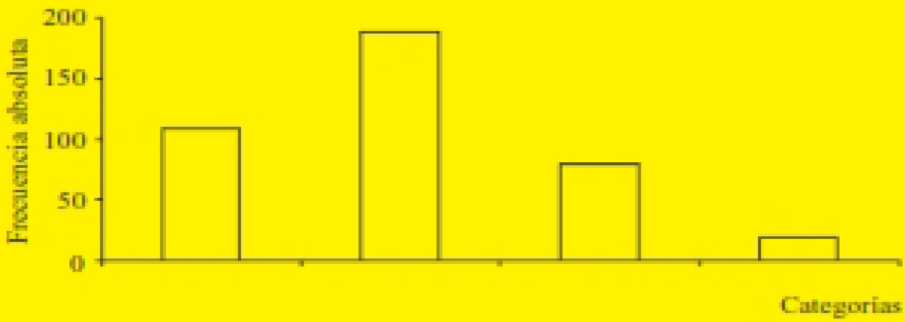
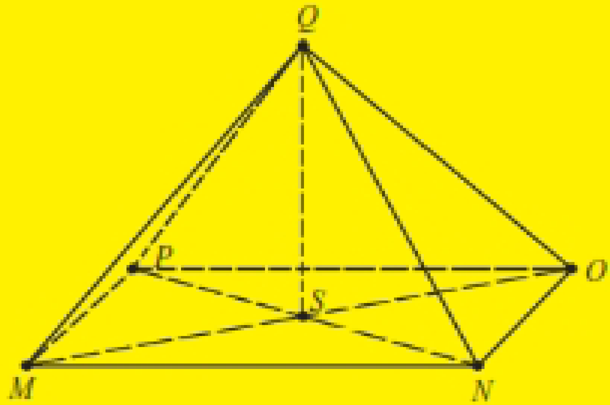




# Matemática

8.º grado

MATE
MÁ
TICA

# MATEMÁTICA

8.º GRADO

MATE
MÁ
TICA

# MATEMÁTICA

## 8.º GRADO

MSc. Susana Acosta Hernández
MSc. Margarita Gort Sánchez
Dr. C. Aurelio Quintana Valdés
MSc. Lourdes Báez Arbesú
Dr. C. Luisa García de la Vega
Dr. C. Cristina González Dogil
MSc. Rita María Cantero Pérez
MSc. Jesús Cantón Arenas
MSc. Oscar Domínguez Escobar

Editorial
Pueblo y Educación

Edición: Lic. Laura Herrera Caseiro
Diseño: Elena Faramiñán Cortina
Ilustración: José Carlos Chateloín Soto
Carlos Alberto Prieto Cañedo
Martha María González Arencibia
María Elena Duany Alayo
Corrección: Magda Dot Rodríguez
Emplane: Elier Guzmán Lajud
Adriana Fundora Losada



ISBN 978-959-13-2856-4

EDITORIAL PUEBLO Y EDUCACIÓN
Ave. 3ra. A No. 4601 entre 46 y 60,
Playa, La Habana, Cuba. CP 11300.
epe@enet.cu

# Preámbulo

Este libro tiene el propósito de ser el texto básico del programa de Matemática de octavo grado, vigente a partir del curso escolar 2012-2013, con un enfoque orientado fundamentalmente a la vinculación de la asignatura con diferentes situaciones de la vida práctica.

Ha sido el resultado del esfuerzo de muchos compañeros, que apoyaron el trabajo de sus autores con ejercicios, ilustraciones, sugerencias, datos y una enriquecedora revisión, a cargo de los profesores: MSc. Hilario Santana de Armas, MSc. Ortelio Querol Méndez, Dra. C. Marta Álvarez Pérez. También laboraron en él, editores, dibujantes, trabajadores encargados de la impresión y el empalme y aquellos que con su trabajo contribuyeron a obtener los recursos necesarios para invertir en el papel, las tintas, las cartulinas, los pegamentos y los equipos de impresión. ¡A todos nuestro infinito agradecimiento!

# Índice

# Orientaciones para el trabajo con el libro

El contenido de este libro está estructurado en tres capítulos, cada uno está dividido en epígrafes y estos a su vez en subepígrafes.

Al hojear sus páginas te percatarás de que cuenta con una pequeña introducción del tema que se tratará y diferentes secciones, que se distinguen por un logotipo que las identifica.

Estas secciones son:

**Recuerda:** abarca recuadros con propiedades, fórmulas, definiciones, teoremas o aspectos importantes del contenido que debes saber.

*Ejemplo:* incluye tanto, ejemplos, como ejercicios resueltos, que muestran procedimientos de trabajo.

**¡!:** situación problémica planteada.

**R ¡!:** respuesta de la situación problémica planteada.

**Ejercicios:** contiene los ejercicios que se proponen para cada epígrafe.

**Ejercicios del capítulo:** agrupa ejercicios que integran los contenidos tratados en todo el capítulo.

**Para la autoevaluación:** tiene dos partes, la primera con un grupo de interrogantes para reflexionar sobre lo aprendido y la segunda un "Ponte a prueba" para que evalúes los contenidos adquiridos en el capítulo.

**Respuestas de los ejercicios:** contiene las respuestas de los ejercicios de cada capítulo.

Debes cuidarlo, pero sobre todo: ¡usarlo mucho! y junto a tus profesores ofrecer todas las sugerencias que permitirán perfeccionar las futuras ediciones.

Te deseamos el mayor de los éxitos en el trabajo con la asignatura.

LOS AUTORES

# CAPÍTULO 1

## *Dominio de los números reales y estadística descriptiva*

"Con el inicio del curso"

¡Qué vacaciones! ¡Las mejores de mi vida, pues me ocurrieron cosas maravillosas! Y además, las primeras desde que estoy en secundaria. Ahora, que dentro de poco comenzará el curso escolar; pienso en que tendré nuevas asignaturas y se mantendrán otras; entre estas la Matemática, asignatura que siempre me preocupa, aunque en séptimo obtuve buenos resultados y espero que también sea así en octavo; haré todo lo posible para lograrlo.

¡Ya estás en octavo grado! Comienza este capítulo, reactivando lo estudiado de aritmética en séptimo; después, conoceremos peculiares números y ampliaremos lo estudiado sobre la estadística descriptiva.

¡Claro está!, que no faltarán momentos con la Historia, con la cual pretendemos, y esperamos que así se logre, hacerte más placentero tu aprendizaje y enriquecer tu cultura, lo que implica que serás un estudiante mejor.

¡Bienvenido seas a este nuevo curso escolar! ¡Éxitos para ti! Esta frase de nuestro José Martí te llenará de aliento cuando lo necesites: "[…] los estudios hechos no inspiran más que una profunda vergüenza por lo que todavía nos queda que estudiar".[1]

## 1.1 Repaso sobre los números racionales

Recordemos algunas de las características más importantes de estos números.

En séptimo grado, estudiaste el conjunto de los números racionales, los cuales se pueden representar en la forma $\frac{a}{b}$, donde: $a, b \in \mathbb{Z}$; $b \neq 0$.

Pensemos, mediante el conocido diagrama de Venn[2] (fig. 1.1), qué conjuntos son subconjuntos del conjunto de los números racionales, por ejemplo: $-0,\overline{3} \in \mathbb{Q}; -1 \notin \mathbb{Q}_+; \{-0,\overline{3}; -4\} \subset \mathbb{Q}; \{5; -1\} \not\subset \mathbb{N}; \mathbb{Q}_+ \subset \mathbb{Q}; \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}; \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

[1] Ramiro Valdés Galarraga: *Diccionario del pensamiento martiano,* Editorial de Ciencias Sociales, La Habana, 2012, p. 198.

[2] John Venn (1834-1923) matemático británico. Se destacó por sus investigaciones en la rama de la Lógica matemática. Es especialmente conocido por su método de representación gráfica de proposiciones (según su cualidad).

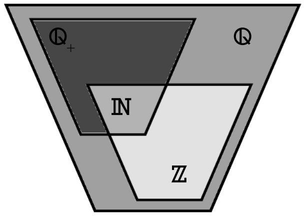



Figura 1.1

El conjunto de los números racionales es infinito, pero ya debes haber recordado algunos elementos que pertenecen a dicho conjunto.

De dos números racionales diferentes, es menor el que está situado más a la izquierda en la recta numérica.

Por ejemplo, en el fragmento de recta numérica de la figura 1.2 es fácil percatarse de que: $1\frac{2}{5} < 2; -\frac{16}{10} < -\frac{4}{5}$; $1 > -2$; $0 > -2$; $0 < 1$.

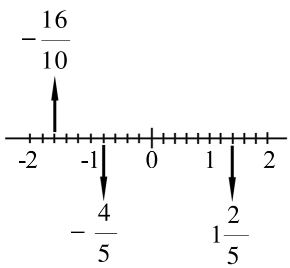



Figura 1.2

En el conjunto de los números racionales la adición, la sustracción, la multiplicación, la división (excepto la división por cero) y la potenciación (con las restricciones que ya conoces), siempre se pueden realizar; no así, la extracción de las raíces cuadrada y cúbica, pues como ya sabes no existe en el conjunto de los números racionales la raíz cuadrada de un número racional negativo, sucede también que la raíz cuadrada de un número racional no siempre es un número racional, algo que también puede darse al extraer la raíz cúbica.

Por ejemplo: $\frac{1}{4} - \frac{1}{2}$; $-7 : 3$; $-90 \cdot (-2)$ tienen solución en $\mathbb{Q}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} \in \mathbb{Q}$; si el exponente es cero, la base tiene que ser diferente de cero para poder efectuar la potenciación; ($b^0 = 1$, con $b \neq 0$).

