiento de dichas oscilaciones, sin que para ello medie el movimiento traslacional de las partículas de un punto a otro del medio.

Analicemos más detalladamente el proceso de trasmisión de las oscilaciones. En la figura 8.4 se representa esquemáticamente el proceso de trasmisión de las oscilaciones en un resorte o cuerda elástica.

Cada parte de la cuerda o resorte (indicada en la figura con un número) posee masa y elasticidad. Al desplazar con la mano hacia la izquierda la parte 1, esta se estira y ejerce una fuerza sobre la parte 2 que la obliga a desplazarse en el mismo sentido que la parte 1, pero no instantáneamente, sino que requiere de cierto intervalo de tiempo, a causa de la inercialidad de cada parte. Por tal motivo, el movimiento de la parte 2 no ocurre en igualdad de fase con el movimiento de la parte 1, y mientras mayor sea la densidad de la cuerda o resorte, mayor será la diferencia de fase entre el movimiento de cada una de las partes.

Cierto tiempo después de desplazada la parte 1, la parte 2 comienza a actuar sobre la parte 3, y esta a su vez, cierto intervalo de tiempo después, actúa sobre la parte 4, y así sucesivamente. De esta forma se propaga la oscilación a lo largo de la cuerda o resorte con una velocidad determinada v.

Analicemos ahora las magnitudes fundamentales que caracterizan cuantitativamente a las ondas.

Período, longitud de onda, velocidad de propagación y amplitud

En el caso del movimiento ondulatorio, se denomina período, al intervalo de tiempo en que las partículas del medio por el que se propaga la onda, realizan una oscilación completa.

Notemos que en la situación esquematizada en la figura 8.4 cuando la parte 1 ha completado una oscilación, o sea, al cabo de un período, y comienza nuevamente su movimiento hacia la izquierda, la parte 16 también comienza a moverse hacia la izquierda. Resulta claro, entonces, que estas dos partes oscilan en fase, y que también oscilan en fase las partes 2 y 17, 3 y 18, etcétera.

Esto significa que en el movimiento ondulatorio, además de la periodicidad temporal que caracteriza la oscilación de cada uno de los puntos del medio por el que se propaga la onda, existe una periodicidad espacial, que caracteriza la repetición de la configuración de la onda a lo largo de la dirección de propagación.

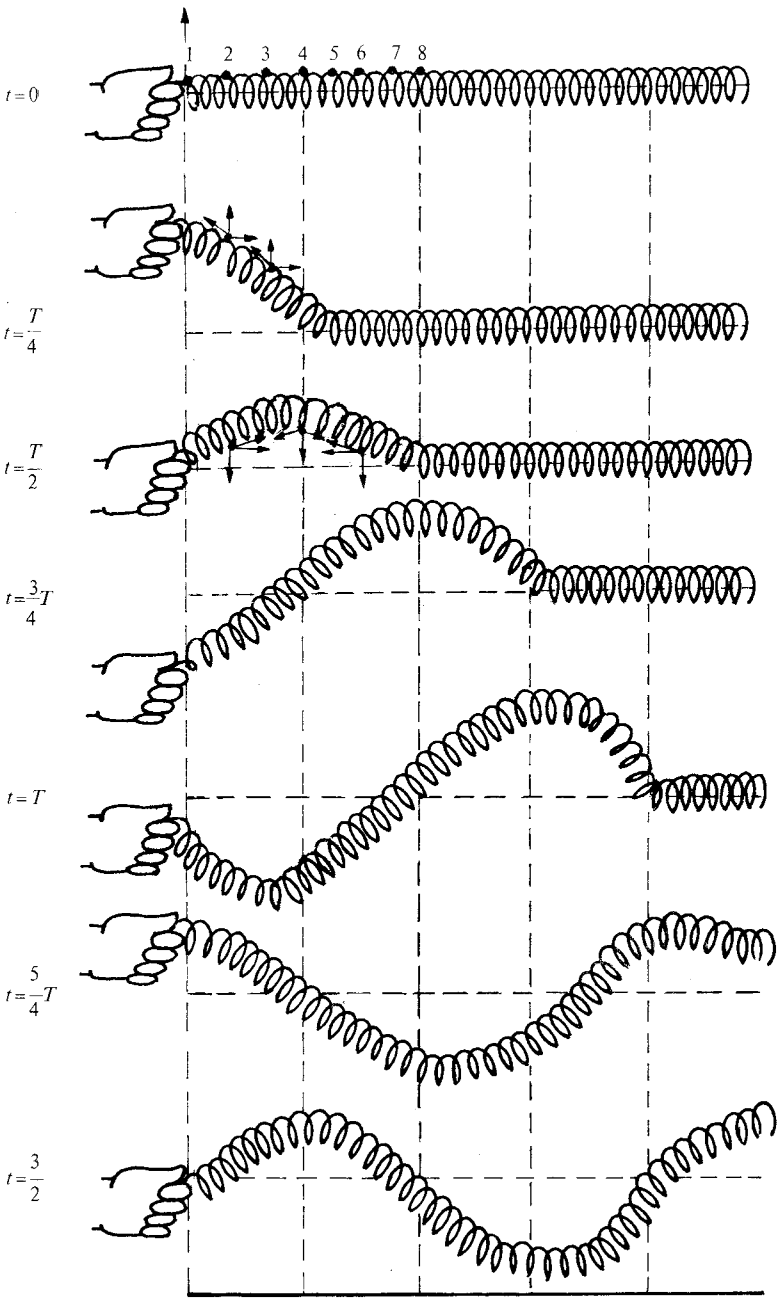


Fig. 8.4

Esta periodicidad espacial se puede caracterizar cuantitativamente por la mínima distancia entre dos puntos que oscilan en fase, y se denomina *longitud de onda* (λ).

Es decir, la longitud de onda (λ) es la distancia mínima entre dos puntos que oscilan en fase.

Como en cada período T, la onda recorre una distancia igual a una longitud de onda λ, entonces la velocidad de propagación se puede expresar en función de λ y T mediante la ecuación:

$$v = \frac{\lambda}{T} \quad \text{o} \quad v = \lambda\nu \quad \text{puesto que} \quad T = \frac{1}{\nu}\,.$$

No es difícil percatarse de que la velocidad de propagación de una onda depende de las características elásticas del medio y de la densidad. Por ejemplo, en un mismo resorte, una onda viaja más rápidamente mientras más estirado esté el resorte. En dos resortes diferentes, e igualmente tensos, la onda se propagará más rápidamente, en el que la masa por unidad de longitud será menor.

La amplitud de una onda es la elongación máxima con que oscilan las partículas del medio por el cual se propaga la onda.

Ondas transversales y ondas longitudinales

Cuando la dirección de las oscilaciones es perpendicular a la dirección de propagación de la onda (fig. 8.3b), la onda se denomina *transversal;* y cuando la dirección de las oscilaciones es paralela (fig. 8.3d) a la dirección de propagación, se denomina *longitudinal.*

Las ondas transversales se pueden obtener solamente en los sólidos, por ejemplo, a lo largo de un cordón elástico o de un resorte (fig. 8.3 b), sobre la superficie de un sólido (fig. 8.5a), etcétera.

Las ondas longitudinales se pueden obtener a lo largo de una cuerda o resorte (fig. 8.3d), y en el seno de un sólido (fig. 8.5b), líquido o gas (fig. 8.2a).

Existen ondas en que las partículas del medio realizan movimientos más complejos producto de la combinación de oscilaciones longitudinales y transversales simultáneas, un ejemplo de este tipo de ondas son las que se producen en la superficie de los líquidos.

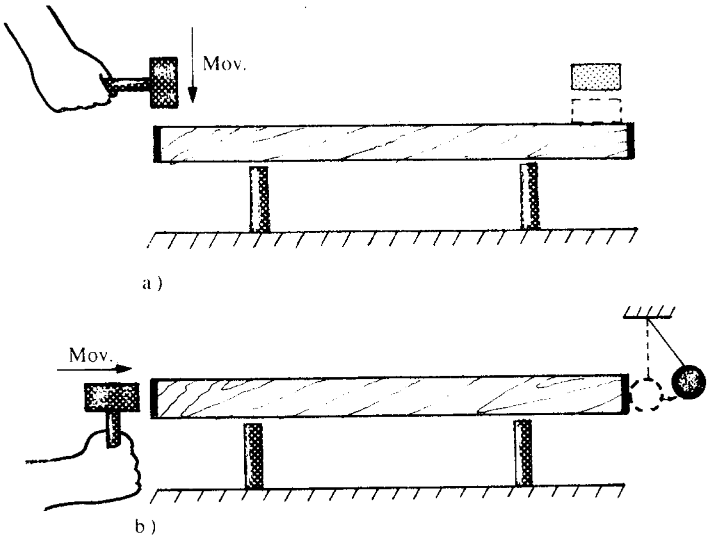


Fig. 8.5

Ondas planas, circulares y esféricas

En un cordón elástico o en un resorte, las ondas pueden propagarse solamente en una dirección a lo largo de ellos. A estas ondas se les denomina en general *unidimensionales.*

No ocurre así en la superficie de un líquido o de un sólido; en este caso las ondas se pueden propagar por toda la superficie de estos. A estas ondas se les denomina en general *bidimensionales.*

Examinaremos a continuación dos tipos de ondas bidimensionales particularmente importantes: las *planas* y las *circulares.*

Si la superficie libre de un líquido se toca de manera ligera y rítmica como se ilustra en la figura 8.6a, las oscilaciones de la varilla se trasmiten a las partículas de agua, que comenzarán a oscilar con igual frecuencia y amplitud. Estas oscilaciones se propagan en dirección normal a la varilla, de manera que todas las partículas que se encuentran sobre una línea paralela a la varilla oscilan en igualdad de fase. Este tipo de ondas se denomina *plana.*

Si en vez de con una varilla, la superficie es perturbada mediante un objeto aproximadamente puntual, como se muestra en la figura 8.6b, las oscilaciones se propagan en dirección radial con centro en el punto que se originan las oscilaciones, y de manera que todos los puntos que se encuentran sobre una circunferencia de igual

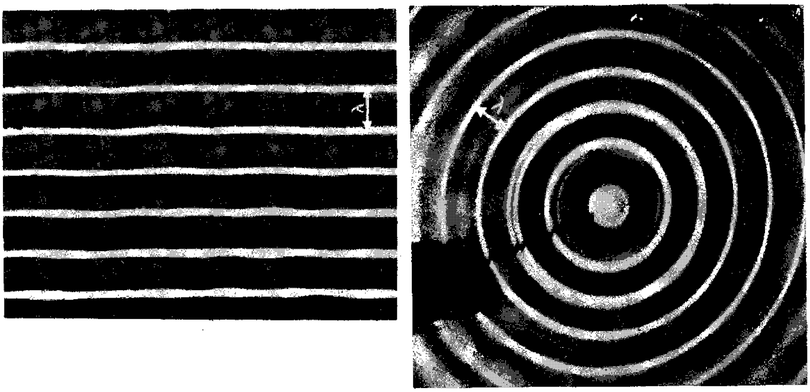


Fig. 8.6

radio, concéntrica con dicho centro oscilan en fase. Este tipo de ondas se denominan circulares.

En el caso de las ondas circulares debe destacarse una importante peculiaridad, a medida que nos alejamos de la fuente de las ondas, la amplitud de las oscilaciones va disminuyendo. Esto se debe a que como la energía es proporcional al cuadrado de la amplitud de las oscilaciones, y a medida que nos alejamos de la fuente, la energía de las oscilaciones se encuentra distribuida en una región mayor, entonces a cada punto del medio le corresponde una amplitud menor.

Debemos notar que a grandes distancias del foco y para una pequeña región, las ondas circulares se pueden considerar aproximadamente como ondas planas.

Ya conocemos que cuando las ondas tienen lugar en el seno de un medio continuo líquido o sólido, tienen un carácter longitudinal. En este caso, si la fuente es puntual y el medio homogéneo, todos los puntos que oscilan en fase se encuentran sobre una superficie esférica, y a estas ondas se les denomina *esféricas* (fig. 8.7).

Por razones análogas al caso de las ondas circulares, la amplitud de las ondas esféricas disminuye a medida que aumenta la distancia a la fuente.

Resulta claro que a grandes distancias de la fuente emisora de ondas esféricas y para pequeñas regiones, los puntos del medio que oscilan en fase se encuentran localizados aproximadamente en un plano. A este tipo de ondas es a las que en rigor se les denomina planas, constituyendo las planas bidimensionales un caso particular de estas.

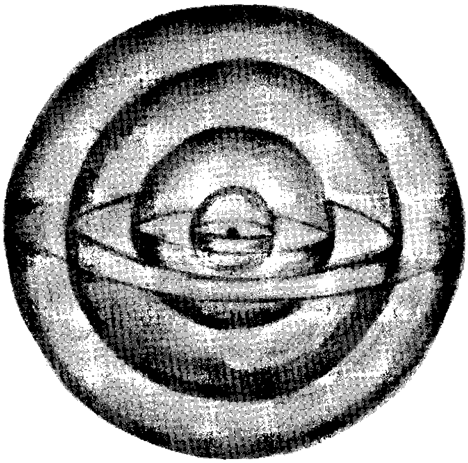


Fig. 8.7

En lo adelante, a todos los puntos del medio que oscilan en fase cuando se propaga una onda bidimensional o tridimensional, le denominaremos *frente de onda.* En este sentido, una onda será circular cuando los frentes de ondas sean circunferenciales, esféricas cuando sean esféricos, y planas cuando sean planos (recordemos que por extensión, también se denominan planas a las ondas bidimensionales cuyo frente de onda sea rectilíneo).

Tareas

1. ¿A qué se denomina onda mecánica?
2. ¿Cuál es la característica fundamental del movimiento ondulatorio?
3. Describe el proceso de trasmisión de las oscilaciones.
4. ¿A qué se denomina longitud de onda?
5. ¿Cómo está relacionada la velocidad de propagación de las ondas con la longitud de onda?
6. ¿De qué depende la velocidad de propagación de una onda? Argumenta tu respuesta con algunos ejemplos.
7. ¿En qué consiste la diferencia entre las ondas transversales y las longitudinales?

8. ¿Por qué en el seno de un líquido o gas no se propagan ondas transversales?
9. ¿Qué es una onda plana?, ¿una onda circular?, ¿y una onda esférica?
10. ¿Por qué en las ondas circulares y esféricas, la amplitud de las oscilaciones disminuye al aumentar la distancia a la fuente, aunque no actúen fuerzas disipativas?
11. ¿Por qué para una pequeña región muy alejada de la fuente generadora de ondas circulares o esféricas, estas pueden considerarse planas?