Las raíces cuadradas de 144 son 12 y $-12$, $\{12; -12\} \subset \mathbb{Q}$; $\sqrt{-17} \notin \mathbb{Q}$; $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

La raíz cúbica de $-125$ es $-5 \in \mathbb{Q}$; $\sqrt[3]{7} \notin \mathbb{Q}$.

La adición y la multiplicación en $\mathbb{Q}$ son conmutativas y asociativas.

La multiplicación en $\mathbb{Q}$ es distributiva con respecto a la adición.

Debes recordar que en ejercicios donde aparecen operaciones combinadas con números racionales, hay que tener en cuenta el orden en que se realizan, así como si intervienen signos de agrupación:

- Primero se calculan las potencias y raíces en el orden en que aparecen.
- Segundo se realizan las multiplicaciones y divisiones en el orden en que aparecen.
- Tercero se realizan las sumas algebraicas que resultan al final.
- Si intervienen signos de agrupación (paréntesis, corchetes y llaves) se resuelven estos primero manteniendo el orden establecido anteriormente.

Por ejemplo:

Calcula:

a) $3 \cdot 2^2 : (-0{,}12) + 1$

$= 3 \cdot 4 : (-0{,}12) + 1$

$= 12 : (-0{,}12) + 1$

$= -100 + 1$

$= -99$

b) $(\sqrt[3]{-64} - 1) \cdot \dfrac{1}{15}$

$= (-4 - 1) \cdot \dfrac{1}{15}$

$= -5 \cdot \dfrac{1}{15}$

$= -\dfrac{1}{3}$

c) $3^2 - 12 : 6 + 7$

$= 9 - 2 + 7$

$= 7 + 7$

$= 14$

Si coleccionaste porcentajes, tal y como te sugerimos en el capítulo 1 del libro de séptimo, debes tener una buena cantidad de ellos; pues en incontables circunstancias ilustran y ayudan a comprender fenómenos.

Es muy valioso que tú sepas interpretar esa *información,* que se expresa en *tanto por ciento* y que significa *tantos de cada 100,* es decir, *la cantidad de elementos que se toman de cada conjunto de 100.* Esta es otra oportunidad de comprenderlos. ¡No la desperdicies!

Tres, son las operaciones fundamentales al operar con porcentajes:

Hallar el tanto por ciento de un número.

*Ejemplo 1:*

En mi grupo de séptimo, el 95 % de los estudiantes aprobó la prueba final de Matemática. Si en total éramos 40, ¿cuántos aprobamos?

$95\ \%$ de $40 = \dfrac{95}{100}$ de $40 = \dfrac{19}{20} \cdot 40 = 38$. R/ Aprobamos 38 estudiantes.

¿Qué tanto por ciento es un número de otro?

*Ejemplo 2:*

Mi grupo de séptimo tenía una matrícula de 35 estudiantes y 28 obtuvimos la máxima puntuación en la pregunta de Geometría en la prueba final. ¿Qué porcentaje de la matrícula logró ese buen resultado?

$\frac{28}{35} \cdot 100 = 80$ .

R/ El 80 % de los estudiantes alcanzó la máxima calificación en dicha pregunta.

Hallar el número, conocido un tanto por ciento de él.

*Ejemplo 3:*

En mi grupo de séptimo, 16 estudiantes, lo que representa el 40 % de la matrícula, tuvieron faltas de ortografía en la prueba final de Matemática. ¿Cuántos estudiantes tenía mi grupo de séptimo?

$16 : \frac{40}{100} = \frac{16 \cdot 100}{40} = 40$ . R/ En el grupo había 40 estudiantes.

Con lo estudiado sobre números racionales, puedes resolver los más variados problemas, proponerte solucionar aquellos que más te gustan y pasarte largo rato pensando en ellos; ese tiempo será muy provechoso para mejorar tu sagacidad:

Antes de hacer trata de entender.
Busca tu estrategia y llévala adelante.
Examina a fondo el resultado obtenido.
Reflexiona acerca de la manera en que pensaste y llega a conclusiones para el futuro.

Después de este breve repaso, te regalamos esta colección de ejercicios, que abarca temas estudiados en el capítulo 1 de séptimo grado.

¡Acepta este reto! ¡Tú puedes!

## *Ejercicios*

1. El pequeñísimo gusano del diablo es el organismo terrestre pluricelular que vive a más profundidad en el planeta; esta especie fue descubierta a 1,3 km bajo tierra en una mina de oro en Sudáfrica, […], a lo mejor algún día se encuentre ese u otro organismo en la mina más profunda del mundo con sus 3 377 m bajo tierra y que también es sudafricana.[3]
   a) Escribe el texto de forma tal que aparezcan números negativos, representados en una recta numérica vertical que apoye la información.
   b) ¿Cuántos metros tendría que trasladarse ese raro gusano para llegar al punto más bajo de la mina más profunda?

   *Nota:* supón que están dadas todas las condiciones y que va en línea recta.

[3] Marta Ríos Rodríguez y Rosa Leiva Gutiérrez: *El mundo. Sus banderas,* 2009 y Órgano de prensa *Juventud Rebelde,* 1º. de junio de 2012.

c) La catarata más alta de África está en Sudáfrica, es Tugela con 948 m, ¿cuál será la distancia entre el punto en que se ubica el curioso gusano y el más alto de esta impresionante caída de agua?

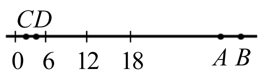
*Nota:* considera que están en una línea recta perpendicular al nivel del mar.

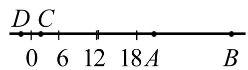
2. Si 10 niños de cada 100 usan espejuelos, ¿cuántos no usan espejuelos en un grupo de 400 niños?
3. Una botella y un tapón cuestan \$1,10. La botella cuesta \$1,00 más que el tapón. ¿Cuánto cuesta la botella?
4. Sean $A = -2^4 + 35{,}3$ $\qquad B = 18{,}1 - 3{,}85 \cdot 6$

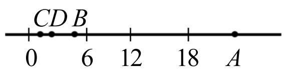
$$C = \frac{3}{16} + \frac{5}{8} - \frac{7}{10} \qquad D = \frac{1}{3} - \sqrt[3]{-729} : \left(-\frac{81}{7}\right)$$

4.1. Selecciona la respuesta correcta y márcala con una cruz (X) en la línea dada.

4.1.1. En la recta numérica, *A*, *B*, *C* y *D* quedan ubicados aproximadamente como se muestra en la figura 1.3.

a) ___ 


b) ___ 


c) ___ 

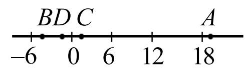

d) ___ 


Figura 1.3

4.1.2. El conjunto formado por *A*, *B*, *C* y *D*:

a) ___ es subconjunto de los números enteros,
b) ___ solo tiene dos elementos que son números racionales,
c) ___ es infinito,
d) ___ es subconjunto del conjunto de los números racionales.

4.1.3. Entre los valores de *B* y *D* hay:

a) ___ nada más cuatro números racionales,
b) ___ infinitos números racionales menores que –6,
c) ___ solamente cuatro números racionales mayores que –5,
d) ___ cuatro números enteros.

4.1.4. El opuesto de *A* y el de *C* son dos números:

a) ___ racionales mayores que –20, b) ___ racionales menores que –20,
c) ___ racionales positivos, d) ___ enteros.

5. Sean $E = \left((-2)^{16}\right)^3 \cdot (-2)^{-45} + 17^0$; $F = (-73{,}44)^2 : 4{,}08^2 - 331$; $G = -\frac{17}{16} + \left(2\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{28}\right)^2$.

Completa de forma tal que se obtenga una proposición verdadera.

a) El conjunto numérico más restringido al que pertenecen los valores de $E$, $F$ y $G$ es el de los números ______________.
b) El conjunto formado por los valores de $E$, $F$ y $G$ ______________ conjunto de los números ________________.
c) Al compararlos podemos afirmar que $E$ y $F$ son números __________________.
d) De $E$, $F$ y $G$, el mayor es el de ___ porque ____________________.
e) El antecesor de $E$ es _____.
f) El sucesor de $F$ es ______.
g) El valor de $F$ se ubica entre los números enteros consecutivos ____ y ____.
h) El opuesto de $E$ es igual al ________ de $F$.
i) Una propiedad de la potencia utilizada para hallar $E$ es ___________________.
j) Entre los valores de $F$ y $G$ hay ____ números enteros.

6. ¿Cuál es el valor de la expresión: 25 % de 14?
7. Las rosas del Ecuador son sus bellas embajadoras ante el mundo. El sector florícola ecuatoriano ingresó en 2011 cerca de seiscientos setenta y ocho millones de dólares, resultado de sus exportaciones. Rusia fue la segunda mejor compradora con el *22,55 %, aproximadamente 152 889 000 USD*.[4]

   Verifica la información subrayada con los recursos que te brinda el cálculo porcentual.

8. Desde que en 2010, en Cuba, se amplió el trabajo no estatal, suman 385 775 los trabajadores en este sector, de los cuales 73 118 son jóvenes de entre 18 y 35 años.[5]

   ¿Qué porcentaje representa dicha cifra del total?

9. El comercio exterior de China aumentó un 8 % en el primer semestre del año 2012 respecto a igual etapa del año anterior y suma 1 480 000 000 000 USD.[6]

   ¿Cuánto sumó el comercio exterior chino en el período enero-junio de 2011?

10. La cifra de desempleados en Francia es de dos millones ochocientos setenta y cuatro mil quinientos, la cual representa el 9,7 % de la población en edad laboral.[7] ¿Cuántas personas están en edad laboral en ese país?
11. Imagina que eres el dueño(a) de una cafetería y parte del anuncio es como se muestra en la figura 1.4.

    a) Si el viernes se paga más que el sábado y el sábado menos que el domingo; propón valores para cada uno de los espacios.
    b) ¿Cómo quedaría tu idea si en vez de decir *se reduce a,* dijera *se reduce en?*

[4] Semanario *Orbe,* 14 al 20 de julio de 2012.
[5] Órgano de prensa *Juventud Rebelde,* 17 de junio de 2012.
[6] Órgano de prensa *Granma,* 11 de julio de 2012.
[7] Órgano de prensa *Granma,* 15 de diciembre de 2011.

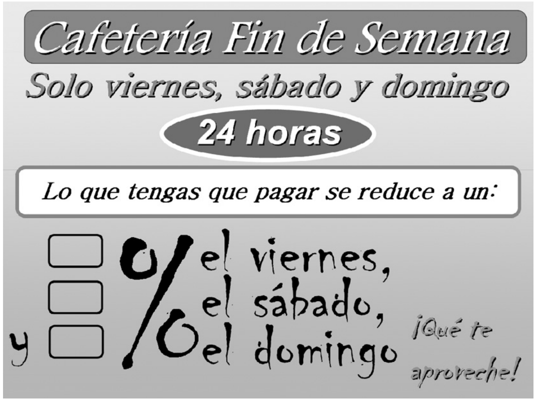



Figura 1.4

12. a) Un dependiente vende en la primera hora de trabajo el 20 % de los 60 pomos de perfume que tiene exactamente una caja, si en la segunda hora, vende las dos terceras partes del resto, ¿cuántos pomos quedan en la caja?

    b) Si en dos meses se han vendido 320 pomos de perfume, ¿cuántas cajas se han abierto durante ese tiempo?

13. Una maestra jubilada tenía 196 libros, el 25 % lo entregó a la biblioteca de la secundaria básica más cercana, la tercera parte del resto la donó a un preuniversitario de la localidad. ¿Con cuántos libros se quedó?

    a) Di si la proposición siguiente es verdadera (V) o falsa (F):

    A la secundaria y al preuniversitario la maestra entregó igual cantidad de libros.

    b) Completa para que la proposición sea verdadera:

    La profesora se quedó con el ____ % de los libros que tenía.

14. En una lámina de metal se corta un trozo que constituye el 60 % de dicha lámina. Si el pedazo que queda pesa 24,2 kg, ¿cuál es el peso del trozo cortado?
15. Cristina dice estar cumpliendo 18 años. Si sabemos que Cristina se rebaja la cuarta parte de su edad, menos un año, ¿qué edad en años y meses tiene Cristina?
16. Un trabajador por cuenta propia vende a singulares precios, él tiene 432 dulces; si la cuarta parte son tartaletas y la novena parte del resto son pasteles, ¿cuántos dulces no son ni tartaletas ni pasteles?

    a) Si compra las tartaletas a \$0,50 y logra vender todas las que tiene a \$1,50, ¿cuál es su ganancia?
    b) Un día tuvo una ganancia de \$27,00 por la venta de cierta cantidad de pasteles que compró a \$0,50. Halla la cantidad si los vendió a \$2,00.

17. En un quiosco de mi barrio hay 140 revistas, el vendedor, un profesor de Matemática jubilado, ha querido medir mi habilidad para resolver problemas, por eso me ha dicho:

    "Las dos séptimas partes de las revistas que tengo son *Somos Jóvenes,* el 20 % de las que quedan son *Juventud Técnica* y me quedan 80 revistas".

    ¿Tendrá sentido lo que dice?

18. El 75 % de los 40 integrantes de un círculo de interés pedagógico quiere ser maestro primario, la quinta parte del resto, profesores de matemática y los otros, profesores de inglés.

    a) ¿Cuántos quieren ser profesores de inglés?
    b) ¿Qué porcentaje representa del total, los que quieren ser profesores de matemática?

19. Forma el número 68, sumando, restando, multiplicando y dividiendo con estos cinco números: 1 2 3 14 32
20. ¿Cuántas bolas de 10 cm de diámetro pueden introducirse en una caja vacía de 100 cm de lado?

## 1.2 Nuevos números

¿Hay más números? ¿Cuáles son? ¿Para qué?

**¡!** Lee cuidadosamente el texto de Rita María Cantero Pérez siguiente:

> No se sabe cuándo ni dónde sucedió esta historia, lo más seguro es que nunca ocurrió, pero… sea un hecho real o producto de la imaginación, esta historia que vamos a relatar es casi una fábula y vale la pena conocerla.
>
> Dicen que sucedió en un lejano pueblito, que cuentan, se distinguía por sus recursos naturales y el buen uso que se hacía de estos; la belleza del entorno y el nivel cultural de sus habitantes adultos; nivel cultural entre comillas, pues de Matemática solo querían saber de: adicionar, sustraer, multiplicar y dividir números racionales, algo de tanto por ciento, otro poco de figuras geométricas y de mediciones, nada más. ¿Te imaginas qué sabrían los niños?
>
> Comentaban que con eso bastaba, tratándose de Matemática. En múltiples ocasiones tuvieron que pedir colaboración a especialistas de los pueblos vecinos para solucionar problemas cotidianos que se presentaban, siempre salían victoriosos, pues todos quedaban resueltos; de ahí que al oír hablar un poquito más de esta ciencia, decían:
>
> — ¿Y eso para qué sirve?
>
> Hasta que un día… llegó al pueblo un pícaro que conocía de los saberes matemáticos de los que vivían en ese peculiar pueblito, por eso, puso en el lugar más concurrido un cartel como el que se muestra en la figura 1.5.

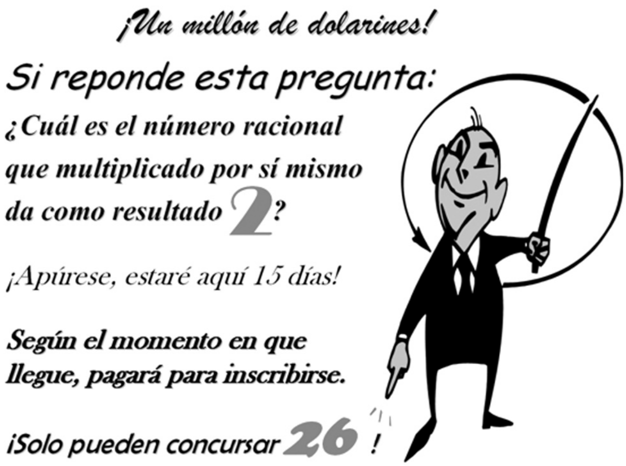



Figura 1.5

Expresó ser un filántropo y enamorado de la Matemática y difundió su propuesta por todos los medios que pudo; no pocos quedaron seducidos por el fascinador anuncio.

Dadas las condiciones no era fácil concursar; había pocas cuotas y las últimas eran muy costosas, el primero en inscribirse pagó 0,02 D; el segundo, 0,04 D; el tercero, 0,08 D; pero el número 26, abonó 671 088,64 D, sin embargo, era una excelente oferta la del millón de dolarines (D).[8]

Todos, concursantes o no, buscaban día y noche con sus escasos conocimientos matemáticos, el dichoso número, a veces creían tenerlo porque se aproximaban, mas se exigía exactitud en el resultado, 2 y no otro.

Quien no concursaba y encontrara la respuesta, podía darla a un participante que estuviera dispuesto a compartir el premio; de ahí que el apasionamiento fue general.

No, no pidieron ayuda, todos creían poder encontrar la solución.

Así transcurrieron los días, en los que nadie se daba cuenta de la aritmética burla, nadie imaginó que el decimocuarto día huyera con la fastuosa cifra de: ¡1 342 177,26 D!, resultado de su concurso, eso sí, de la respuesta nada; él sabía que su astuto acertijo no tenía solución.

Al enterarse, todos se sintieron estafados, veintiséis perdieron su dinero y todos, su tiempo. Nunca más supieron de él.

Tres días después, llegó al pueblo un director de cine con el propósito de crear condiciones para la filmación de un documental sobre aquel lugar; el alcalde de allí, por cierto, uno de los más burlados, le contó lo sucedido y Félix Andrés, el hijo del cineasta, al escucharlo, explicó:

*No existe número racional que multiplicado por sí mismo, dé como resultado dos. Mi profesor lo ha dicho en las clases de séptimo, ha comentado otros ejemplos parecidos y ha dicho, además, que pronto sabremos el porqué.*

[8] Dolarín (D): Moneda del pueblito, válida en las cinco naciones más cercanas.

Ustedes fueron engañados por no saber nada de cuadrado y raíz cuadrada de un número racional no negativo, espero que hayan aprendido la lección y que ya tengan una buena cantidad de respuestas a la pregunta: Y eso, ¿para qué sirve?

Seguramente leíste esta historia con todo esmero, por eso ahora queremos que pienses un minuto un vocablo que te permita caracterizarla.

La palabra que utilizaste mucho tiene que ver con lo que entendiste, a propósito, algunos comentarios que valen la pena.

Al hallar el valor numérico del término $0{,}01 \cdot 2^x$, siendo $x$ el número que indica el lugar que se ocupó para concursar, se hallaba el dinero que se debía entregar al rufián ¡claro está!, aquella gente no lo sabía y el vil ladrón se valió de otro recurso para explicar cuánto tenían que abonar cada uno de los veintiséis participantes, y no por gusto hizo la aclaración, el veintisiete tenía que abonar ¡1 342 177,28 D!