8.2 *Ecuación del movimiento ondulatorio*

Estudiaremos ahora la ecuación que nos permite determinar la coordenada de cada punto del medio por el que se propaga una onda, en función del tiempo, o sea, la ecuación del movimiento ondulatorio. Vamos a limitar nuestro estudio al caso de las ondas armónicas unidimensionales, es decir, a la propagación de una oscilación armónica en una sola dirección, esto permite una mayor simplicidad en el conocimiento de las ideas esenciales, sin perder en generalidad, pues lo estudiado para este tipo de ondas puede ser generalizado con relativa facilidad.

Supongamos que el punto en el cual se producen las oscilaciones armónicas que se propagan unidireccionalmente y que en lo adelante llamaremos *fuente o foco de las ondas,* oscila en correspondencia con la ecuación:

$$y = A \text{ sen } \omega t.$$

Como ya conocemos, esta oscilación se va propagando a todos los puntos del medio con cierto retraso de fase respecto al foco. Si la onda llega al punto P situado a una distancia x (fig. 8.8) al cabo de un intervalo Δt, y se supone que las oscilaciones no se amortiguan, la elongación de dicho punto en función del tiempo vendrá dada por la ecuación:

$$y = A \text{ sen } \omega(t - \Delta t),$$

donde, si la velocidad de propagación es constante e igual a v,

$$\Delta t = x/v$$

y la ecuación toma la forma:

$$y = A \text{ sen } (\omega t - \omega x/v).$$

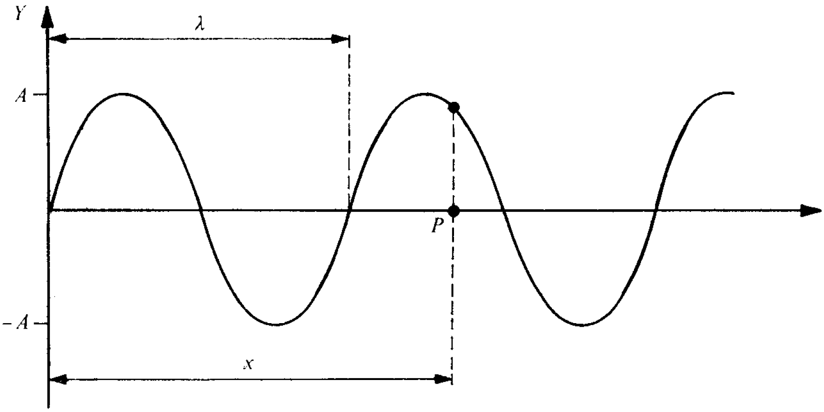


Fig. 8.8

Si tomamos, además, en consideración que $\omega = 2\pi T$, y que $v = \lambda / T$

$$\omega \frac{x}{v} = \frac{2\pi}{T}\frac{x}{v} = \frac{2\pi}{T}\ \frac{x}{\lambda / T} = \frac{2\pi}{\lambda}\ x = k\ x$$

donde:

$$k = 2\pi/\lambda.$$

La constante k es análoga a ω, pero en sentido espacial, k es el número de λ en 2π rad.

En términos de los parámetros ω y k la ecuación adopta la forma:

$$\boxed{y = A \text{ sen } (\omega t - kx).}$$

Analicemos gráficamente esta ecuación. Como $y = f(t,x)$, es decir, y es función de t y de x, tendremos que esta ecuación está caracterizada por dos gráficos: el de $y = f(t)$ para cada valor de x (fig. 8.9a), y el de $y = f(x)$ para cada instante de tiempo t (fig. 8.9b).

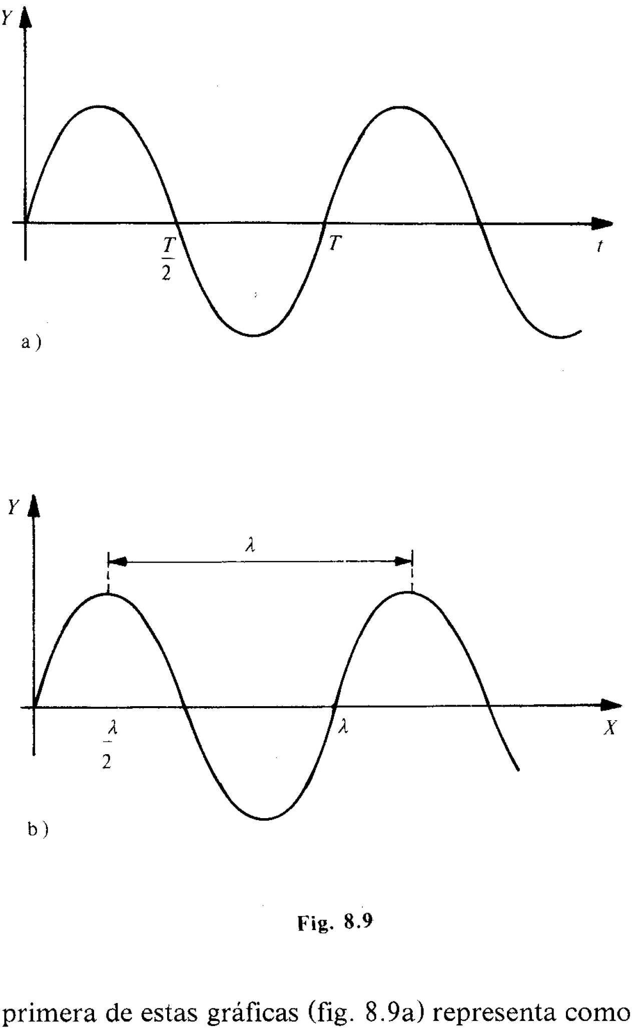


Fig. 8.9

La primera de estas gráficas (fig. 8.9a) representa como varía en función del tiempo la elongación de un punto de coordenada x, es decir, es la gráfica de la ecuación del movimiento de cada uno de los puntos de la región por la cual se propaga la onda. La segunda gráfica (fig. 8.9b) representa la configuración de la onda en un instante determinado de tiempo, o sea, es la gráfica de la ecuación de la elongación en función de la coordenada de cada punto para un instante de tiempo determinado. En sentido figurado podemos decir que esta última gráfica es como uno fotografía de la onda en un momento determinado.

Tareas

12. Escribe la ecuación de una onda armónica transversal que se propaga unidireccionalmente en el sentido positivo del eje X. Interpreta el significado físico de cada término.

13. ¿Cuál es el significado físico de los gráficos correspondientes a $y = f(x,t)$ para x constante, y para t constante, si $y = f(x,t)$ es la ecuación de una onda armónica transversal?

8.3 *Propiedades de las ondas*

Cuando una onda que se propaga en un medio homogéneo encuentra a su paso un obstáculo, o cuando pasa a otro medio de características distintas, se producen una serie de fenómenos peculiares del movimiento ondulatorio.

Algunos de estos fenómenos, que estudiaremos a continuación, son: *la interferencia,* que es el resultado de la superposición bajo ciertas condiciones, de dos o más ondas en una determinada región del espacio; *la reflexión y la refracción,* que se producen cuando una onda alcanza la zona de separación entre dos medios; la *difracción,* que consiste en la desviación de la dirección de propagación al pasar la onda por el borde de un obstáculo; y el *efecto Doppler,* que consiste en el cambio de longitud de onda cuando la fuente se mueve respecto al observador. Algunos de estos fenómenos ya nos resultan conocidos o familiares de nuestros estudios sobre los fenómenos ópticos y sonoros en cursos anteriores, en estos casos lo que haremos será profundizar en el conocimiento de ellos.

Para la reproducción y estudio de estos fenómenos en condiciones de laboratorio" utilizaremos dos máquinas de ondas": la primera, conocida como máquina de péndulos verticales (fig. 8.10), permite analizar con facilidad el comportamiento de las ondas unidimensionales mediante el movimiento de las esferillas colocadas en los extremos de las varillas; y la segunda, conocida como cubeta de ondas (fig. 8.11), las ondas bidimensionales planas y circulares en la superficie de un líquido, que pueden ser proyectadas en una pantalla y "detenidas" mediante un dispositivo estroboscópico.

Interferencia de las ondas

Analicemos qué sucede cuando dos o más ondas se encuentran en determinada región del espacio. Comencemos considerando el caso de dos pulsos (un pulso es una onda producida por una oscilación de muy corta duración) que se propagan unidireccionalmente uno al encuentro de otro.

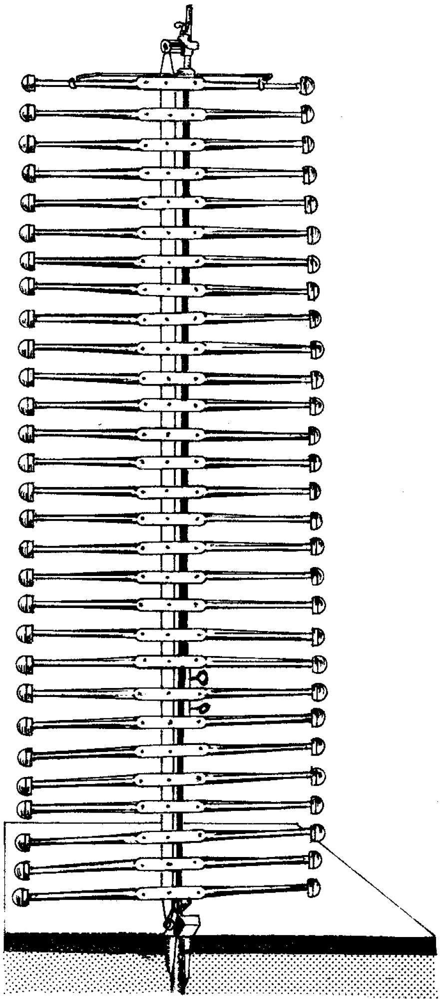


Fig. 8.10

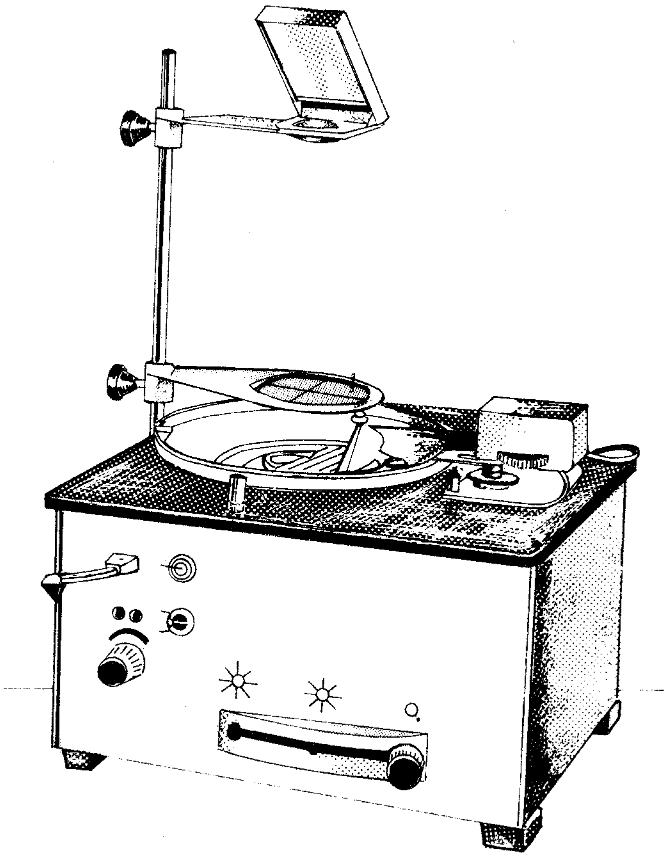


Fig. 8.11

En la secuencia de los esquemas de fotos estroboscópicas mostradas en la figura 8.12 puede observarse cómo al coincidir los pulsos, la amplitud de la oscilación resultante es igual a la suma de las amplitudes que producirían independientemente cada uno de los pulsos por separado, y que después cada uno de los pulsos continúa propagándose sin haber sufrido ninguna alteración. Este fenómeno tiene lugar siempre que se superponen dos ondas de cualquier tipo y recibe el nombre de *principio de superposición.*

El principio de superposición de las ondas plantea que cuando dos o más ondas armónicas se propagan en un medio y coinciden en

determinada región, sus elongaciones se suman algebraicamente* y continúan propagándose independientemente unas de las otras, es decir, sin ningún tipo de alteración.

La amplitud de la oscilación resultante en un punto donde se superponen dos ondas, dependerá, entonces, de las amplitudes de cada una de las ondas y de la relación entre sus fases. Esto también se muestra con claridad en la figura 8.12. En el caso de la situación mostrada en la figura 8.12a, donde las amplitudes de los pulsos son iguales y las oscilaciones tienen la misma fase, la amplitud resultante es el doble de la amplitud que provocarían los pulsos por separado en cada uno de los puntos. En el caso correspondiente a la figura 8.12b, donde las amplitudes también son iguales, pero las fases son opuestas, la amplitud resultante es nula.

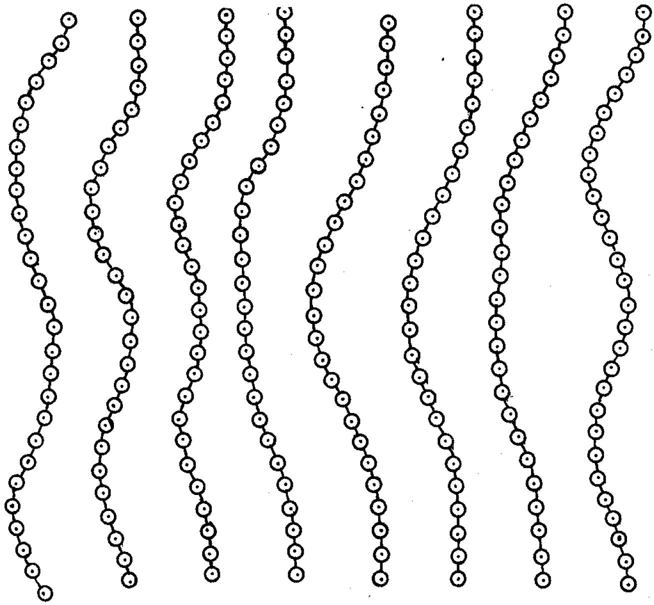
En el caso más general, cuando dos ondas se superponen y en cada uno de los puntos la diferencia de fases se mantiene constante en el transcurso del tiempo, se produce un fenómeno de especial interés teórico y práctico el *fenómeno de la interferencia.* En este caso se obtiene una configuración de la onda resultante que no varía en el transcurso del tiempo y a la cual se denomina *patrón o cuadro de interferencia* (fig. 8.13).