¡Más de lo que él ofrecía como premio!

Y sí, lo que estafó el promotor es la suma de todos los abonos.

¡Compruébalo tú mismo(a)!

Félix Andrés convenció a todos del papelazo que habían hecho, se valió de sus conocimientos y le sirvió, además, para hacerles ver que la matemática que nos enseñan en la escuela nos provee de conceptos, teoremas, reglas, relaciones y procedimientos que nos sirven en esa etapa y en el futuro.

Tú también puedes dar una respuesta correcta ante una situación como esa, pues ya en séptimo resolviste ejercicios en los que te enfrentaste a la búsqueda de raíces cuadradas y/o cúbicas de un número racional y en varias ocasiones seguro que tu profesor o profesora o tu monitor o monitora te puntualizaron (fig. 1.6).

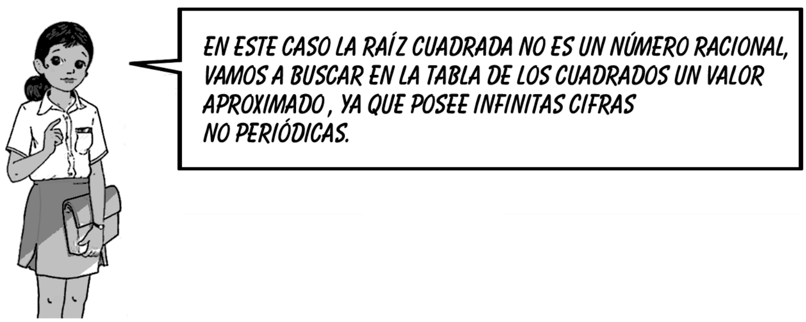



Figura 1.6

Si tienes alguna duda, piensa en los números racionales más próximos al valor dado, cuyas raíces cuadradas sean exactas.

Los números racionales no cubren totalmente la recta numérica.

También encontraste advertencias parecidas a esas al hallar las raíces cúbicas.

Debes haber escuchado muchas veces, casi hasta cansarte (fig. 1.7).

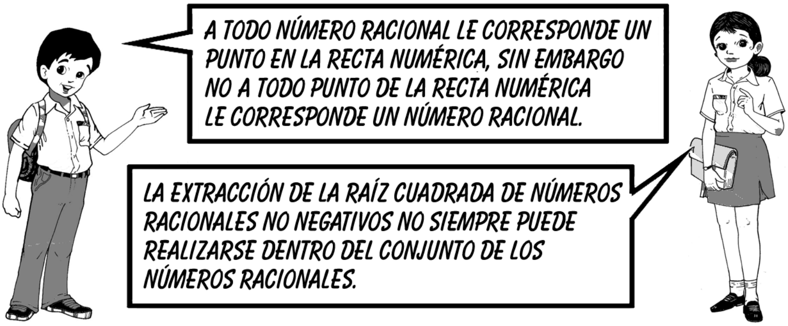



Figura 1.7

Y a lo mejor tuviste que resolver el famoso ejercicio del charlatán:

$x \cdot x = 2$ $\qquad$ $x$ : número racional buscado

$x^2 = 2$

$x = \sqrt{2}$

**R ¡!** No existe número racional que multiplicado por sí mismo dé como resultado 2.

Piensa que $\sqrt{1} = 1$ y que $\sqrt{4} = 2$, por tanto, ¿dónde hallar un número racional que elevado al cuadrado dé 2?, $\sqrt{2}$ no es un número racional, es una expresión decimal infinita no periódica $(\sqrt{2} \approx 1{,}414\,213\,562\,373\,095\,048\,801\,688\,724\,209\,7...)$; gracias al uso de la tabla adecuada para ello, encontramos la aproximación 1,41.

¡Con ustedes el burlador hubiese salido burlado!

Ha llegado el momento de conocer qué números son esos, de ampliar tus horizontes matemáticos, de conocer nuevos números. ¡Adelante!

Los números que se representan mediante expresiones decimales infinitas no periódicas, reciben el nombre de **números irracionales**, se denotan por $\mathbb{I}$.

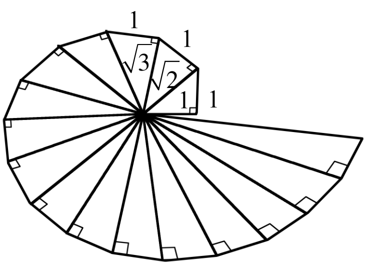



Figura 1.8

*Teodoro de Cirene (siglo* V *a.n.e.), famoso geómetra, uno de los maestros de Platón, fue uno de los primeros en plantear una teoría de los números irracionales que será recogida en los* Elementos *de Euclides.*

*De su autoría es la conocida espiral que representa longitudes irracionales como hipotenusas de triángulos rectángulos (fig. 1.8), cuyas longitudes de catetos fueron seleccionadas inteligentemente.*[10] *¿Te diste cuenta? Atrévete y complétala, llegarás hasta la raíz cuadrada de 17.*

[10] Carlos Sánchez Fernández y Rita Roldán Inguanzo: *Números y figuras en la historia,* primera parte, Curso Universidad para todos, Editora Política, p. 14.

Ejemplos ya tienes muchísimos, pero aquí te proponemos otros: $\frac{\sqrt{19}}{2}, \sqrt[3]{-25}, -\sqrt{0,\overline{3}}, \sqrt[3]{\frac{7}{8}}, -\sqrt[3]{1,1}$ . ¡Embúllate, busca sus aproximaciones utilizando una calculadora científica!

Son múltiples los ejemplos que corroboran la necesidad de introducir un nuevo conjunto numérico, he aquí dos de ellos:

- Busca en $\mathbb{Q}$ el número que satisface la igualdad $a^3 = -12$.
- La longitud (en centímetro) del lado de un cubo cuya área total es 12 $cm^2$, ¿es un número que pueda ser ubicado en la recta numérica?

Comprobamos que es insuficiente el conjunto de los números racionales.

Figura 1.9

*Pitágoras de Samos (582-501 a.n.e.) (fig. 1.9) es un famoso filósofo y también un notable matemático de la antigüedad, cuya obra fue vasta.*

*En Crotona, ciudad al sur de Italia, crea la Escuela Filosófica de los Pitagóricos; en esta, enseña entre otras materias Aritmética y Geometría.*

*El conocimiento para el maestro significa matemática. Todo es número, era la idea primordial de Pitágoras, y para sus discípulos, número expresaba número racional positivo. A todo lo físico o espiritual, los pitagóricos le asignaban un número y una forma.*

*Los pitagóricos partían de la idea de que la razón entre las longitudes de dos segmentos cualesquiera es siempre un número racional, lo cual resumían con el planteamiento de que:* todos los segmentos son conmensurables; *es decir, que se puede encontrar una unidad común a ambas longitudes, siendo estas múltiplos de dicha unidad; para ellos su existencia estaba garantizada siempre.*

Figura 1.10

*Por ejemplo:*

*Los segmentos de longitud 6,0 cm y 12 cm tienen como unidad común el segmento de longitud 6,0 cm.*

*Los segmentos de longitud 24 dm y 60 dm tienen como unidad común el segmento de longitud 12 dm.*

*Irónicamente, se supone que son los propios pitagóricos, en la figura de Hipaso de Metaponte (fig. 1.10), quienes* *descubren los inconmensurables (entre 450 a.n.e. y 375 a.n.e.) y con estos, números que no eran racionales.*

*No se sabe con exactitud en qué objeto matemático se realizó este descubrimiento, que fue el más difícil para Pitágoras y los geómetras griegos; es este hallazgo el que desmoronará toda su teoría. Cuenta la leyenda que a Hipaso le costó la vida, sus disgustados compañeros lo lanzaron al mar, por hacer público tan demoledor descubrimiento, lo cual violaba las estrictas leyes de esta hermandad, y como si fuera poca su deslealtad, se valió de cierto recurso que en nuestras pinceladas históricas conocerás.*

*Hipaso descubrió que no todos los segmentos son conmensurables, lo dio a conocer y contribuyó, quizás sin quererlo, a la destrucción de la famosa asociación; pero dejó un legado al desconocido mundo de los números. Ya verás por qué.*[11]

Por eso debes saber que:

| |
|---|
| Los números racionales y los números irracionales forman el **conjunto de los números reales,** que se denota por $\mathbb{R}$. |

Al retomar los estudiado sobre Teoría de Conjuntos, tenemos que:

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{I} \subset R$, $\mathbb{Q} \cup I = \mathbb{R}$ y $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \phi$

El diagrama de Venn de la figura 1.11 muestra la relación entre los conjuntos numéricos estudiados.

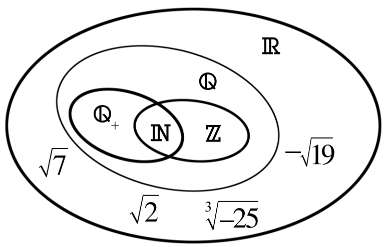



Figura 1.11

Ya sabemos que el número para el que tiene sentido la igualdad $a^3 = -12$, es el número irracional $\sqrt[3]{-12}$.

Para responder la segunda propuesta, es necesario conocer que:

A los números irracionales se les puede hacer corresponder un punto en la recta numérica.

Como verás a continuación, al número irracional $\sqrt{2}$ se le hace corresponder un punto en la recta numérica; para ello transportaremos sobre una recta numérica la

[11] Herbert W. Turnbull: *Grandes matemáticos,* Ed. Científico-Técnica, La Habana, 1984.

longitud de la hipotenusa $x = \sqrt{2}$ u de un triángulo rectángulo e isósceles, tal como se ilustra en la figura 1.12.

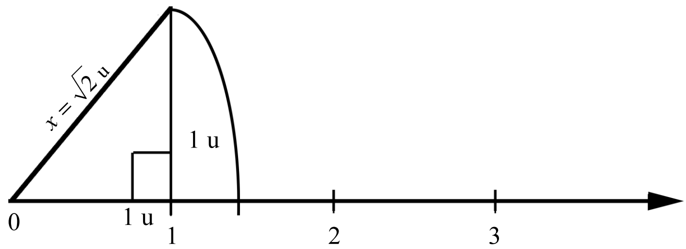


Figura 1.12

*El filósofo Aristóteles sugiere que la demostración de la irracionalidad de* $\sqrt{2}$ *se realizó al asumir como hipótesis que es un número racional y llegar a una contradicción. Un número es par e impar a la vez. Esta es una inteligente manera de probar proposiciones matemáticas verdaderas.*[12] *Cuando se llegó a la conclusión de que este número no se podía expresar como cociente de dos números enteros, se quedaron espantados y les pareció tan contrario a toda lógica que lo llamaron algo así como: improcedente, incierto, o sea, irracional.*

*Los babilonios utilizaron la relación pitagórica en triángulos con hipotenusa irracional, y sus aproximaciones a las raíces cuadradas pueden considerarse pasos hacia el descubrimiento que nunca hicieron. En una tablilla que se conserva en la Universidad de Yale aparece la aproximación (muy parecida al valor que hoy conocemos):* [12]

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \approx 1{,}414\,213$$

*Los griegos encontraron la forma de descubrir una expresión para los números irracionales; aunque no tenían un sistema de numeración decimal, emprendieron esa colosal tarea y nos regalaron un maravilloso ejemplo de aritmética antigua.*

Por lo tanto:

| Sobre la recta numérica existen puntos a los cuales se les puede hacer corresponder números irracionales. A estos puntos los denominaremos **puntos irracionales.** |
|---|

*Ya sabemos que no se conoce con certeza cómo tuvo lugar el descubrimiento de los irracionales, aunque pueden citarse dos primitivos ejemplos:*

1. *Si un segmento es el lado de un cuadrado y el otro es una de las diagonales, no tiene sentido la búsqueda de la medida común, eso bien lo sabes.*

[11] Herbert W. Turnbull: ob. cit.
[12] Carlos Sánchez Fernández y Rita Roldán Inguanzo: ob. cit, p. 14.

2. *Si el segmento* a *es dividido en dos partes* b *y* c *(fig. 1.13) de forma tal que* a : b = b : c*, aparece que:* $a{:}b = (\sqrt{5}+1):2$*, y ya sabes que esa no puede ser la medida común, pues* $\sqrt{5}$ *es un irracional.*

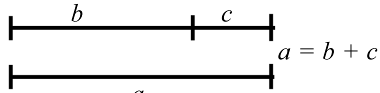


Figura 1.13

*Dicen que Hipaso descubrió lo inconmensurable al ver las longitudes de* a, b *y* c *en las tres partes en que quedan divididas las cinco líneas del pentagrama (fig. 1.14), símbolo de la orden de los pitagóricos.*[13]


Figura 1.14

*Este irracional:* $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$*, se llama número de oro, por eso, los números* a *y* b *de la segunda pincelada están en proporción o razón áurea. Desde principios del siglo* XX *se denota con la letra griega* $\phi$ *(Fi) en homenaje al escultor griego Fidias (siglo* V *a.n.e.), quien la usó sistemáticamente en sus obras; una evidente muestra de ello lo tenemos en el hecho de que es un rectángulo áureo el frente del Partenón, obra majestuosa ideada y supervisada por ese creativo escultor.*

*El dorado número es sinónimo de belleza, perfección, equilibrio y valor estético máximo; por eso muchas construcciones antiguas y modernas siguen cánones áureos.*[14]

¡Piensa un momento en la manera de construir un rectángulo de dimensiones $(\sqrt{5}+1)$ cm y 2 cm!

¡No es difícil! ¡Manos a la obra!

La longitud del lado del cubo (cuya área total es 12 cm$^2$) es $\sqrt{2}$ cm y esa, ya sabes cómo ubicarla en la recta numérica.

¡El conjunto de los números reales es denso! Di el porqué.

En disímiles ocasiones has operado, sin saberlo, con números reales, para resolver problemas propios de la asignatura y de la práctica, para ello, los has aproximado, siguiendo las reglas correspondientes y has utilizado todo lo estudiado sobre los números racionales, así seguirás trabajando en octavo grado.

Los conjuntos numéricos con las operaciones y relaciones definidos en ellos es lo que se conoce como **dominios numéricos.**

Los irracionales que has estudiado en este epígrafe, aparecen por la extracción de raíces cuadradas y cúbicas, y son ejemplos de irracionales algebraicos. Pero debes saber que estos números no constituyen un dominio numérico, porque no cumplen la Ley de composición interna; verás, en el ejemplo siguiente, por qué:

$\sqrt{2} \in \mathbb{I}; \sqrt{8} \in \mathbb{I}$, pero $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4 \notin \mathbb{I}$

[13] Herbert W. Turnbull: ob. cit.

[14] Carlos Sánchez Fernández y Rita Roldán Inguanzo: ob. cit., p. 15.

Existe otro tipo de expresiones decimales infinitas no periódicas, se les llama números trascendentes, uno de los más conocidos de esta excepcional familia lo conocerás en el capítulo 2.

Los números reales harán más atractivo tu quehacer matemático y están muy cerca de nosotros, ¡más de lo que te imaginas!

Figura 1.15

*George Cantor (1845-1908) (fig. 1.15) y Richard Dedekind (1831-1916) (fig. 1.16), matemáticos alemanes, con sus diferentes maneras de introducir el conjunto de los números reales, son los verdaderos responsables de que los números irracionales adquirieran el permiso de residencia en el reino de los números.*[15]

Figura 1.16

A continuación, una colección de ejercicios para que apliques todo lo aprendido, si la disfrutas, entonces se cumplió nuestro propósito.

## *Ejercicios*

1. Rodrigo dice que un número irracional es un número que no puede ser expresado como una fracción $\frac{x}{y}$, donde $x, y \in \mathbb{Z}$, con $y \neq 0$. ¿Tendrá razón? ¿Por qué?

2. Coloca en el espacio en blanco, según convenga: $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$, $\cap$, $\cup$.

   a) $\mathbb{Z}$ ___ $\mathbb{R}$ b) $\sqrt{15}$ ___ $\mathbb{N}$ c) $\mathbb{R}$ ___ $\mathbb{Q}$ d) $\sqrt{15}$ ___ $\mathbb{R}$

   e) $\mathbb{N}$ ___ $\mathbb{R}$ f) $-3,2\overline{17}$ ___ $\mathbb{I}$ g) $2,\overline{0}$ ___ $\mathbb{N}$ h) $\sqrt[3]{19}$ ___ $\mathbb{Q}$

   i) $\mathbb{Q}_+$ ___ $\mathbb{R}$ j) 6,2830… ___ $\mathbb{Q}_+$ k) $\mathbb{R}$ ___ $\mathbb{I} = \mathbb{I}$ l) $\mathbb{Q}$ ___ $\mathbb{R} = \mathbb{Q}$

   m) $\sqrt{-25}$ ___ $\mathbb{R}$ n) $\sqrt[3]{-8}$ ___ $\mathbb{Z}$ ñ) $\left\{\frac{1}{2}; -0,\overline{19}; 0\right\}$ ___ $\mathbb{I} = \phi$

3. Clasifica las proposiciones siguientes en verdaderas o falsas. Escribe V o F. De las que consideres falsas, justifica por qué lo son.

   a) ___ $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ b) ___ $\mathbb{I} \in \mathbb{R}$ c) ___ $F = \left\{\sqrt{2}; \sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{-9}\right\} \in \mathbb{R}$

[15] Ibídem, p. 14.

d) ___ $\sqrt{145} \in \mathbb{I}$ e) ___ $\frac{\sqrt[3]{7}}{7} \not\subset \mathbb{I}$ f) ___ $\frac{22}{7} \notin \mathbb{R}$ g) ___ $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \{ \quad \}$

h) ___ Cualquier expresión decimal infinita es un número racional.

i) ___ $1{,}414\,2\ldots \in \mathbb{Q}_+$ j) ___ $\{1{,}73\} \subset \mathbb{I}$ k) ___ $2{,}71\ldots \in \mathbb{R}$

l) ___ Si la raíz cuadrada aritmética de un número racional, es irracional, la raíz cúbica también lo es.

m) ___ Si *r* es un número real, entonces *r* es racional o es irracional.

n) ___ $\mathbb{I} \in \mathbb{R}$

ñ) ___ El cubo de un número irracional nunca es un número racional.

o) ___ El cuadrado de un número irracional puede ser un número racional.

p) ___ La suma algebraica de dos números irracionales, siempre es un número irracional.

q) ___ El conjunto de los reales es denso.