Las ondas procedentes de focos diferentes y cuya diferencia de fase en cada punto se mantiene constante en el transcurso del tiempo se denominan *ondas coherentes,* y a los focos que originan dichas ondas también se les denomina *focos coherentes.* En estos términos podemos decir que *la interferencia de las ondas es el fenómeno que se produce cuando se superponen ondas coherentes.*

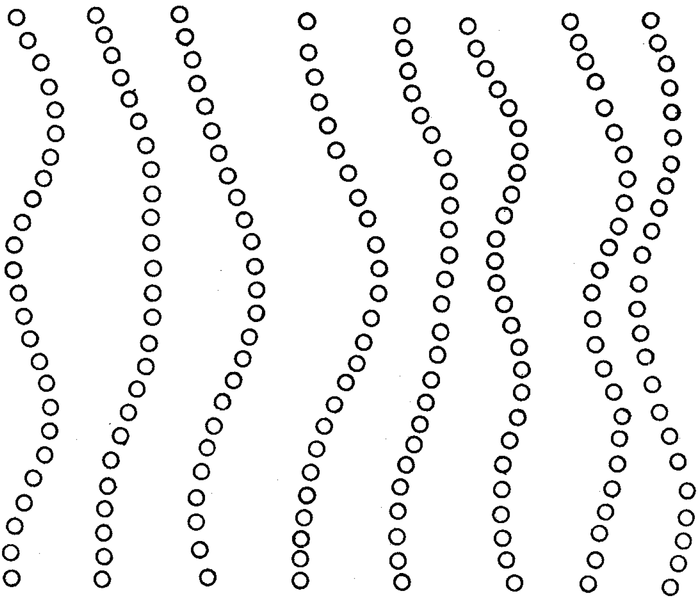
En general, se denomina interferencia de ondas al fenómeno de la superposición de ondas, en el cual se produce en algunos puntos del medio, su reforzamiento mutuo estable en el tiempo, y en otros, su amortiguamiento, en dependencia de la relación de fase entre las ondas. Solamente pueden interferir las ondas coherentes cuyas oscilaciones tienen lugar en la misma dirección.

Debemos señalar que si las ondas son armónicas, es decir, provienen de focos que oscilan armónicamente y tienen igual frecuencia, se mantendrá constante la diferencia entre sus fases para todos los puntos de la región en la que se propagan, es decir, son coherentes.

* En el caso más general de que la dirección de las oscilaciones no coincida, la suma debe ser vectorial.



a)



b)

Fig. 8.12

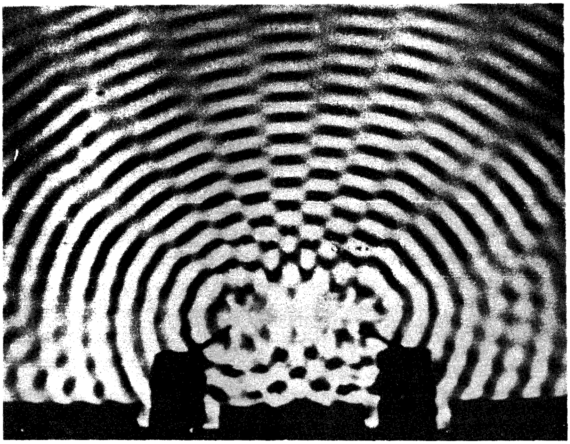


Fig. 8.13

Analicemos la interferencia de dos ondas armónicas de igual ımplitud que son generadas por los focos coherentes S_1 y S_2 fig. 8.14). De acuerdo con la ecuación de las ondas, las elongaciones ›riginadas en el punto P por cada una de ellas separadamente ven- lrán dadas por:

$$y_1 = A \text{ sen } (\omega t - kx_1) \qquad y_2 = A \text{ sen } (\omega t - kx_2)$$

londe x_1 y x_2 son las distancias respectivas de S_1 y S_2 a P.

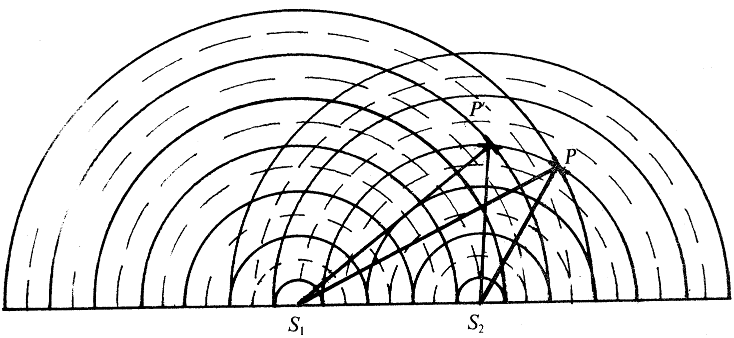


Fig. 8.14

En este caso el resultado de la superposición vendrá determinado por la diferencia entre las fases de cada una de las ondas:

$$(\omega t - kx_1) - (\omega t - kx_2) = 2\pi/\lambda(x_2 - x_1).$$

Si esta diferencia de fase es un número par de veces π, entonces las oscilaciones se superpondrán en fase y en dicho punto existirá un reforzamiento o máximo de amplitud. Por lo tanto, la condición para que en un punto de un patrón de interferencia exista un máximo de amplitud es que:

$\dfrac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = 2n\pi$ donde n es un número entero lo que también se puede escribir como:

$$x_2 - x_1 = n\lambda.$$

Es decir, cuando la diferencia entre el camino recorrido por las ondas hasta cierto punto es igual a un número entero de longitudes de onda, en dicho punto, la amplitud resultante será máxima. Esto se puede comprobar gráficamente en el caso de la figura 8.14, para cualquier punto donde se superpongan las ondas en igualdad de fase.

Si la diferencia de fases es un número impar de veces π (por ejemplo en el punto P' de la figura 8.14), las oscilaciones se superpondrán con fases opuestas y la amplitud resultante será nula (si las amplitudes no son iguales, será mínima). Por tanto, la condición para que en un punto de un patrón de interferencia exista un mínimo de amplitud, o sea, ocurra la anulación de las oscilaciones, es que:

$\dfrac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = (2n + 1)\pi$ donde n es un número entero lo que también se puede escribir como:

$$x_2 - x_1 = (2n + 1)\lambda/2.$$

Por tanto, cuando la diferencia entre el camino recorrido por las ondas hasta cierto punto del patrón es igual a un número impar de semilongitudes de onda, o lo que es lo mismo, a un número semientero de longitudes de onda, en dicho punto existirá un mínimo de amplitud. Esto también se puede comprobar gráficamente en la figura 8.14 para cualquier punto donde las ondas se superpongan en oposición de fase.

Reflexión y refracción de las ondas

Los fenómenos de la reflexión y refracción se estudiaron en cursos anteriores en relación con los fenómenos ópticos y sonoros; en este epígrafe vamos a ampliar el estudio de estos fenómenos desde el punto de vista ondulatorio.

Iniciemos nuestro estudio por un análisis cualitativo de estos fenómenos para el caso de las ondas unidireccionales. Si una de las varillas extremas de la máquina de ondas se mantiene fija, y a partir de la otra se genera un pulso (fig. 8.15), cuando el pulso llega al extremo fijo, retorna, es decir, *se refleja,* invirtiéndose la dirección de las oscilaciones. Esta inversión en la dirección de las oscilaciones en el pulso reflejado significa que entre el pulso incidente y el reflejado existe una diferencia de fase de π rad.

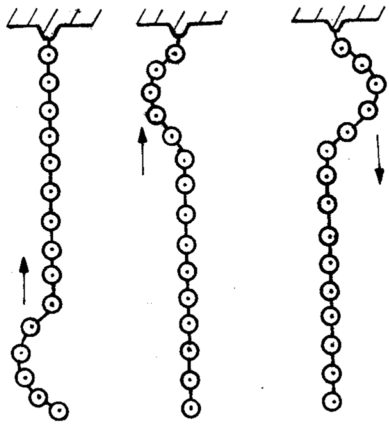


Fig. 8.15

Si el extremo en el cual ocurre la reflexión se encuentra libre, sucede que la onda incidente y la reflejada se encuentran en fase (fig. 8.16).

Las diferencias en el comportamiento de la reflexión en los casos anteriores se debe a que cuando el extremo en el cual ocurre la reflexión se encuentra fijo, la perturbación incidente provoca una fuerza sobre dicho extremo, y este a su vez una reacción de sentido contrario sobre la última varilla libre, lo que provoca la inversión en el sentido de su movimiento. Cuando el extremo en el cual ocurre la reflexión se encuentre libre, no ocurre este efecto y no se produce la inversión en el sentido de las oscilaciones.

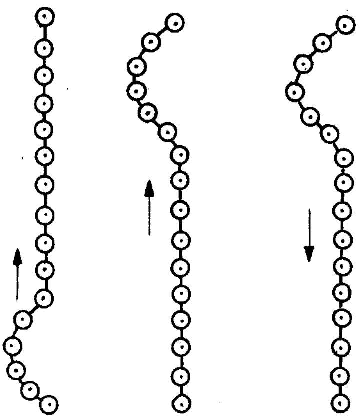


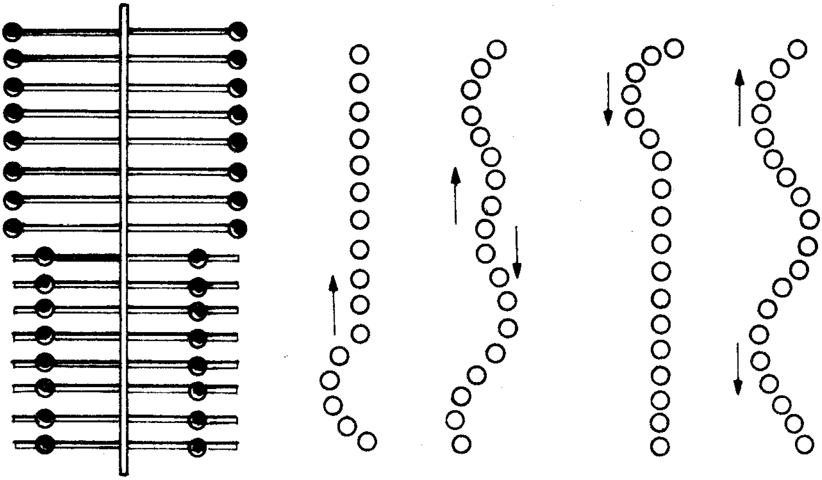
Fig. 8.16

Cuando el pulso pasa de un medio a otro de características diferentes, lo cual se puede lograr en la máquina de ondas que estamos utilizando, cambiando la distribución de masa en las varillas (fig. 8.17a) otra forma es la de unir dos resortes o cuerdas elásticas de características distintas), en el punto de separación entre los dos medios, el pulso, en parte, se *refleja* y, en parte, continúa su propagación por el segundo medio con diferente velocidad (fig. 8.17 b y c), es decir, se *refracta.*

En el caso de las ondas bidimensionales resulta fácil observar el fenómeno de la reflexión, cuando por ejemplo, se interpone un obstáculo sobre una onda circular (fig. 8.18a) o plana (fig. 8.18b) que se propaga en la superficie del agua.

Los resultados de cualquier experimento sobre reflexión de las ondas ponen de manifiesto que: *el ángulo de incidencia (i) es igual al ángulo de reflexión (r).*

Este resultado recuerda la ley de la reflexión de la luz, con la diferencia de que aquí los ángulos de incidencia *i* y de reflexión *r*, son los formados por los frentes de onda incidente y reflejado con la superficie reflectora, respectivamente. Sin embargo, se puede y resulta cómodo definir para este caso, los ángulos *i* y *r* de igual modo que en la óptica geométrica, de la siguiente forma: en el esquema correspondiente a la figura 8.18b, se ha representado un conjunto de rectas paralelas y perpendiculares a los frentes de onda incidente y reflejado; estas rectas reciben el nombre de *rayos* y representan la dirección en que se propaga el frente de ondas. Como se puede apreciar, los ángulos *i* y *r* son iguales a los que forman los rayos incidentes y reflejados, respectivamente, con la normal a la superficie reflectora.



a) b) c)

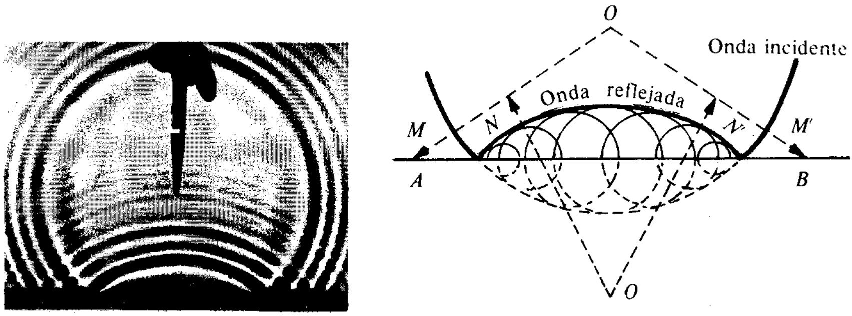
Fig. 8.17

a) Se modifica las posiciones de las esferillas en los extremos para simular dos medios distintos. b) El pulso reflejado se invierte. c) El pulso reflejado no se invierte.

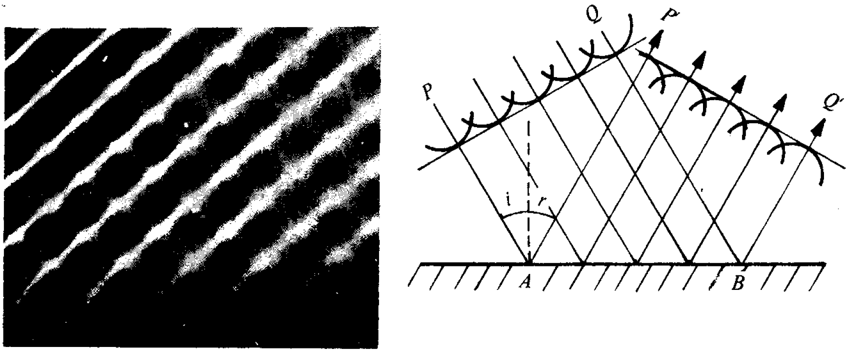
Resulta conveniente formular la ley de la reflexión de las ondas utilizando el concepto de rayo.

Ley de la reflexión de las ondas: cuando una onda se refleja, el ángulo de incidencia *i* es igual al ángulo de reflexión *r*, y el rayo incidente, el rayo reflejado y la normal a la superficie de reflexión están en un mismo plano.