4. Indica el dominio numérico más restringido al cual pertenece cada uno de los números siguientes:

a) $-0{,}37$ ___ b) 89 ___ c) $4\frac{3}{7}$ ___

d) $-2{,}44$ ___ e) $-91$ ___ f) $\frac{\sqrt{21}}{5}$ ___

g) $2{,}71\ldots$ ___ h) $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$ ___ i) $1{,}1\overline{12}$ ___

5. ¿Qué harías para ubicar en la recta numérica el número real $-\sqrt{17}$?
6. La diferencia de los conjuntos *A* y *B* es el conjunto de elementos que pertenecen a *A*, pero no a *B*. Se denota la diferencia de *A* y *B* por $A \setminus B$ $(A - B)$, que se lee "*A* diferencia *B*" o simplemente "*A* menos *B*".
   Halla $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; $\mathbb{R} \setminus \mathbb{I}$; $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{I}$; $\mathbb{I} \setminus \mathbb{Q}$.
7. En el siglo xx se han estudiado otros números irracionales que por la forma que se definen constituyen una generalización del número de oro. Son los llamados *números metálicos* que son determinados por la fórmula $\delta_n = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}$.[16] Verifica que para $n = 1$, obtienes el número áureo y halla el número de plata y el de bronce sustituyendo por $n = 2$ y $n = 3$ respectivamente en la fórmula dada. ¡Auxíliate de una calculadora científica!
8. Gilberto y Estefanía participan en el concurso "Unámonos a favor del PAURA" con la caricatura de la figura 1.17. Emite tu criterio sobre ella.

[16] Ibídem


Figura 1.17

9. Elabora un texto que responda al contenido de esta cuarteta; debe tener como mínimo 150 palabras y puedes utilizar la bibliografía de los aspectos históricos dados.

*Al de Metaponte*

Pitágoras en su escuela,
una verdad defendía,
pero un día el sabio Hipaso,
la verdad destruiría.

10. Si tuvieras la posibilidad de tener un cubo de 3,0 $cm^3$ de volumen, ¿qué harías para representar en la recta numérica, $\sqrt[3]{3}$ ?

11.* Busca tríos de ($l$, $a$, $h$) valores de números racionales para las dimensiones del ortoedro (fig. 1.18), de forma tal, que el segmento $\overline{PQ}$, en centímetro, tenga:

a) Un número racional de centímetros.
b) Un número irracional de centímetros.

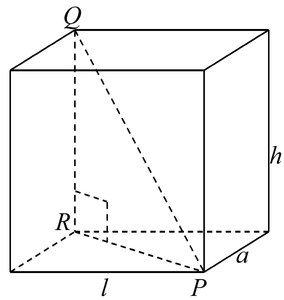



Figura 1.18

## 1.3 Estadística descriptiva

En séptimo grado estudiaste aspectos relacionados con el *procesamiento de datos,* conociste sobre sus orígenes en las civilizaciones antiguas, sobre su historia en diferentes regiones del mundo, y cómo ha ido evolucionando hasta nuestros días.

Te propongo continuar ampliando tus conocimientos acerca de este tema y los aspectos relacionados con su historia.

Sabías que en el siglo v a.n.e., en China, el rey Yao llevó a cabo un censo muy importante con el propósito de determinar la cantidad de habitantes de su país, y que en Roma, el emperador Augusto ordenó que se contaran todos los navíos, armas y soldados del imperio romano, además, que este publicó un edicto para que se hiciera un censo de todos los habitantes romanos.

También se recoge en la historia que los hebreos, los egipcios, los sirios, los persas y los griegos contabilizaban los nacimientos, las reparticiones de tierras y la cantidad de pobladores, entre otras actividades, pero que fue el gran imperio romano el primero que con un interés gubernamental, recopiló numerosos datos sobre la población, las superficies y las rentas en todos los territorios bajo su control.

Se conoce también que en la Europa de la Edad Media se realizaron, bajo la orientación de diferentes reinados, censos exhaustivos de población, estudios relacionados con la actividad de la iglesia e innumerables recopilaciones de datos con fines económicos, sociales y militares y que alrededor del año 1086, después de la conquista de Inglaterra por los normandos, en este país se realizó un censo cuyos resultados fueron publicados.

Los hechos anteriores demuestran que desde los tiempos más remotos, los pueblos sintieron la necesidad de contar sus pobladores y sus recursos para organizar su vida.

Con el transcurso de los siglos, la organización de los pueblos y sus modos de contar se fueron perfeccionando. Los pueblos se convirtieron en estados y nació una parte importante de las matemáticas, la *estadística,* que se ocupó, principalmente, de enumerar y describir las situaciones de interés para el Estado.

El nombre *estadística* se derivó del latín *status* en sus dos sentidos:

- el estado en cuanto a la situación geográfica,
- y el estado en cuanto a entidad política.

*En la actualidad la estadística está muy difundida; su uso es inevitable y se manifiesta en la recopilación, procesamiento y análisis de la información relacionada con datos económicos, políticos, sociales, biológicos, geográficos, psicológicos, físicos, químicos, en las investigaciones, etc.; procesos estos que se han ido perfeccionando con el desarrollo de la informática y las posibilidades crecientes de comunicación, a la vez que se dispone de eficaces sistemas, tabuladores electrónicos y asistentes matemáticos para el procesamiento estadístico.*

En séptimo grado recordaste algunos conceptos relacionados con el procesamiento de datos que aprendiste en la primaria, además, ampliaste tus conocimientos sobre el tema y las formas de proceder que te han permitido hacer la interpretación de datos representados en tablas y gráficos, y dar respuesta a situaciones de la vida que requieren de la realización de análisis y valoraciones. Te propongo continuar ampliando tus conocimientos sobre el tema y aprender otros nuevos relacionados con la estadística.

¿Sabes qué es la estadística?

La *estadística* es la ciencia que provee de métodos que permiten recolectar, organizar, resumir, presentar y analizar datos relativos a un conjunto de individuos u observaciones, con la finalidad de extraer conclusiones válidas y tomar decisiones lógicas basadas en los análisis.

La estadística de cualquier naturaleza se caracteriza por:

- No estudiar hechos aislados, como la edad de una persona, el precio de un artículo en un día determinado, las calificaciones de un estudiante en un examen, entre otros.
- Trabajar con datos relativos a conjuntos de datos, individuos u observaciones (de personas, objetos, hechos, etc.) los más numerosos posibles y ocurridos en diferentes instantes de tiempo.

*Ejemplo 1:*

Al estudiar:

- La calidad de las piezas producidas por una fábrica durante un año de trabajo.
- Los índices de natalidad de un país durante los diez últimos años.
- Las características personales de los pobladores de una determinada región de un país.
- La preferencia de los jóvenes por la práctica de deportes.
- La temperatura promedio en los meses de verano en una zona determinada de un país.
- La frecuencia con que una parte de la población asiste a los teatros.

Si analizas los ejemplos anteriores podrás darte cuenta que las características del estudio que ha de realizarse en cada caso, son diferentes.

¿Procederías tú de la misma manera al hacer el estudio de la calidad de las piezas producidas por una fábrica durante un año de trabajo y de los índices de natalidad de un país durante los diez últimos años?

Te invito a que expliques el procedimiento utilizado en cada caso y determines las semejanzas y diferencias que caracterizan cada uno de estos procedimientos.

Seguramente te diste cuenta que en el primer caso es prácticamente imposible analizar la calidad de todas las piezas producidas; por lo que es necesario seleccionar cierta cantidad de estas piezas para su análisis, y a partir de los resultados obtenidos, hacer generalizaciones para arribar a conclusiones.

Sin embargo para hacer el estudio sobre los índices de natalidad de un país durante los diez últimos años, es necesario realizar el estudio a partir de considerar el comportamiento durante ese período de tiempo año por año, sin derivar conclusiones en un período diferente a esos diez años. En este caso en que se realizan estudios de hechos o fenómenos con el objetivo de describir o caracterizar su comportamiento y poner de manifiesto los resultados del estudio realizado estás aplicando recursos propios de la estadística descriptiva.

*Definición:*

Se entiende por **estadística descriptiva** la parte de la estadística que se ocupa de recolectar, organizar, resumir, presentar y analizar datos relativos a un conjunto de individuos u observaciones con el objetivo de describirlos o caracterizarlos, para poner de manifiesto, de forma gráfica o analítica, sus propiedades.

La estadística descriptiva, estudia una población a partir de considerar todos los elementos que la integran, sin derivar conclusiones sobre un grupo mayor que esta.

## *Ejercicio*

1. Identifica cuáles de las siguientes proposiciones corresponden a estudios realizados dentro de la estadística descriptiva y fundamenta en cada caso el porqué corresponde o no.
   a) La calidad de la producción de huevos de una granja avícola en un día.
   b) La nota promedio de los estudiantes de un grupo de octavo grado en la asignatura Matemática es superior a 85 puntos.
   c) La cantidad de países que votan a favor por poner fin al bloqueo contra Cuba aumentó en el período comprendido del año 1990 al 2013.
   d) La preferencia por los programas musicales de un estudiante de Secundaria Básica.
   e) La cantidad de lluvia caída como promedio en La Habana durante los 12 meses del año 2012 fue de 185 mL de agua.

## 1.3.1 Conceptos básicos

Seguramente recordarás que en séptimo grado realizaste trabajos que te exigían del estudio de hechos y fenómenos en que aplicabas el procesamiento de datos y en tu libro de texto al inicio de la temática “El procesamiento de datos” se te propuso una tarea como la siguiente:

**¡!** Lee cuidadosamente la siguiente situación y te invito a pensar cómo resolverías la problemática planteada:

En la asamblea de rendición de cuentas de una circunscripción, entre los planteamientos que se hicieron, los electores manifestaron opiniones y solicitudes sobre la atención médica que reciben del consultorio. ¿Cómo realizarías el estudio que te permita hacer una valoración sobre los criterios manifestados por los electores en esa asamblea?

¿La recuerdas?

Seguramente recordarás que para hacer el estudio primeramente hiciste el *análisis de la situación inicial* objeto de estudio lo que te llevó a la necesidad de la *obtención* *de los datos* necesarios para luego hacer la *simplificación de los datos* recopilados y a partir de su análisis *comunicar los resultados* como fase final del proceso.

Además, recordarás que al finalizar el estudio del tema, para darle respuesta a la problemática planteada sobre las opiniones dadas por los electores en la asamblea de rendición de cuentas, visitaste el consultorio del médico de la familia y realizaste un conjunto de acciones que te ayudaron a hacer las valoraciones sobre los criterios manifestados por los electores, entre las que se encontraban hacerle una entrevista al médico o a la enfermera del consultorio relacionada con:

- El total de personas que pertenecen al consultorio.
- La cantidad de personas por grupos de edades.
- La cantidad de consultas diarias realizadas durante la última quincena.
- La cantidad de mujeres embarazadas, entre otras.

También, entrevistaste a personas de la localidad que pertenecían al consultorio para conocer su criterio sobre la atención que recibían en este.

¿Te fue posible entrevistarte con todas las personas que pertenecían al consultorio? ¿Qué hiciste?

Seguramente, seleccionaste un grupo de personas para hacerles la entrevista.

En este caso, desde la estadística se identifican dos conceptos muy importantes, el de población y el de muestra; como *población:* el total de personas de la circunscripción que son atendidas en el consultorio y como *muestra:* la cantidad de personas entrevistadas.

*Definición:*
*Ejemplo 1:*

- Se entiende por **población** el conjunto de individuos (objetos, sucesos o procesos) que poseen entre sus características una común y que va hacer objeto de estudio.
- Se entiende por **muestra** cualquier subconjunto de una población, o sea, es la parte de la población que se estudia.

  Este subconjunto tiene que ser representativo de la población.

  Una muestra es representativa no por su tamaño, sino porque realmente representa a todas las características de la población.

En una fábrica de jabones se producen 30 400 unidades diariamente. Para efectuar un control de calidad se analizan 100 unidades de la producción registrada en un día.

Población: la producción diaria de jabones que en este caso es de 30 400 unidades.

Muestra: unidades seleccionadas para hacerle el control que en este caso son 100; donde 100 es el tamaño de la muestra.

## *Ejercicio*

2. Identifica la población y la muestra en cada caso:
   a) Del total de estudiantes de octavo grado de una escuela secundaria básica, se seleccionaron 40 para hacer un estudio sobre sus preferencias en materia de deportes.
   b) En una fábrica de bombillos incandescentes se producen 12 100 unidades diariamente. Para efectuar un control de calidad de estos, se analizan 120 unidades de la producción registrada en un día.
   c) En las viviendas de un consejo popular se realiza un estudio del consumo eléctrico durante un mes con el objetivo de reducirlo, para ello se realizan controles al reloj tres veces por semana al 20 % del total de las viviendas.
   d) En agosto ingresaron en un hospital 540 pacientes por diferentes motivos, 54 de estos fueron seleccionados para hacer un estudio sobre el colesterol en sangre.
   e) Una prueba hecha en Pensilvania por científicos pertenecientes a la Escuela de Medicina de la Universidad de esta localidad a 200 personas que practican el mal hábito de fumar, demostró que el 80 % concentró su atención por mucho tiempo en imágenes de enfermedades, resultado de esa adicción.[17]

Al estudiar distintos hechos o fenómenos seguramente te has dado cuenta que están relacionados con características que tienen los elementos (individuos) de una población, las que son de diferentes tipos y toman valores numéricos o no.

Por ejemplo, al hacer el estudio del sexo de un grupo de personas, se está analizando como característica que sean masculinos o femeninos; de igual manera al hacer el estudio del comportamiento de las precipitaciones en una región de un país en un período de tiempo determinado, se está estudiando como característica la cantidad de lluvia caída durante ese período.

A estas características que se estudian en los elementos (individuos) de una población se les denomina *variable estadística.*

*Definición:*

Se entiende por **variable estadística** cualquier característica o propiedad de los miembros de una población susceptible de tomar determinados valores mediante un procedimiento de medición, de modo que dichos valores pueden ser clasificados de forma exhaustiva en un cierto número de categorías posibles.

Por ejemplo, son variables estadísticas las siguientes:

- La profesión de las personas (profesor, médico, mecánico, etcétera).
- La cantidad de estudiantes de un grupo o de una escuela (15, 30, 230, 400,...).

[17] Semanario *Orbe,* 23 al 29 de junio de 2012.

- El color de los ojos de un grupo de personas (verdes, azules, pardos).
- El promedio de la cantidad de lluvia caída en una determinada zona de un país durante los 12 meses del año (cualquier valor real no negativo).
- El número de habitantes en determinadas regiones de un país (35 550; 150 800; 10 835 500; 150 200 100;…).
- El rendimiento académico de un grupo de estudiantes de una escuela (bajo, medio, alto).
- La magnitud de los terremotos en la escala de Richter (cualquier valor real mayor que cero) ocurridos en los últimos 10 años en el continente asiático.

Si observas con atención las características de las variables estadísticas descritas en el ejemplo anterior, podrás darte cuenta que en algunas de ellas son semejantes las características de los valores que pueden tomar y que en otras son diferentes. De esto se infiere que no todas las variables estadísticas son del mismo tipo.

Por lo general, se clasifican en:

- Cualitativas
- Cuantitativas

*Definición:*

| |
|---|
| Se entiende por **variable estadística cualitativa** a aquellas que se refieren a características o atributos que expresan una cualidad que no puede tomar valores numéricos. |

## *Ejercicios*

3. Selecciona de las variables estadísticas dadas anteriormente las que consideres que son variables cualitativas y justifica en cada caso por qué lo son.
4. Escribe en tu cuaderno otros ejemplos de variables estadísticas cualitativas.

Seguramente te diste cuenta que no todas las que analizaste tenían las características, que te permitieron hacer la selección. Las otras no seleccionadas reciben el nombre de variables estadísticas cuantitativas.

*Definición:*

| |
|---|
| Se entiende por **variable estadística cuantitativa** aquella que se refiere a características o atributos que expresan una cantidad o cantidad de magnitud y, por tanto, toma valores numéricos. |

## *Ejercicios*

5. Escribe en tu cuaderno, de las variables estadísticas dadas anteriormente, las que sean variables estadísticas cuantitativas y justifica en cada caso por qué lo son.

6. Pon otros ejemplos de variables estadísticas cuantitativas.

Si analizas las características de las variables cuantitativas seleccionadas podrás darte cuenta que no todas tienen las mismas características en cuanto a los valores que pueden tomar las variables.

En este grado estudiarás fundamentalmente hechos o fenómenos en que la variable estadística que es objeto de estudio sea clasificada como variable *discreta.*

*Definición:*

Se entiende por **variable estadística discreta** cuando solo pueden tomar un número finito o a lo sumo numerable de valores que suelen coincidir con números enteros.

En el ejemplo dado, las variables estadísticas que tienen esta característica son:

- La cantidad de estudiantes de un grupo o de una escuela (15, 30, 230, 400,…).
- El número de habitantes en determinadas regiones de un país (35 550; 150 800; 10 835 500; 150 200 100;…)

## *Ejercicios*

7. Analiza y escribe en la línea dada si estás de acuerdo o no con las proposiciones siguientes, si no estás de acuerdo, fundamenta tu respuesta.

   a) ___ Es cierto que la variable estadística edad es cuantitativa.
   b) ___ No es cierto que la cantidad de estudiantes que asisten a una escuela en la sesión de la mañana es una variable cuantitativa discreta.
   c) ___ La variable cantidad de juegos ganados y perdidos por un equipo de béisbol cubano en las últimas cuatro series nacionales es una variable cualitativa.
   d) ___ Es una variable cualitativa la preferencia por las carreras pedagógicas de los estudiantes de noveno grado de un municipio.
   e) ___ La efectividad de un medicamento en el tratamiento de una determinada enfermedad a un grupo de individuos es una variable cualitativa.
   f) ___ Es cierto que la calidad de las clases que imparten los monitores de Matemática de una escuela es una variable cuantitativa.

8. Escribe en tu cuaderno otros ejemplos de variables estadísticas cuantitativas discretas y fundamenta por qué lo son.
9. Lee detenidamente la situación, analiza y responde las preguntas que se te hacen a continuación:

   En una granja avícola que cuenta con 25 trabajadores, se recogen aproximadamente 6 000 huevos diariamente y se quiere hacer un estudio de la eficiencia de la granja durante el primer trimestre del año basado en los índices siguientes:

   - Calidad de la producción diaria de huevos durante el trimestre.

- Promedio de la cantidad de huevos que ponen diariamente las gallinas durante el trimestre.
- Nivel cultural de los trabajadores.
- Cantidad de ausencias de cada trabajador durante el trimestre.
- Organización de los trabajadores por turnos de trabajo.

a) ¿Cómo determinarías la calidad de la producción diaria de huevos durante el trimestre?
b) Identifica la población en ese caso.
c) ¿Cuál sería para ti la muestra?
d) Completa la tabla 1.1 identificando de cada variable estadística, el tipo de variable y los valores que puede tomar cada variable.

Tabla 1.1

| **Variable** | **Tipo de variable** | **Valores de la variable** |
|---|---|---|
| Calidad de la producción diaria de huevos durante el trimestre | | |
| Promedio de la cantidad de huevos diarios que ponen las gallinas en el trimestre | | |
| Nivel cultural de los trabajadores | | |
| Cantidad de ausencias de cada trabajador durante el trimestre | | |
| Organización de los trabajadores por turnos de trabajo | | |

e) Investiga cuáles son las variables que se analizan para determinar la calidad de la producción de huevos en una granja avícola y los criterios para seleccionar la muestra a la cual se le aplicarán los parámetros de calidad.