El fenómeno de la refracción de las ondas bidimensionales en la superficie del agua puede ser fácilmente observado, cuando una onda plana llega a una zona donde se produce un cambio de profundidad en la superficie del agua, pues zonas de dos profundidades distintas se comportan como medios distintos.



a)



b)

Fig. 8.18

En la figura 8.19a puede notarse con toda claridad el cambio en la longitud de onda λ al pasar la onda de un medio a otro. Este cambio en la longitud de onda está asociado al cambio de velocidad al pasar la perturbación de un medio a otro, pues la frecuencia de las oscilaciones no se ha modificado.

En la figura 8.19b, en la que la onda incide formando un cierto ángulo i con la normal a la superficie de incidencia, puede notarse el cambio en la dirección de propagación, la cual forma después de refractada un ángulo r con la normal a la superficie de incidencia.

Analicemos la relación que existe entre los ángulos de incidencia y de refracción. En la figura 8.20 se han representado dos frentes de onda consecutivos y sus correspondientes ondas refractadas, de esta se puede plantear que:

$$\operatorname{sen} i = \frac{\lambda_1}{AB} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} r = \frac{\lambda_2}{AB}.$$

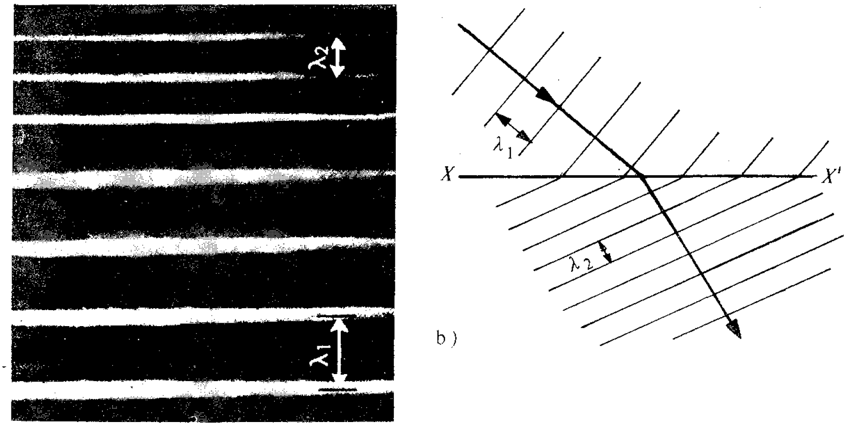


Fig. 8.19

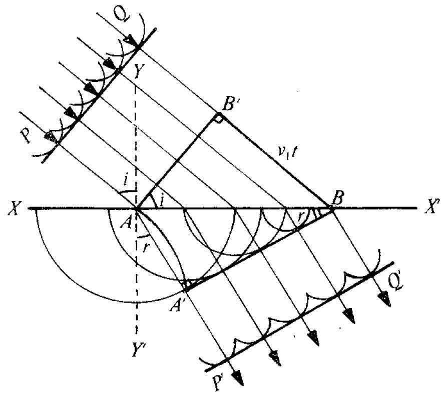


Fig. 8.20

Dividiendo miembro a miembro estas ecuaciones obtenemos que

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1/\nu}{v_2/\nu} = \frac{v_1}{v_2} = n_{12}$$

donde n_{12} es una constante que expresa la relación entre las velocidades de propagación de las ondas en ambos medios y que se denomina *índice de refracción.* Esta relación entre el seno del ángulo de incidencia y el seno del ángulo de reflexión recibe el nombre de *ley de Snell.*

Ley de la refracción de las ondas: la relación entre los ángulos de incidencia y refracción viene dada por la ley de Snell, y el rayo incidente, el rayo refractado y la normal a la superficie de incidencia están en un mismo plano.

Las leyes de la reflexión y refracción de las ondas, y en general, todos los fenómenos asociados con la propagación de las ondas, pueden ser deducidos sobre la base de un principio general, que inicialmente fue descubierto por Huygens y más tarde completado por Fresnel. Este principio, que se conoce con el nombre de *principio de Huygens-Fresnel*, plantea que: *todo punto de un frente de ondas puede considerarse como una fuente de ondas secundarias, y la posición del siguiente frente de ondas viene dada por la envolvente a las ondas secundarias, como consecuencia de la interferencia de las ondas provenientes de cada una de dichas fuentes secundarias* (fig. 8.21).

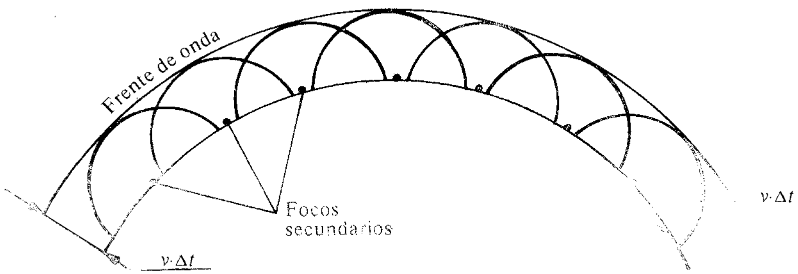


Fig. 8.21

En la figura 8.22 se puede observar la aplicación del principio de Huygens-Fresnel a la deducción de la relación entre los ángulos de incidencia y reflexión, y a la ley de Snell.

En la figura 8.22a:

$$\left.\begin{aligned} AA' &= vt \\ BB' &= vt \end{aligned}\right\} AA' = BB'$$

$\triangle AB'A' \simeq \triangle ABB'$ y
$\angle A'B'A = \angle BAB'$.

Pero como $\angle A'B'A = r$ y

$\angle BAB' = i$,
entonces $i = r$.

En la figura 8.22b:

$$\text{sen } i = \frac{BB'}{AB'}$$

$$\text{sen } r = \frac{AA'}{AB'}$$

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{BB'}{AA'} = \frac{v_1 t}{v_2 t} = \frac{v_1}{v_2}$$

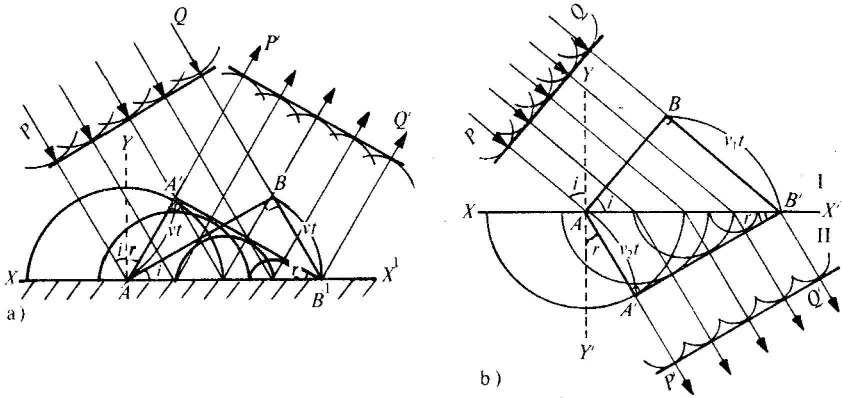


Fig. 8.22

a) Deducción de la ley de la reflexión de ondas a partir del principio de Huygens.
b) Deducción de la ley de refracción de ondas a partir del principio de Huygens.

Difracción de las ondas

La experiencia demuestra que si un haz de partículas que se mueven paralelamente, incide en dirección perpendicular sobre una barrera que tiene una abertura, las partículas que pasan por la abertura continúan moviéndose en la misma dirección independientemente del tamaño del orificio, como se muestra en la figura 8.23.

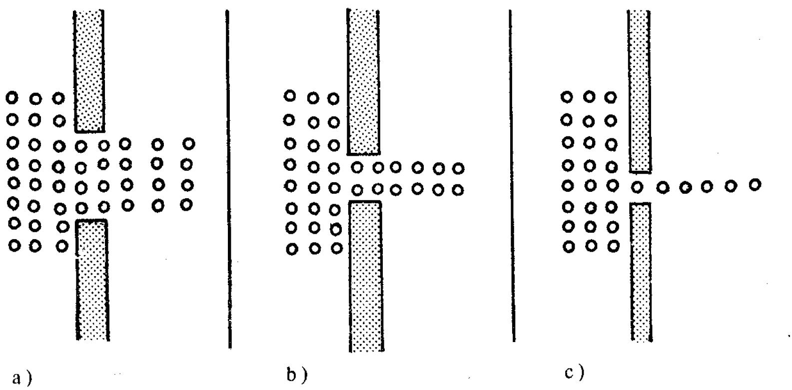


Fig. 8.23

La experiencia también demuestra que si sobre la barrera incide una onda, por ejemplo, cuando una onda plana, sobre la superficie del agua, pasa por una abertura como se muestra en las fotos y esquemas correspondientes en la figura 8.24, ocurre un fenómeno totalmente distinto.

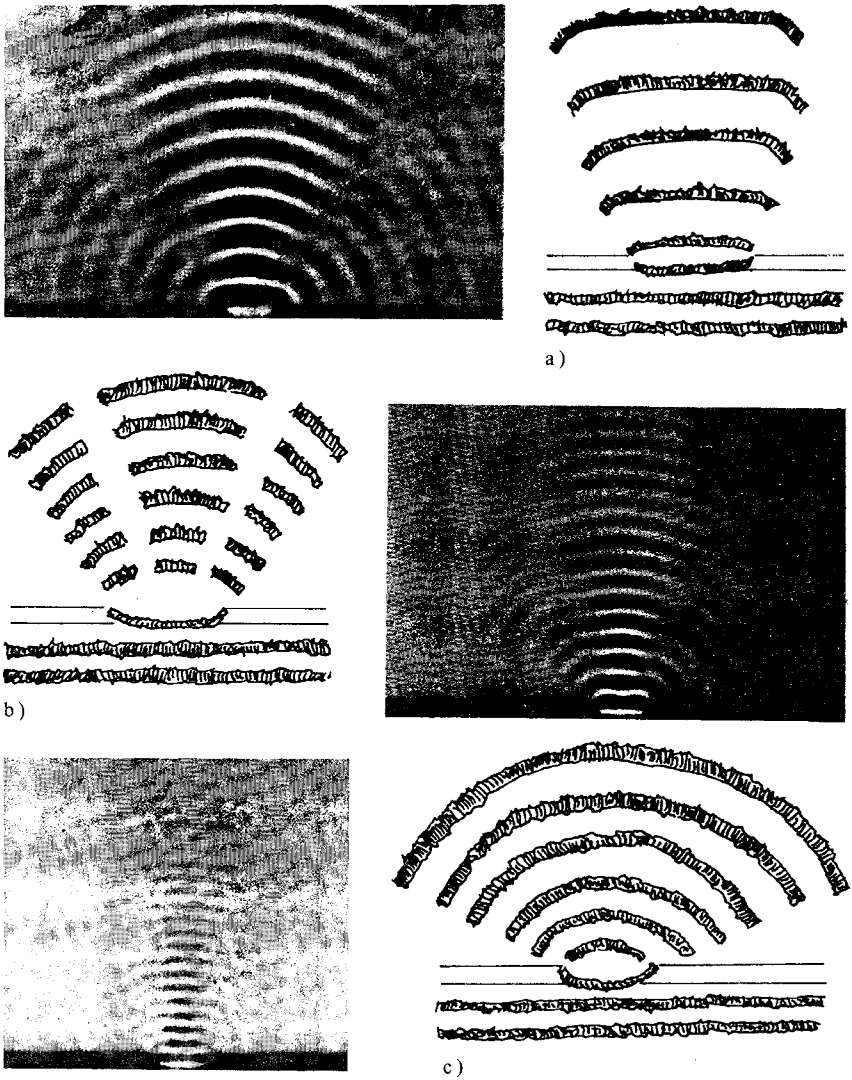


Fig. 8.24

En este caso ocurre una inflexión de las ondas detrás de los bordes de la barrera, es decir, cambia la dirección de propagación de las ondas en los bordes de la barrera, y esta penetra en la zona que no podría ser alcanzada de continuar propagándose la onda en la dirección original.

Como se aprecia en la figura 8.24, el grado de desviación de la dirección de propagación depende del tamaño de la abertura, y cuando dicho tamaño es menor que la longitud de onda (fig. 8.24c), la onda se propaga por toda la zona tras la barrera.

El fenómeno de la inflexión de la ondas detrás de los bordes de un obstáculo, es uno de los más característicos del movimiento ondulatorio y recibe el nombre de *difracción de las ondas.*

La difracción de las ondas es el fenómeno de inflexión de las ondas detrás de los bordes de un obstáculo.

El fenómeno de la difracción de las ondas resulta muy habitual en nuestro entorno para el caso del sonido, por ejemplo, en virtud de la difracción se puede escuchar el sónido del claxón de un automóvil (fig. 8.25) en una calle transversal a la de circulación de dicho automóvil, o escuchar a una persona que habla en una habitación encontrándonos tras la puerta de esta.

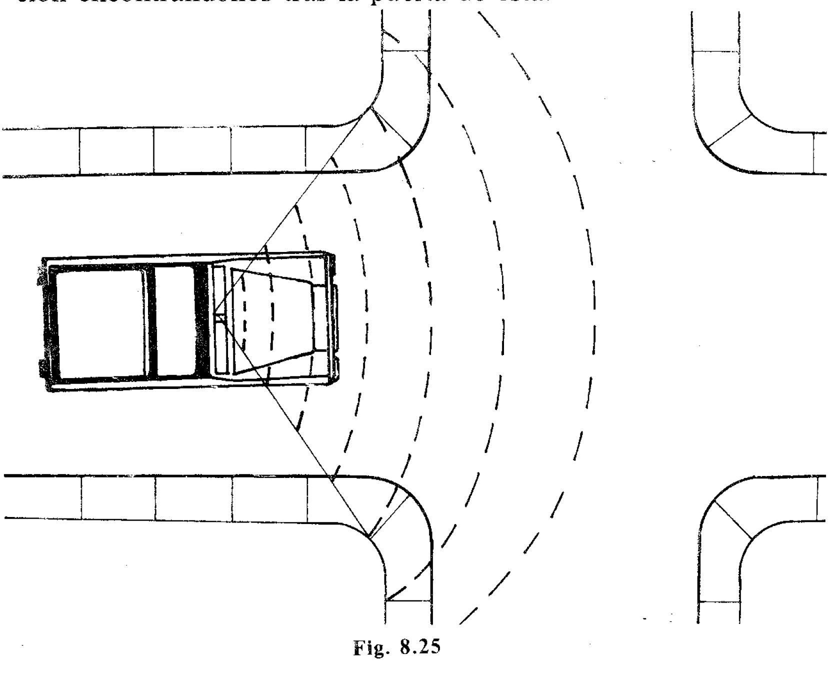


Fig. 8.25

Aunque la explicación del fenómeno de la difracción sobre la base del principio de Huygens-Fresnel resulta algo compleja y se encuentra fuera del alcance de este libro, sí podemos analizar de manera cualitativa y elemental la causa de este fenómeno:

Cuando la abertura es más pequeña que la longitud de onda, esta se comporta como un único foco emisor de ondas secundarias, y tras la pantalla es propaga una onda esférica (fig. 8.24c).

Si la abertura es algo mayor que la longitud de onda, cada punto de dicha abertura se comporta como un foco emisor de ondas secundarias y el nuevo frente de ondas será el resultado de la interferencia de las ondas emitidas por cada foco, obteniéndose un patrón característico como el representado en la figura 8.24b.

En el caso de que la abertura sea mucho mayor que la longitud de onda, el resultado de la interferencia es tal, que solo una pequeña parte del frente de onda cambia ligeramente su dirección, y la desviación solamente resulta apreciable a distancias muy alejadas de la abertura, donde por lo general, en condiciones reales, las ondas se encuentran ya muy amortiguadas, y por tanto, el fenómeno no es prácticamente observable (fig. 8.24a).

Efecto Doppler

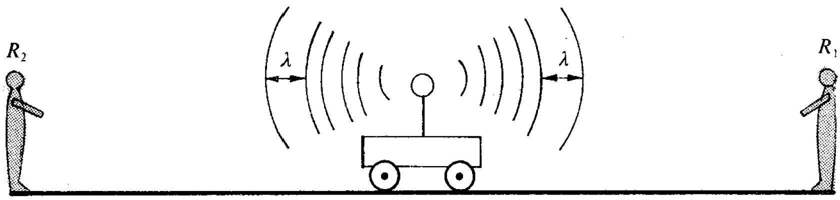
Cuando un tren que se aproxima a gran velocidad a un observador en r^poso, hace sonar el silbato de manera continua, el tono es más alto cuando se acerca y más bajo cuando se aleja, en relación con el tono del silbato del tren cuando se encuentra detenido en la estación.

A esta variación de la frecuencia de las ondas, registradas por un receptor, debida al movimiento relativo entre la fuente de dichas ondas y el receptor se le denomina *efecto Doppler.*

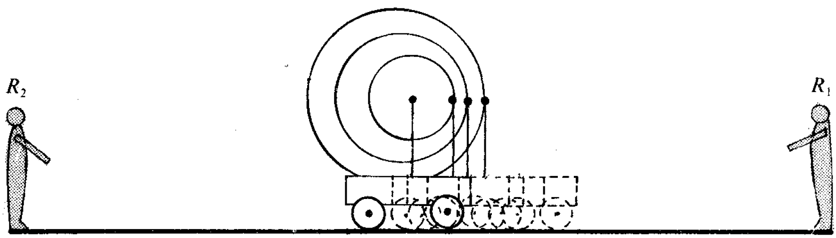
Se denomina efecto Doppler a la variación de la frecuencia de las ondas registradas por un receptor, como consecuencia del movimiento relativo entre la fuente y el receptor.

Analicemos cualitativamente las causas de este interesante fenómeno: si la fuente F (fig. 8.26a) emite ondas de frecuencia υ, las cuales se propagan en el medio a velocidad v, su longitud de onda vendrá, entonces, dada, como conocemos, por $\lambda = v/\upsilon$, y en los receptores R_1 y R_2, ambos en reposo respecto a F, se registrarán ondas de dicha frecuencia υ.

Si la fuente se mueve uniformemente alejándose del receptor R_2 y acercándose al R_1, como se ilustra en la figura 8.26b, entonces, como consecuencia del cambio de posición de la fuente *F*, la distancia entre los frentes de onda que se dirigen hacia R_1 disminuye y la de los que se dirigen hacia R_2 aumenta. Los observadores R_1 y R_2 registran pues, longitudes de ondas menores y mayores, respectivamente, en relación con el caso en que la fuente se encuentra en reposo respecto a dichos receptores.



a)



b)

Fig. 8.26

Como la velocidad de propagación de las ondas no depende de la velocidad de la fuente, entonces en el receptor R_1 se registrará una frecuencia ν_1, y el observador R_2, una frecuencia ν_2, mayores y menores, respectivamente, que la frecuencia ν registrada cuando la fuente se encuentra en reposo.

El efecto Doppler tiene un gran número de aplicaciones prácticas, ya que como el cambio de frecuencia depende de la velocidad relativa entre la fuente y el receptor, si se conoce la velocidad de propagación de las ondas en el medio, y se puede medir el cambio de frecuencia, es posible determinar la velocidad relativa entre la fuente y el foco. Este es el principio de funcionamiento de los dispositivos que utilizan los agentes del tránsito para determinar la velocidad de los vehículos y detectar posibles infracciones. También el equipo que nos permite conocer la velocidad con que un pitcher realiza sus lanzamientos, funciona sobre la base de este principio.

También mediante el cambio de la frecuencia de las ondas luminosas procedente de las estrellas de otras galaxias, es que ha sido posible determinar que estas se están alejando de nuestra Galaxia y cuál es la velocidad de su alejamiento.

Tareas

14. ¿En qué consiste el principio de superposición de las ondas?
15. Si dos pulsos, desplazándose uno hacia el otro en un muelle, tienen desplazamientos en el mismo sentido, ¿pueden contrarrestarse en el momento de cruzarse?
16. Dos pulsos tienen desplazamientos máximos de 3 y 4 cm en el mismo sentido. ¿Cuál será el desplazamiento máximo cuando coincidan?
17. ¿A qué se denomina interferencia?
18. ¿Cuál es la característica fundamental de las ondas coherentes?
19. ¿Para que dos focos sean coherentes tienen necesariamente que vibrar en concordancia de fase?
20. Formula las condiciones de máximo y mínimo de interferencia en función de la distancia del camino recorrido por las ondas.
21. ¿En los mínimos del patrón de interferencia ocurre alguna pérdida de la energía que transportan las ondas? ¿En qué puntos del patrón se localiza la máxima energía?
22. ¿Qué condición debe cumplirse para que la onda reflejada en la zona de separación de dos medios cambie de fase?, ¿y para que no cambie de fase?
23. Plantea las leyes de la reflexión y de la refracción de las ondas.
24. ¿Cuál es el significado físico del índice de refracción?
25. Enuncia el principio de Huygens-Fresnel y di cuál es su importancia.
26. ¿En qué consiste el fenómeno de la difracción de las ondas?
27. Plantea qué condiciones deben cumplirse para que la difracción de las ondas por una abertura o un obstáculo:

a) sea un fenómeno despreciable,
b) sea un fenómeno notable,
c) abarque todos los puntos de la zona tras el obstáculo o abertura.

28. ¿En qué consiste el efecto Doppler? Explica cualitativamente la causa de este fenómeno.

29. Plantea algunas aplicaciones del efecto Doppler.

8.4 *Ondas estacionarias*

Un tipo particularmente importante de interferencia es el que tiene lugar cuando dos ondas de la misma velocidad, frecuencia y amplitud, se propagan a través del mismo medio en direcciones opuestas, dando lugar al fenómeno conocido como onda estacionaria.

En la práctica, este caso se presenta frecuentemente cuando se superponen una onda y su reflejada en una determinada región del espacio, es decir, en un medio confinado. Esta es la situación que tiene lugar cuando en una de las varillas extremas de la máquina de ondas se produce una oscilación de manera continua, la cual se propaga a lo largo de la máquina y se refleja en la última varilla, dando lugar a la interferencia de ambas ondas (fig. 8.27).

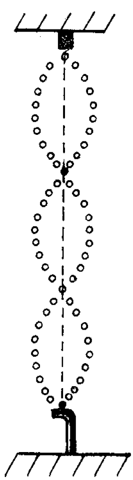


Fig. 8.27

Analicemos desde un punto de vista general el proceso de superposición que da lugar a la formación de este tipo de ondas. Consideremos dos ondas armónicas unidimensionales de iguales amplitudes, frecuencias y velocidades, que se propagan una al encuentro de la otra. Esta situación se representa en la figura 8.28, donde la onda que viaja en sentido positivo del eje coordenado se ha representado por una curva de puntos la que viaja en sentido negativo por una curva de trazos discontinuos y la resultante mediante una curva de trazo continuo. Si consideramos como $t = 0$ el instante en que todos los puntos oscilan en fase y se superponen aditivamente, la amplitud de la oscilación resultante de cada punto comienza a disminuir a medida que transcurre la propagación, hasta que en el instante $t = T/4$ en que todos los puntos están oscilando en oposición de fase la amplitud resultante se hace nula. En los instantes subsiguientes, la amplitud de la oscilación resultante comienza a incrementarse, pero en sentido contrario hasta que en $t = T/2$, cada punto vuelve a alcanzar la máxima amplitud. De esta forma continúa el proceso de superposición que da lugar a la formación de las ondas estacionarias.

En el caso de las ondas estacionarias se destacan dos hechos que las diferencian de las ondas estudiadas hasta ahora (ondas viajeras): en primer lugar en estas ondas aparecen puntos en los que la elongación es siempre nula (en realidad es mínima y muy pequeña), denominados nodos, y otros puntos en los cuales la elongación es máxima, denominados crestas y valles (crestas si la elongación máxima está por encima de la elongación nula, y valles cuando está por debajo). En segundo lugar, se observa que las ondas estacionarias no pueden tener cualquier longitud de onda, sino solamente aquellas que cumplan con la condición de que en los extremos del medio:

1) las elongaciones sean nulas (los dos extremos se encuentren fijos como se ilustra en la figura 8.29a).

2) las elongaciones sean máximas (los dos extremos libres como se ilustra en las figuras 8.29b).

3) la elongación de uno, nula y la del otro, máxima (un extremo se encuentra fijo y el otro libre como se ilustra en la figura 8.29c).

Como entre dos nodos o dos vientres consecutivos la distancia es de media longitud de onda, en los dos primeros casos, las ondas estacionarias deberán cumplir la condición:

$L = n\,\lambda/2$ o lo que es lo mismo $\lambda = 2L/n$,

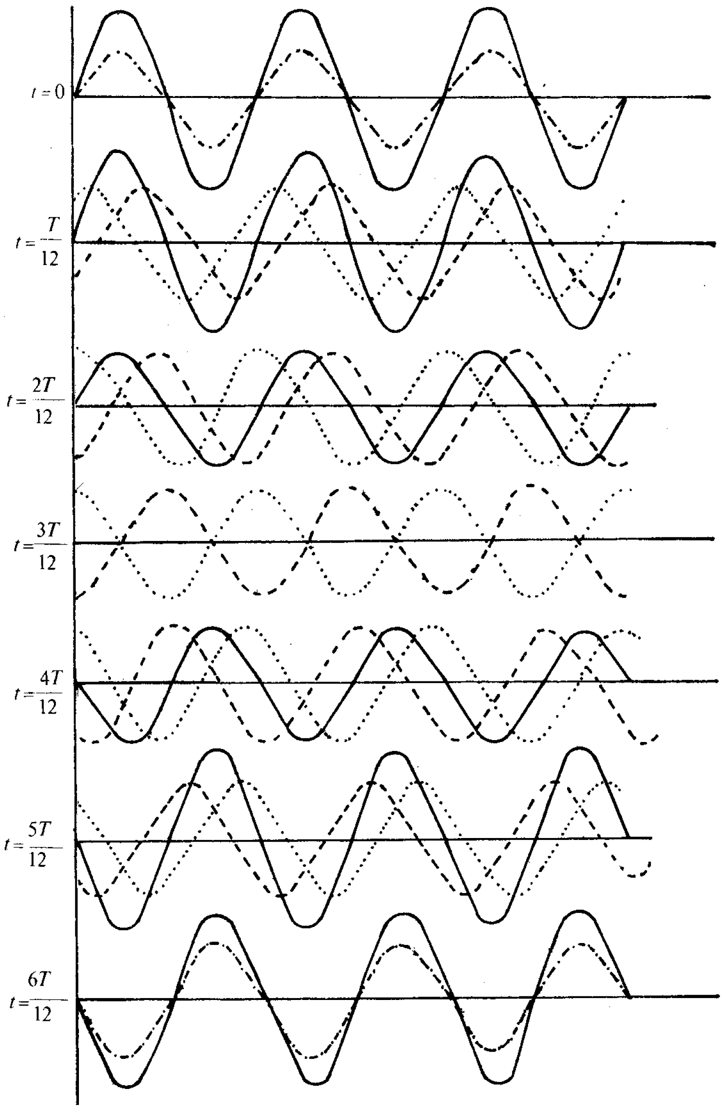


Fig. 8.28

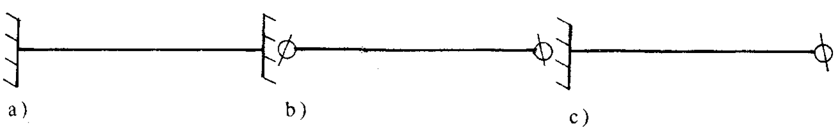


Fig. 8.29

donde L es la djstancia entre los extremos y n, un número entero.

Y como la distancia entre un nodo y un vientre es de un cuarto de longitud de onda, en el tercer caso, las ondas estacionarias deberán cumplir la condición:

$$L = m\, \lambda/4 \qquad \text{o lo que es lo mismo} \qquad \lambda = 4L/m,$$

donde m es un número impar.

El hecho más importante a destacar en las ondas estacionarias es el de que su longitud de onda y, por tanto, su frecuencia, no pueden tomar valores cualesquiera, sino solamente aquellos que son múltiplos de n o m, según sean las condiciones de los extremos. Esto constrasta poderosamente con lo que sucede en los medios no confinados, en los cuales pueden formarse ondas con cualquier valor de λ. La importancia teórica de este hecho la comprenderemos mejor cuando en los grados superiores estudiemos el comportamiento de las partículas subatómicas.

Debemos notar, además, que en las ondas estacionarias no ocurre la propagación de la energía, ya que las ondas que se propagan una al encuentro de la otra llevan energías iguales, pero en sentido contrario. La energía de las oscilaciones entre los nodos se mantiene constante. Solamente ocurre la transformación de la energía cinética en potencial, y viceversa. Cuando las varillas pasan por la posición de equilibrio, su energía cinética posee un valor máximo. Después de transcurrido un cuarto de período, la energía cinética se hace cero y la energía potencial alcanza su máximo valor; la desviación de las varillas respecto a su posición de equilibrio en este instante es máxima (el fleje estará más deformado en los vientres y menos en los nodos). Todo lo anterior es válido en ausencia de fuerzas disipativas; en condiciones reales, a través de los nodos, los cuales oscilan con la mínima amplitud, se propaga la energía suministrada por el agente externo para mantener las oscilaciones.

Tareas

30. ¿Qué se entiende por onda estacionaria?

31. ¿Cuáles son las características fundamentales de las ondas estacionarias?

32. ¿Qué condición deben cumplir las ondas estacionarias cuando los extremos son: fijos, libres, uno fijo y otro libre?

TRABAJO DE LABORATORIO 10.
Determinación de la longitud de onda de un sonido en el aire

Mediante este trabajo de laboratorio, podrás determinar la velocidad de propagación del sonido en el aire mediante un método basado en la formación de ondas estacionarias en un tubo.

El fundamento del método es el siguiente: si en el extremo abierto de un tubo que posee un émbolo móvil (fig. 8.30) se producen ondas sonoras de frecuencia conocida mediante un generador acústico mecánico (diapasón) o electrónico, al desplazar el émbolo se puede llegar a obtener una longitud del tubo, tal que, en el mismo se forme una onda estacionaria. La posición del émbolo correspondiente a las longitudes para las cuales se forman las ondas estacionarias, se detectan por un incremento de la intensidad del sonido, pues en estas condiciones las oscilaciones acústicas dentro del tubo alcanzan un máximo de amplitud, es decir, se produce el fenómeno de la resonancia de amplitud.

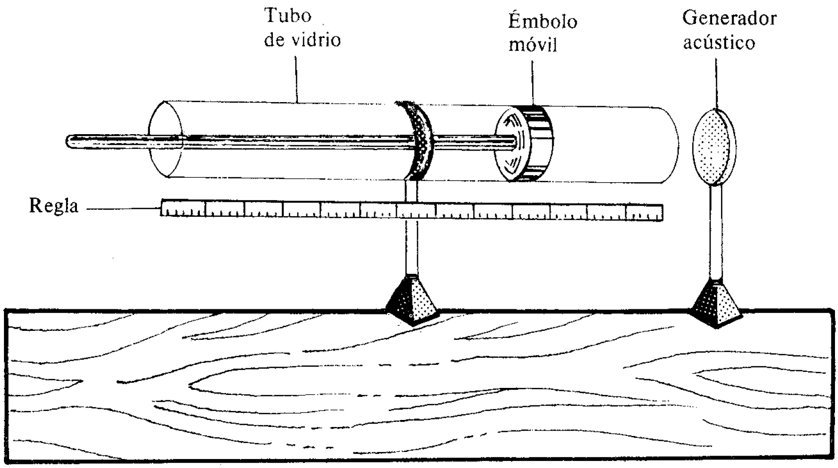


Fig. 8.30

Instrumentos y materiales: Tubo de vidrio con émbolo móvil (tubo de Kund), fuente sonora de frecuencia conocida (mecánica o electrónica), regla graduada en milímetros, aditamentos para fijar el tubo, el generador y la regla.

Indicaciones para el trabajo

1. Antes de comenzar la actividad experimental resulta recomendable precisar lo siguiente:
   ¿A qué tipo de extremo (fijo o libre) corresponde la parte abierta del tubo?, ¿y la parte cerrada?
   En correspondencia con la respuesta anterior, ¿qué condición debe cumplirse para que se forme una onda estacionaria?
   Dibuja en un esquema la configuración de la onda estacionaria para las tres primeras longitudes posibles del tubo.
2. Realiza un montaje similar al de la figura 8.33 y coloca el émbolo en la posición más próxima a la abertura donde se encuentra el generador acústico.
3. Acciona el generador acústico.
4. Comienza a desplazar el émbolo hasta que el sonido se intensifique, y muévelo alrededor de esta posición para precisar con la mayor exactitud posible dónde ocurre el máximo de intensidad. Determina mediante la escala de la regla esta posición.
5. Continúa desplazando el émbolo hasta que encuentres la próxima posición correspondiente al máximo de intensidad. Determina esta posición.
6. Determina la distancia correspondiente a las dos posiciones consecutivas de máxima intensidad.
7. Con los resultados anteriores, determina la longitud de onda del sonido.
8. A partir del conocimiento de la frecuencia del generador y de la longitud de onda del sonido, determina su velocidad de propagación.
9. Calcula teóricamente cuál debe ser la próxima posición del émbolo para que se produzca un máximo de intensidad y compruébala experimentalmente.

8.5 *Ejercicios resueltos*

1. Un individuo de audición normal es capaz de detectar ondas sonoras desde 20 Hz hasta 20 kHz. Si el sonido se propaga en el aire, en condiciones normales, a razón de 340 m/s, determina las longitudes de onda para los límites de la audición.

Solución

Las condiciones de audición planteadas establecen que:

$\nu_{\textit{límite inferior}} = 20 \text{ Hz}$

$\nu_{\textit{límite superior}} = 20 \text{ kHz}$

y se plantea, además, que $v = 340$ m/s.
Como $v = \lambda \upsilon$

Despejando λ, se obtiene que:

$$\lambda = \frac{v}{\upsilon}$$

Por tanto, para λ en el límite inferior de frecuencia se tiene que:

$$\lambda = \frac{340 \text{ m/s}}{20 \text{ Hz}} = 17 \text{ m}$$

y para el límite superior:

$$\lambda = \frac{340 \text{ m/s}}{20\ 000 \text{ Hz}} = 0{,}017 \text{ m}.$$

Nota: Las ondas cuya frecuencia se encuentra por debajo de la frecuencia de audición se denominan *infrasonoras*, y las que su frecuencia se encuentra por encima, *ultrasonoras*. Los ultrasonidos tienen una gran aplicación práctica en la ciencia y en la técnica contemporáneas. En la película "Ultrasonidos" podrás conocer de las particularidades de este tipo de ondas y de sus múltiples aplicaciones.

2. Un proyectil, disparado verticalmente hacia arriba, y el sonido de dicho disparo alcanzan simultáneamente una altura de 650 m. ¿Cuál es la velocidad inicial del proyectil? (No tengas en cuenta la resistencia del aire y considera $g = 10$ m/s^2.)

Solución

Según el problema, ambos alcanzan simultáneamente la misma posición, lo cual significa que los tiempos utilizados por el sonido (t_s) y por el proyectil (t_p) son iguales:

$$t_s = t_p.$$

Ahora bien, tomando en cuenta que el proyectil avanza contra la fuerza gravitatoria, por lo que su movimiento es retardado, y que el sonido se propaga con velocidad prácticamente uniforme, para el movimiento del proyectil se tendrá que (tomando el origen de coordenadas en el lugar del disparo y considerando el sistema orientado con el eje Y positivo verticalmente hacia arriba):

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (1)$$

y para el sonido:

$y = vt$ (pues $t_s = t_p$). (2)

Despejando t en (2) y sustituyendo en (1) se puede determinar el valor de v_0:

$$y = v_0\left(\frac{y}{v}\right) - \frac{1}{2}\, g\left(\frac{y}{v}\right)^2.$$

Por tanto:

$$v_0 = \frac{y + \frac{1}{2}\, g\left(\frac{y}{v}\right)^2}{\left(\frac{y}{v}\right)} = \frac{2\, y\, v^2 + g\, y^2}{2\, v\, y}$$

$$v_0 = \frac{2\ (650\ \mathrm{m})\ (340\ \mathrm{m/s})^2 + (10/\mathrm{s}^2)\ (650\ \mathrm{m})}{2\ (340\ \mathrm{m/s})\ (650\ \mathrm{m})}$$

$v_0 \approx 349$ m/s.

3. a) Escribe la ecuación de un movimiento ondulatorio armónico transversal que se propaga en una sola dirección y cuyas características son: amplitud 0,2 m, período 2 s, velocidad de propagación 0,25 m/s. Considera que en $t = 0$, $x = 0$ y $y = 0$.

b) Obten la elongación de un punto situado a 4 m de la fuente en el instante $t = 16$ s.

c) Construye las gráficas de $y = f(x, t)$ para $t = 0$ y para $x = 0$.

Solución

a) En general, la forma de la ecuación correspondiente a un movimiento armónico transversal que se propaga unidireccionalmente y para el cual $y = 0$ si $t = 0$ y $x = 0$, es la siguiente:

$$y = A \text{ sen } (\omega t - kx).$$

En este caso $A = 0{,}2$ m.

La frecuencia angular se puede determinar directamente a partir del período, pues:

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi/2 \text{ s} = \pi \text{ s}^{-1}$$

La constante k se puede determinar también en función de los datos, pues:

$$k = 2\pi/\lambda \text{ y } \lambda = v/\upsilon$$

por tanto

$$k = 2\pi\nu/v = 2\pi/vT = 2\pi/(0{,}25 \text{ m/s})(2 \text{ s}) = 4\pi \text{ m}^{-1}.$$

La ecuación para este caso tendrá, entonces la forma:

$$y = 0{,}2 \text{ sen } (\pi t - 4\pi x) \text{ (}y \text{ en m si } t \text{ en s y } x \text{ en m).}$$

b) Para $x = 4$ m y $t = 16$ s,

$$y = 0{,}2 \text{ sen } (16\pi - 16\pi) \text{ (m)}$$
$$y = 0.$$

c) Para construir la gráfica de $y = f(x,t)$ para $t = 0$, se debe evaluar la ecuación para este valor de t y construir la gráfica correspondiente:

$$y = 0{,}2 \text{ sen } (0 - 4\pi x)$$
$$y = -0{,}2 \text{ sen } 4\pi x$$

y como $k = 2\pi/\lambda = 4\pi \longrightarrow \lambda = 0{,}5$ m,
por tanto, la gráfica tendrá la forma que se muestra en la figura 8.31a.
Análogamente, para construir la gráfica de $y = f\ (x,\ t)$ para $x = 0$, se debe evaluar la ecuación para este valor de x:

$$y = 0{,}2 \text{ sen } (\pi t - 0)$$
$$y = 0{,}2 \text{ sen } \pi t$$

y como en este caso se conoce directamente de los datos que $T = 2$ s la gráfica tendrá la forma que se muestra en la figura 8.31b.

4. Determina el tipo de interferencia existente en un punto de un medio que dista 11 y 19 m de dos focos coherentes de frecuencia 200 Hz. La velocidad de propagación de las ondas en el medio es 100 m/s.

Solución

Las condiciones de máximo o mínimo se pueden conocer a partir de

$$\Delta d = m\ (\lambda/2),$$

donde si m es par, hay un máximo y si m es impar, hay un mínimo. Por tanto, es necesario conocer el valor de m, pero se desconoce el valor de λ, la cual se puede calcular mediante la ecuación:

$$\lambda = v/\nu.$$

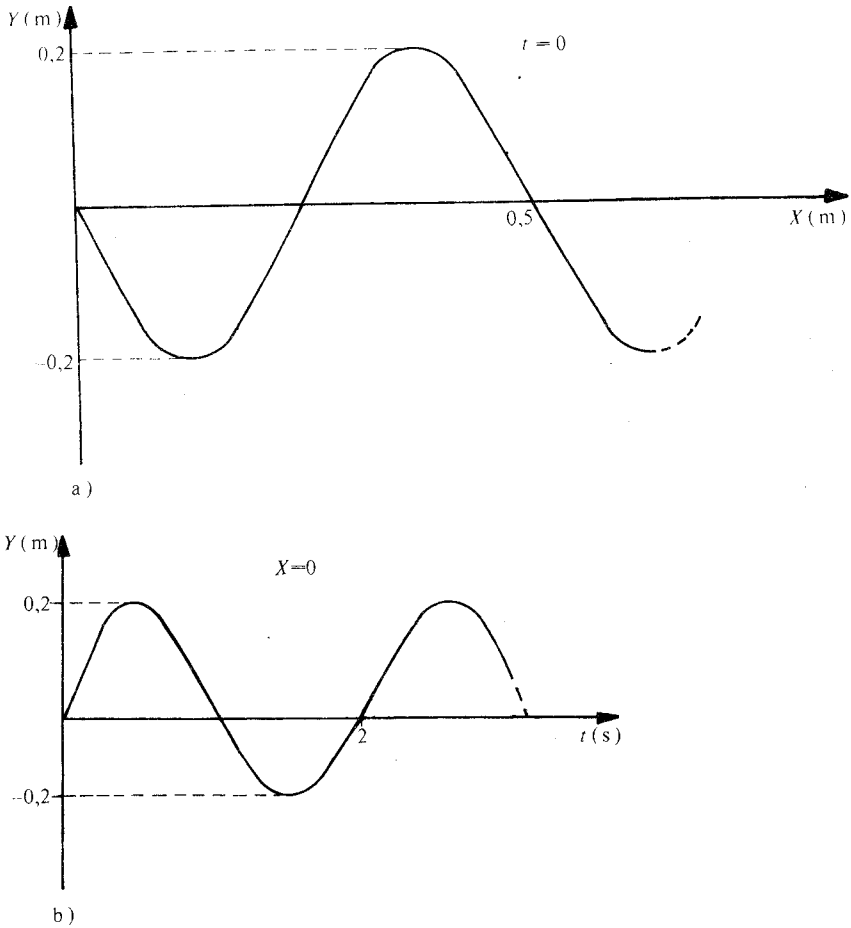


Fig. 8.31

Sustituyendo en la expresión anterior y despejando, queda que:

$$m = 2\Delta d\upsilon/v,$$

$$m = \frac{2\ (19\ \text{m} - 11\ \text{m})\ 200\ \text{Hz}}{100\ \text{m/s}}$$

$$m = 32.$$

Como m es par, existirá un máximo de interferencia.

5. Una onda formada en una cubeta pasa de una sección de menor a otra de mayor profundidad bajo un ángulo incidente de 45° y un ángulo refractado de 60°.

a) ¿Cuál es la relación entre las velocidades en las dos secciones?

b) Si la velocidad de la onda es de 25 cm/s en la región profunda, ¿qué valor tiene en la menos profunda?

Solución

a) La situación planteada se puede representar en la forma que muestra la figura 8.32.

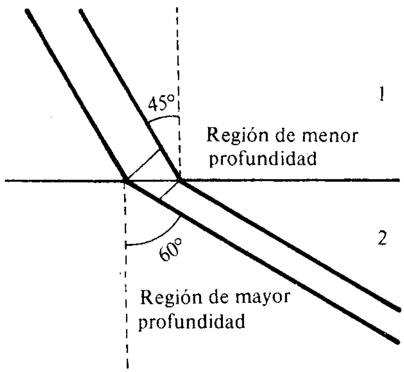


Fig. 8.32

De acuerdo con la ley de la refracción:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{\text{sen } 45°}{\text{sen } 60°} = \frac{0{,}707}{0{,}866} = 0{,}822.$$

b) Si $v_2 = 25$ cm/s, entonces

$v_1 = 0{,}822\ v_2 = 20{,}5$ cm/s.

6. La distancia entre los nodos de una onda estacionaria producida por un diapasón en el aire contenido dentro de un tubo cerrado en uno de sus extremos, es de 40 cm.

a) Determina la frecuencia de las oscilaciones del diapasón considerando que la velocidad de propagación del sonido en el aire es de 340 m/s.

b) Calcula la longitud mínima del tubo para que se pueda producir una onda estacionaria.

c) Representa la configuración de la onda estacionaria para las dos primeras frecuencias posibles.

Solución

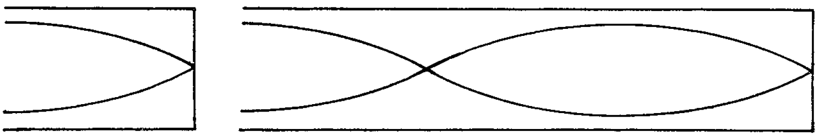
a) Como la distancia entre dos nodos de una onda estacionaria es $\lambda/2$, para este caso se tendrá que:

$$\lambda/2 = 40 \text{ cm} \longrightarrow \lambda = 80 \text{ cm}.$$

b) Como la situación dada se corresponde con el caso de que uno de los extremos se encuentre libre y el otro fijo, debe cumplirse que:

$L = m\lambda/4$, y como para que L sea mínima, $m = 1$, entonces $L = \lambda/4 = 20$ cm.

c) Como las dos primeras frecuencias posibles son las que se corresponden con $m = 1$ y con $m = 3$, para el primer caso se tendrá que $L = \lambda/4$ y para el segundo, $L = 3\lambda/4$, siendo entonces las configuraciones las mostradas en la figura 8.33a y b, respectivamente.



a) b)

Fig. 8.33

Tareas generales del capítulo

1. La gráfica de la figura 8.34 representa el perfil de una onda transversal que se propaga a razón de 200 m/s para un instante dado.

   a) ¿Cuál es su longitud de onda?

   b) ¿Qué valor tiene la amplitud?

   c) ¿Cuál es el valor de su frecuencia?

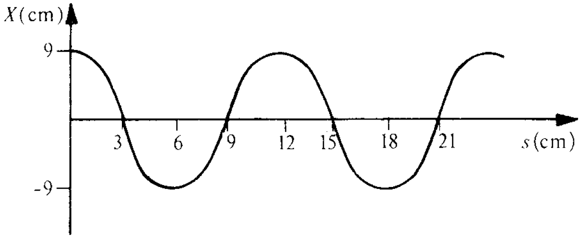


Fig. 8.34

2. La figura 8.35 corresponde a la representación de una onda que se propaga hacia la izquierda. Señala dos puntos que vibren en:
   a) concordancia de fase,
   b) oposición de fase.

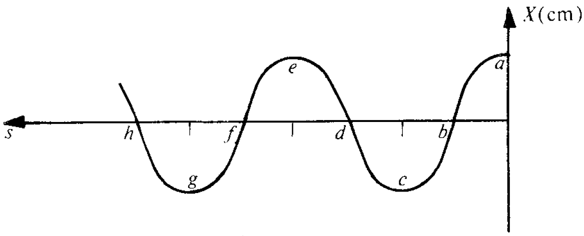


Fig. 8.35

3. La figura 8.36 representa las posiciones de un determinado número de partículas de un medio en el cual se propaga una onda. Analiza qué diferencia de fase existe entre las partículas.

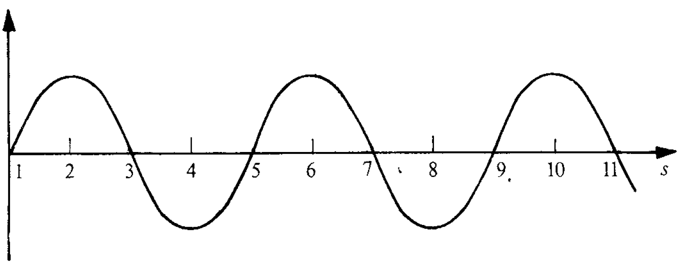


Fig. 8.36

4. Calcula la velocidad de propagación en el agua, de una onda sonora cuyo período es de $5 \cdot 10^{-3}$ s, conociendo que su longitud de onda en este medio es de 7,715 m.

5. Si un generador de ondas golpea la superficie del agua 24 veces en 6 s, ¿cuál es su período?, ¿cuál es su frecuencia?

6. Para producir ondas de mayor longitud de onda, ¿se debe disminuir o aumentar la frecuencia del generador?

7. Si un generador de ondas golpea la superficie del agua cada 0,1 s, siendo $\lambda = 0{,}03$ m, ¿cuál es la velocidad de propagación?¿En cuántas veces varía la longitud de la onda sonora cuando pasa del aire al agua? La velocidad del sonido en el agua es 1 435 m/s y en el aire 340 m/s.

8. El eco provocado por un disparo de fusil recorrió la distancia hasta un observador en 4 s. ¿A qué distancia del observador se encuentra el obstáculo del cual se reflejó el sonido.

9. A una distancia de 1 060 m de un observador se golpea con un martillo sobre un raíl de ferrocarril. El observador acerca el oído al raíl y escucha el golpe; al cabo de 3 s vuelve a escucharlo nuevamente, pero viajando por el aire. ¿Cuál es la velocidad del sonido en el raíl?

10. Analiza si las dos gráficas mostradas en las figuras 8.37 y 8.38 pueden corresponder a una misma onda.

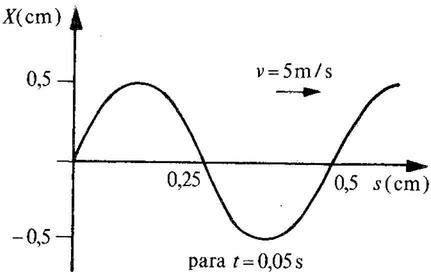


Fig. 8.37

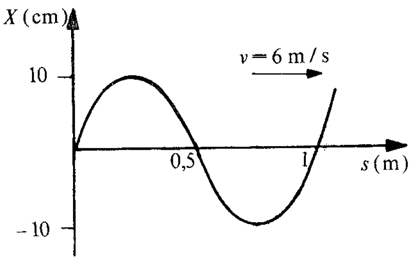


Fig. 8.38

11. A lo largo de una cuerda tensa muy larga se propaga una onda sinusoidal con una velocidad de 15 m/s. La elongación medida en metro, de un punto M de la cuerda viene dada por $y = \text{sen } 100\ \pi t$.
   a) Calcula los valores del período, de la frecuencia y de la longitud de onda.
   b) Si al pasar por el punto M, la onda continúa hasta un punto M_1, que está a una distancia de 1,5 m, determina la elongación del punto M_1 en $t = 0{,}5$ s.
   c) Escribe la ecuación de la onda.

12. La ecuación de una onda transversal que se propaga a lo largo de una cuerda muy larga tiene la forma:
   $y = 0{,}05 \text{ sen } (2\pi t - 4\pi x)$.
   Representa el gráfico de $y = f(x)$ parta $t = 0$ y el de $y = f(t)$ para $x = 0$. ¿Qué significan físicamente cada uno de estos gráficos?

13. En la figura 8.39 se representan los gráficos para $y = f(x)$ en $t = 0$, y para $y = f(t)$ en $x = 0$, correspondientes a una onda transversal que se propaga a lo largo de un resorte muy largo. Escribe la ecuación de dicha onda.

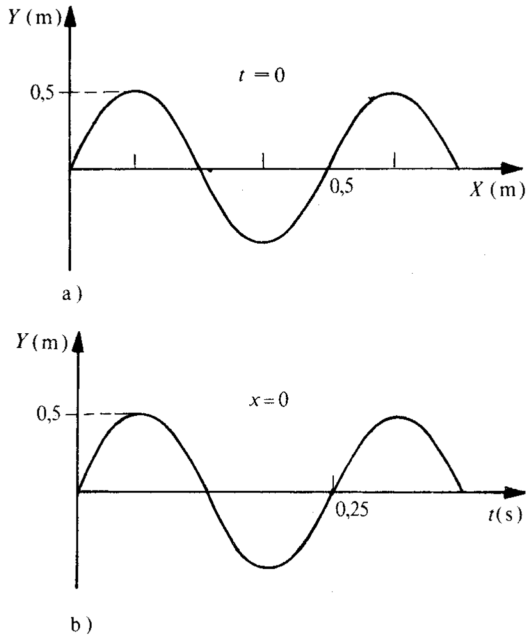


Fig. 8.39

14. Determina el pulso resultante en forma y tamaño de la superposición de los dos pulsos individuales representados en la figura 8.40.

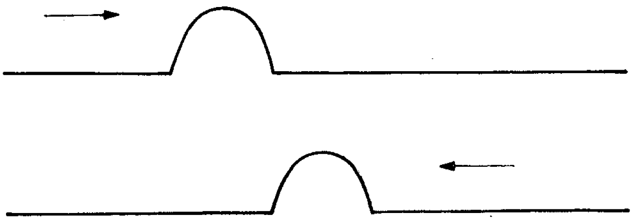


Fig. 8.40

15. El pulso mostrado en la figura 8.41 se propaga a lo largo de una cuerda hacia la derecha. Representa el pulso que propagándose hacia la izquierda, puede contrarrestar momentáneamente al anterior.

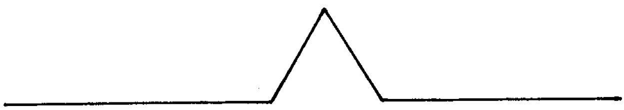


Fig. 8.41

16. Dos ondas de 440 Hz que se propagan a una velocidad de 340 m/s concurren en un mismo punto tras recorrer 20,34 y 20,75 m, respectivamente desde cada foco. Calcula la diferencia de fase entre ambas.

17. En la figura 8.42 se representan dos ondas coherentes de igual amplitud, que se propagan sobre la superficie del agua. Las líneas continuas representan las crestas de las ondas en un instante determinado. ¿En cuál de los puntos *A*, *B*, y *C* existirá un reforzamiento de las crestas, un reforzamiento de los valles, o una anulación.

18. La diferencia de marcha a un punto entre dos ondas coherentes de iguales amplitudes es de 12 cm. Ambas poseen una longitud de onda de 8 cm. ¿Cuál es el resultado de la interferencia de las ondas?

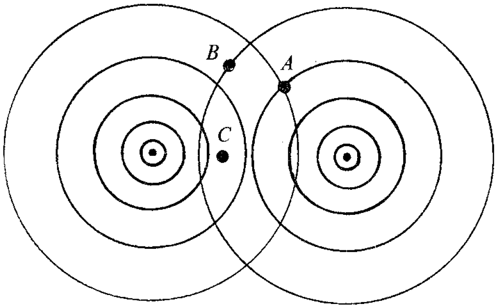


Fig. 8.42

19. Di si la siguiente afirmación es cierta o no y fundamenta tu respuesta: "La anulación mutua de dos ondas en los mínimos del patrón de interferencia, ocurre por la transformación de la energía de la onda en otras formas de energía".

20. Se envía un pulso por el extremo de un muelle y retrocede con un tamaño más pequeño e invertido. ¿Qué se puede deducir sobre la velocidad del pulso en un segundo muelle que se sujeta a aquel por el otro extremo?

21. En la figura 8.43a se representa un pulso moviéndose a lo largo de una cuerda que tiene secciones de diferente densidad. Las figuras 8.43b y c muestran la misma cuerda a iguales intervalos de tiempo posteriores. ¿Dónde se encuentran los puntos de unión de las diversas secciones y cuáles son las densidades relativas de la cuerda entre dichos puntos?

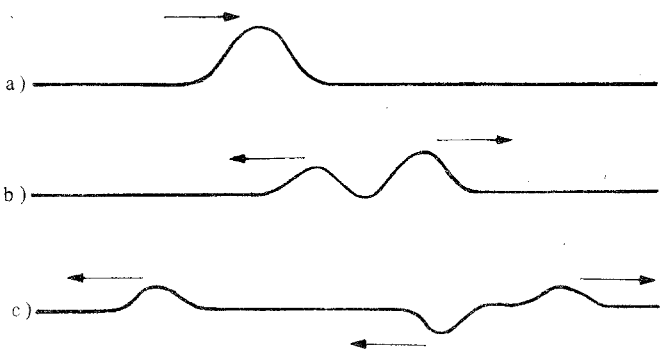


Fig. 8.43

22. En la figura 8.44, las líneas gruesas son crestas y las flechas representan la dirección de propagación de los pulsos.
   a) ¿Cuál es el pulso incidente y cuál el reflejado?
   b) ¿Cuál es el ángulo de incidencia?

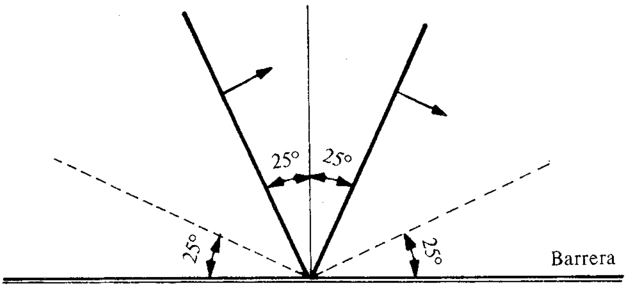


Fig. 8.44

23. En la figura 8.45, un pulso plano se aproxima a una barrera rectangular bajo un ángulo de 45°.
   a) ¿Cómo se refleja?
   b) ¿Qué sucede si la onda incide bajo un ángulo diferente?

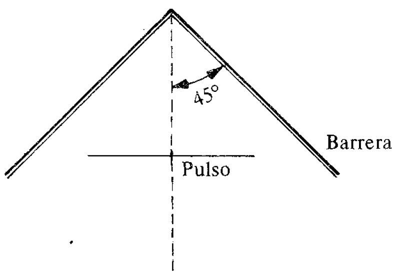


Fig. 8.45

24. ¿En cuántas veces varía la longitud de una onda sonora cuando pasa del aire al agua? Considera que la velocidad del sonido en el agua es de 1 435 m/s y en el aire de 340 m/s.

25. Las ondas superficiales en el agua, que se propagan en la sección profunda de una cubeta a la velocidad de 34 cm/s, alcanzan una región menos profunda bajo un ángulo de 60°. En esta región, las ondas se propagan a la velocidad de 24 cm/s. Si la

frecuencia se incrementa ligeramente, las ondas de la región profunda se propagan a razón de 32 cm/s.

a) Calcula el ángulo de refracción en cada caso.

b) Considerando las condiciones de la cubeta, ¿qué es más fácil: medir las dos velocidades y determinar su diferencia directamente, o medirla indirectamente por la diferencia angular obtenida?

26. Si $L = 1$ m, calcula la longitud de onda de las ondas estacionarias representadas en la figura 8.46 a y b.

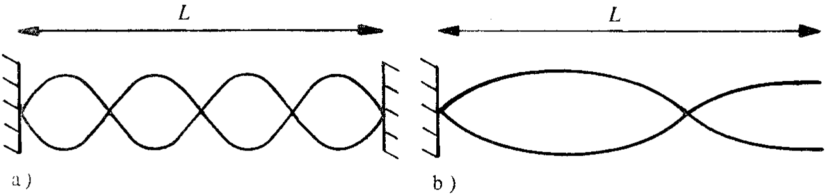


Fig. 8.46

RESPUESTAS A LAS TAREAS GENERALES DEL CAPÍTULO

Capítulo 2

2. a) $l = \frac{3\pi}{2} R = 28{,}3$ m; $s = R\sqrt{2} = 8{,}5$ m.

   b) No; $l = \frac{\pi}{2} R = 9{,}42$ m; $s = 8{,}5$ m.
3. a) $s_1 = 60$ km; b) $v_2 = 60$ km/h.
4. $v = 90$ km/h.
5. a) $x_1 = 150$ km; 120 km; b) $t = 8$ h $= 480$ min; c) $x = 240$ km..
6. Si no descansara, su viaje duraria 7 h. El tiempo real es de 8 h, por tanto, tiene 1 h para descansar, puede realizar 6 descansos de 10 min.
7. $v = 950$ km/h; $v = 850$ km/h.
8. $s = 1{,}5$ km.
9. a) Viaja de sur a norte; b) $v = 2$ m/s.
10. a) $v_1 = 12$ m/s; $l_1 = 1\,200$ m; $s_1 = 0$.
    b) $v = v_1 + v = 17$ m/s (cuando el muchacho avanza hacia la locomotora); $v = v_1 - v_2 = -7$ m/s (cuando avanza hacia el final del tren).
11. $v_m = 59{,}9$ km/h.
12. $v_m = 60$ km/h.
13. $t = 30$ s; $s = 225$ m.
14. a) $v = 15$ m/s; b) $s = 75$ m.
15. a) $v = 8$ m/s; b) $s = 84$ m; c) $t = 10$ s
16. a) $a = -5$ m/s^2; b) $s = 87{,}5$ m.
17. $s = s_{AB} + s_{BC} + s_{CO} = 450$ m.
18. $a = 6{,}7$ m/s^2; $l = 746$ m.
19. $s = 170$ m.
20. $s = 0{,}6$ m.
21. $s = 2{,}4$ km.
22. $s = 1\,5876$ km.
23. $s = 75$ m.
24. $a = 3{,}75$ m/s^2.
25. $s = 500$ m.
26. $s = 700$ m.
27. a) $v = 8$ m/s; b) $v = 10$ m/s; c) $s = 9{,}6$ m.
28. Posición (50 m, 50 m); $v = 50$ m/s.
29. a) $h = 31{,}25$ m; b) $h = 6{,}9$ m; c) $v = 22{,}5$ m/s; d) $v = 16{,}25$ m/s.
30. $t = 15$ s; $v = -90$ m/s.
31. $x = 22$ m.
32. $s = 335{,}25$ m.
33. Posición (21,25 m, 0); $v = 50$ m/s.
34. $A_{máx} = 2{,}5 \cdot 10^4$ m; $t_v = 50\sqrt{2}$ s; $h_{máx} = 6\,250$ m.
35. $v = 26{,}25$ m/s; posición (52,02 m, 26,8 m).
36. $v_0 = 500$ m/s.
37. $h_{máx} = 61{,}25$ m.

38. a) Posición (250 m, 400 m); b) mayor que 8 000 m; c) no.
39. $\omega = 2 \cdot 1010^{-7}$ rad/s; $v = 30$ km/h.
40. $v = 6{,}1 \cdot 10^{-3}$ m/s.
41. $v = 7{,}7$ km/h.
42. $a = 2{,}7 \cdot 10^{-3}$ m/s^2.
43. $v = 0{,}46$ m/s.
44. a) $\omega = 7{,}26 \cdot 10^5$ rad/s; b) $\omega = 14{,}5 \cdot 10^5$ rad/s; c) $\omega = 1{,}74 \cdot 10^{-3}$ rad/s; d) $\omega = 1{,}19 \cdot 10^{-3}$ rad/s; $v = 78$ km/s.
45. $\omega = 4{,}4 \cdot 10^{16}$ rad/s.
46. Se cuadriplica.
47. $a = 2\,366$ m/s^2.
48. $a = 3{,}55$ m/s^2.
49. a) $a = 5$ m/s^2; b) $a = 2{,}5$ m/s^2.

Capítulo 3

2. $a = 2{,}5$ m/s^2.
4. $a_A = 0{,}3$ m/s^2; $a_B =$ m/s^2.
8. $m = 20$ g.
9. $a = 0{,}2$ m/s^2; $P = 0{,}19$ N.
10. a) $a = 0{,}44$ m/s^2; b) $a = 2{,}36$ m/s^2.
11. $F_R = 1\,040$ N.
12. a) $a = 0{,}5$ m/s^2; b) $F = 20$ N; c) $F_r = 10$ N; d) $s = 9$ m.
13. $s = 66{,}4$ m.
14. $s_x = 102{,}05$ m.
15. $v_0 = 9{,}89$ m/s.
16. Ambos cuerpos se mueven con la misma aceleración, cuyo valor es: $a = 3{,}5$ m/s^2; $T = 189$ N.
17. $s = 6{,}72$ m.
18. $F_{gC} = 156{,}8$ N; $T = 111{,}860$ N.
19. $v = 46{,}3$ m/s.
20. $F = 2{,}55 \cdot 10^4$ N.
23. $F = 78\,876{,}8$ N.
24. $v_{máx} \approx 14$ m/s.
25. $v \approx 1{,}98$ m/s.
26. $\mu_0 = 5{,}97$.
28. a) $F = 32$ N; b) $F = 472$ N; c) $a = 9{,}8$ m/s^2
30. $T = 280$ N; $v = 14{,}1$ m/s.
31. $T = 117$ N; $v = 2{,}8$ m/s.

Capítulo 4

5. $P_L \approx 33$ N. Es 6 veces mayor que en la Tierra.
6. $g \approx 25{,}9$ m/s^2.
7. $P \approx 1\,813$ N.
8. a) $P_L \approx 114{,}3$ N; $P_T \approx 686$ N; b) $m_T = 70$ kg; $m_L = 70$ kg.
9. $v \approx 1770$ m/s.
10. $\omega_b = \sqrt{8}\,\omega_a$.
11. $M_S \approx 1{,}98 \cdot 10^{30}$ kg.
12. $s = 3{,}45 \cdot 10^8$ m.
13. $s = 2{,}57 \cdot 10^9$ m.

Capítulo 5

1. $p = 24900$ kg. m/s.
2. $p = 1{,}11 \cdot 10^5$ kg. m/s.
3. $F\Delta t = 8{,}8$ N.
4. $F = $ [illegible],4 N.
5. a) $F\Delta t = 24$ N. s; b) $\Delta t = 2$ s.
6. a) $\Delta p = 480$ kg. m/s. b) $F\Delta t = 4{,}30$ N. s; c) $F = 2400$ N.

7. $x = 2,5$ m.
8. $F\Delta t = 6$ N. s; $F = 6\,000$ N.
9. $F = 1\,750$ N.
11. $v_t = 0,014$ m/s y se mueve en sentido contrario a la bala.
12. a) $v_c = 3$ m/s; b) $v_c = 2,1$ m/s.
13. $(v_l - v_0) = -1,425$ m/s; $v_l = 8,575$ m/s.
14. $u = -0,336$ m/s.
15. El núcleo sale disparado en sentido contrario con una velocidad de $2,072 \cdot 10^5$ m/s.
16. a) $v = 14$ m/s; b) $v = 8$ m/s; c) $v = 5$ m/s.
17. $v_v = 54,5$ m/s.
18. $v = 5,5$ m/s.

Capítulo 6

1. $W = 4\,000$ J.
2. $W = 5\,000$ J.
3. $W = 250$ J.
4. $W_{F_1} = 15$ J; $W_{F_2} = 48$ J; $W_{f_r} = -30$ J; $W_R = 33$ J.
5. $W = 3,30 \cdot 10^4$ J.
7. a) $W = 500$ J; b) $\mu \approx 0,7$.
8. $W = 97,5 \cdot 10^3$ J.
9. $E_c = 180$ J; $v \approx 11$ m/s.
10. $W = 4,5 \cdot 10^8$ J.
11. $W = 80$ J; $s = 10$ m.
12. $W = -12,4 \cdot 10^3$ J.
13. $W_{F_g} = 4$ J.
14. $W_{F_g} \approx 1\,500$ J; $f_r \approx 250$ N.
15. $\Delta E_p \approx 120$ J.
16. $W_{F_g} = -100$ J.
17. $W_{F_{el}} = 8$ J.
18. $W = 11,25$ J.
19. $W = 16,5$ J.
20. $h \approx 45$ m.
23. $h = 2\,000$ m.
24. a) $E_p = 400$ J; $E_M = 400$ J; b) $E_p = 200$ J; $E_c = 200$ J; $E_M = 200$ J; c) $E_c = 400$ J; $E_M = 400$ J.
25. a) $E_{co} = 28\,125$ J; b) $E_{po} = 10^4$ J; c) $E_M = 125$ J; d) $v = 87$ m/s.
26. $h_p = 250$ m.
27. $x_M = 20$ m.
28. $W_{f_r} = -330$ J.
29. $W_{f_r} = -100$ J.
30. $v = 4,5$ m/s; $T = 0,2$ N.
31. a) $v = 0,5$ m/s; b) $h = 0,0125$ m.
32. a) $\mu = 0,24$; b) $W_{f_r} = -8,5$ J.
33. $h = 0,38$ m.
34. $x = 0,033$ m $= 3,3$ cm.
35. $h = 3,0$ m.
36. $v_p = 36,5$ m/s.

Capítulo 7

1. a) $x = 10 \cos 9,16\,t$ o $x = 10 \operatorname{sen}(9,16\,t + \pi/2)$ [cm si t en s].
2. $x = 6 \cos 10^3\,\pi$ (cm si t en s).
3. Para ambos instantes $x = 40$ mm.
4. $X_m = 3,5$ cm, $\omega = 4$ rad/s, $\varphi = 0°$.
5. a) $T = 4 \cdot 10^{-2}$ s; b) $\omega = 50\,\pi$ rad/s; c) $X_m = 4$ cm; d) $x = 4 \operatorname{sen} 50\,\pi t$ (cm si t en s).

6. a) $X_m = 25$ mm; b) $T = 1{,}57$ s; c) $\nu = 100 \cos 4\pi t$ (mm/s si t en s) y $\nu_m = 100$ mm/s $= 0{,}1$ m/s; d) $a = -400 \operatorname{sen} 4\pi t$ (mm/s^2 si t en s) y $a_m = -400$ mm/s^2 $= -0{,}4$ m/s^2.
7. a) $\upsilon = 31{,}6$ Hz, b) $\nu_m = 0{,}396$ m/s.
8. a) $\upsilon = 4$ Hz, $T = 0{,}25$ s, $\omega = 8\pi$ rad/s; b) $x = 3 \operatorname{sen} 8\pi t$ (cm si t en s); $x = 3\cos(8\pi t + \pi/2)$ (cm si t en s); c) $x = 3\cos 8\pi t$ (cm si t en s).
9. $t = 1$ s.
10. a) $\nu_m = 0{,}094$ m/s; b) $a_m = 0{,}074$ m/s^2; c) $a = 0$ y $a = -0{,}052$ m/s^2.
11. $t = \dfrac{T}{6}$.
12. a) $E_{pmáx} = 2$ J; b) $E_{cmáx} = 2$ J; c) $E = 2$ J, $\nu_m = 1$ m/s.
13. $\nu = 0$, $a = 44{,}4$ m/s^2; $E_c = 0$.
14. $\nu = 5{,}02$ m/s.
17. El B.
18. a) 15 cm, b) 80 Hz, 70 Hz.
19. Sí.
20. $l_1 = 9$ cm, $l_2 = 25$ cm.
21. $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{m_1 m_2}{g + a}}$.
22. $\nu = 9{,}39$ m/s.
25. $\nu_{cm} = x\sqrt{km_2}/m_1 + m_2$ y $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$.

Capítulo 8

1. a) $\lambda = 12$ cm; b) 9 cm; c) $\upsilon = 1\,666$ Hz.
2. a) a y e, b y f, d y h; b) a y c, b y d, c y e.
3. a) $\Delta\varphi = \pi$; b) $\Delta\varphi = 0°$; c) $\Delta\varphi = \pi$; e) $\Delta\varphi = \pi$.
4. $\nu = 1\,543$ m/s.
5. a) $T = \dfrac{1}{4}$ s; b) $f = 4$ por segundo.
6. Disminuir la frecuencia.
7. $\nu = 0{,}2$ m/s; la longitud de onda varía en 4 veces.
8. $d = 1\,360$ m.
9. $\nu = 9\,010$ m/s.
10. a) Sí; b) no.
11. a) $T = \dfrac{1}{50}$ s; $\upsilon = 50$ Hz; $\lambda = 0{,}3$ m; b) $y = 0$; c) $y = \operatorname{sen}(100\pi - 21x)$.
13. $y = 0{,}5 \operatorname{sen}(2\pi l - 4\pi x)$.
16. $\Delta\varphi = 2\pi/3$.
17. A: reforzamiento en la cresta; C: reforzamiento en los valles; B: punto nodal.
18. Un mínimo.
19. No es cierta.
20. La velocidad en el segundo muelle es menor que en el primero.
22. a) Impulso incidente (2), impulso reflejado (1); b) $i = 70°$.
24. $\lambda_{agua} = 4{,}22\ \lambda_{aire}$.

Colección Preuniversitario

Este libro constituye el texto oficial para los alumnos del décimo grado de la Educación General Politécnica y Laboral de la República de Cuba. Con él se inician los estudios de profundización y sistematización del curso de Física del ciclo preuniversitario, donde se examinan los principales hechos, conceptos y leyes de la teoría mecánica.

El texto comprende dos temas fundamentales: el movimiento de la partícula y el movimiento ondulatorio.

El enfoque metodológico se caracteriza por ser fundamentalmente inductivo-deductivo, en el cual prevalece el análisis cuantitativo de los principales fenómenos que se estudian. El tratamiento conceptual permite crear en los alumnos las primeras premisas de los elementos componentes de las teorías físicas.

El libro contiene una serie de trabajos de laboratorio, cuya realización desempeña un papel fundamental para la formación de habilidades experimentales.

El texto se complementa con un sistema de tareas teóricas y experimentales, cualitativas y cuantitativas, que están estrechamente relacionadas con el contenido.

9 789591 307118