10. Lee las informaciones siguientes y responde.

10.1. En los centros universitarios de Wisconsin y Florida fue detectado un virus de la obesidad. El estudio fue realizado con 154 obesos.[18]

a) ¿A qué tipo de variable corresponde?
b) ¿Cuál es la población?
c) ¿Cuál es la muestra seleccionada para hacer ese estudio?
d) Localiza en el mapa de América del Norte, ambos estados e investiga su población y principales recursos naturales.

10.2. Cuba se sumó a los países que llevan a cabo investigaciones en gemelos con el objetivo de elevar la calidad de vida de este grupo poblacional. El universo inicial asciende a 4 457 gemelos hasta la fecha.[19]

[18] Órgano de prensa *Juventud Rebelde,* 24 de agosto de 2006.
[19] Órgano de prensa *Juventud Rebelde,* 19 de marzo de 2006.

a) ¿La cantidad de gemelos referida en el texto corresponde a la población o a la muestra? Justifica tu respuesta.
b) Investiga en tu consultorio del médico de la familia la cantidad de partos gemelares de los últimos tres años.
c) Consulta con tu profesor de ciencias naturales, las causas biológicas que propician este tipo de embarazo desde el punto de vista genético.

## 1.3.2 Distribución de frecuencias

Recuerda que en séptimo grado estudiaste el significado de distribución de frecuencias, su clasificación, además, aprendiste los conceptos de frecuencia absoluta y relativa así como sus características y el procedimiento para construir tablas de frecuencia.

Te invito a que estudies este contenido por el libro de texto de séptimo grado, hagas un resumen escrito de los principales conceptos y resuelvas los ejercicios siguientes:

### *Ejercicios*

11. Di cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Escribe V o F en la línea dada y de las que sean falsas justifica por qué lo son.

    a) ___ Las distribuciones de frecuencia se clasifican en numéricas y categóricas.
    b) ___ La frecuencia absoluta de un dato es el cociente del número de veces que se repite el dato por la cantidad total de estos.
    c) ___ La suma de las frecuencias absolutas coincide con el número de veces que aparece este dato en la población.
    d) ___ La frecuencia relativa de un dato es el número de veces que aparece repetido este dato.
    e) ___ La suma de las frecuencias relativas es igual a la cantidad total de datos.
    f) ___ La suma de las frecuencias relativas es igual a la unidad cuando se expresa en porcentaje.
    g) ___ Las distribuciones de frecuencia se confeccionan con el propósito de condensar grandes grupos de datos y mostrarlo de una manera fácil de interpretar.

12. Di en qué casos la problemática planteada como objeto de estudio exige de una distribución de frecuencia numérica o categórica. Escríbelo en la línea dada.

    a) El estudio que realiza un director del rendimiento académico de los estudiantes de un grupo. ____________________
    b) El estudio de la cantidad de estudiantes que asisten a los concursos de conocimientos y habilidades en un municipio. ___________________
    c) El estudio de la calidad de los helados que produce la fábrica de helados Coppelia. _____________________

d) El estudio de la cantidad de puntos anotados por un equipo de baloncesto, en cada uno de los juegos celebrados en un torneo. _________________
e) El estudio del nivel cultural de las personas que viven en tu cuadra de acuerdo al título académico que poseen. ________________
f) El estudio de la estatura promedio de los integrantes de los equipos de voleibol que participan en un torneo. ________________

13. Un estudiante de tu grupo desea hacer un estudio de la cantidad de hermanos que tienen cada uno de sus compañeros de grupo. Para esto reparte a sus compañeros una hoja para que escriban la cantidad de hermanos que tiene cada uno de ellos. Una vez recogida la hoja de cada uno de sus compañeros, anota en su libreta los resultados siguientes:

2 0 0 1 2 5 2 2 4 4 1 0 1 2 2 2 3 1 1 0 5 2 2 3 0 4 6 2 1 4

a) Construye una tabla de frecuencia absoluta y relativa.
b) Describe los pasos que seguiste para construir la tabla.

14. La tabla 1.2 muestra información sobre la trayectoria del deportista cubano Javier Sotomayor (fig. 1.19) el ser humano que más ha saltado con sus propios pies.[20]

Figura 1.19

a) ¿Qué acciones de la construcción de una tabla de frecuencia se muestran en esta tabla?
b) Completa la tabla 1.2 determinando la frecuencia absoluta y la relativa (decimal y porcentual) de cada salto.
c) ¿Cuál es el salto que realizó con más frecuencia?
d) ¿Cuál es la altura promedio de los saltos realizados?

[20] Juan Velázquez Videaux: "Mis estadísticas y las otras", en *Sotomayor el Saltanubes,* Editora Política, La Habana, 1997, pp. 103-111.

e) Investiga sobre el ser humano que más ha saltado con sus propios pies, en el momento en que realizas este ejercicio.

Tabla 1.2

| Historia de un recordista | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Salto de altura (m)** | **Conteo** | **Frecuencia absoluta** | **Frecuencia relativa decimal** | **Frecuencia relativa porcentual** |
| 2,30 | 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 \| | | | |
| 2,31 | 卌 卌 卌 卌 \| | | | |
| 2,32 | 卌 卌 \|\|\| | | | |
| 2,33 | 卌 卌 \|\|\| | | | |
| 2,34 | 卌 卌 卌 \|\|\| | | | |
| 2,35 | 卌 卌 卌 卌 \| | | | |
| 2,36 | 卌 卌 卌 \|\| | | | |
| 2,37 | 卌 卌 卌 | | | |
| 2,38 | 卌 \|\| | | | |
| 2,40 | 卌 卌 \|\|\| | | | |

15. La lista siguiente muestra la cantidad de flores que tenían los ramos vendidos a las personas, el Día de las Madres, en una florería.

24 6 12 18 24 12 10 18 24 6 12 10 12 18 12
10 10 6 10 10 12 12 24 18 12 10 6 10 18 12

a) Identifica la variable estadística objeto de estudio. Clasifícala.
b) Clasifica el tipo de distribución de frecuencia.
c) Organiza la información en una tabla de frecuencias, donde aparezcan la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa (expresada como expresión decimal).
d) ¿Cuál de los tipos de ramos fue el más vendido?
e) ¿Qué tanto por ciento representa la cantidad de ramos que tenían una docena de flores del total de ramos vendidos?
f) Si fueras a representar la distribución de frecuencia en un gráfico, ¿cuál utilizarías? ¿Por qué?

16. La tabla 1.3 muestra la distribución de frecuencias por edades de un grupo de jóvenes que asistieron el fin de semana a una base de campismo. De las proposiciones siguientes señala con una X la que consideres correcta.

Tabla 1.3

| **Edades (años)** | **Cantidad de jóvenes** |
|---|---|
| 13 | 20 |
| 14 | 15 |
| 15 | 30 |
| 16 | 40 |
| 17 | 55 |

a) ___ La variable estadística objeto de estudio es la cantidad de jóvenes que asistieron a la base de campismo.
b) ___ La edad media de los jóvenes que asistieron es de 32 años.
c) ___ La frecuencia relativa correspondiente a la edad de 16 años es el 25 %.
d) ___ La distribución de frecuencia se clasifica como categórica.

17. En una secundaria básica que tiene una matrícula de 500 estudiantes se quiere investigar acerca de la motivación que sienten los estudiantes en las clases por el estudio de las matemáticas; entre otros instrumentos, se aplicó una encuesta en la que; aparece en una de las preguntas: ¿Te sientes motivado en las clases por el estudio de las matemáticas? Para responder la pregunta se dan los ítems siguientes:

Siempre (S) Casi siempre (CS) A veces (AV) Casi nunca (CN) Nunca (N)

Una vez registradas se obtienen las respuestas siguientes:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CS | CN | CS | AV | AV | AV | N | CN | S | S |
| AV | CS | S | CN | CS | S | AV | CN | N | AV |
| CN | AV | AV | S | CS | AV | CN | CN | S | AV |
| AV | AV | CN | S | CN | CN | AV | CN | CS | AV |

a) ¿Cuáles son la población y la muestra?
b) Identifica la variable objeto de estudio. Clasifícala.
c) Construye una tabla de frecuencia absoluta y relativa expresada en tanto por ciento.
d) Clasifica la distribución de frecuencia en correspondencia con la característica de la variable.
e) ¿Cuáles son la categoría más y menos frecuente?
f) ¿Será posible calcular el promedio del conjunto de datos? ¿Por qué?
g) Analiza los resultados obtenidos y da tu valoración en cuanto a la motivación que sienten los estudiantes encuestados por el estudio de la Matemática.
h) ¿Cómo consideras tú que está la motivación por el estudio de la Matemática en tu grupo?

18. En un concurso de conocimientos de habilidades matemáticas, contra reloj, se aplicaron 20 problemas. La tabla 1.4 muestra la frecuencia relativa de la cantidad de problemas resueltos por los 20 concursantes.

Tabla 1.4

| **Problemas resueltos** | **Frecuencia relativa** |
|---|---|
| 20 | $\frac{3}{20}$ |
| 15 | $\frac{7}{20}$ |
| 12 | |
| 10 | $\frac{1}{10}$ |
| 5 | $\frac{3}{20}$ |

a) ¿Cuál es la variable objeto de estudio? Clasifícala.
b) ¿Cuál es la frecuencia absoluta correspondiente a los concursantes que resolvieron 15 problemas. Fundamenta tu respuesta.
c) ¿Cuántos estudiantes resolvieron 12 problemas? Explica cómo pensaste para llegar a la respuesta.
d) Completa la tabla.
e) ¿Qué parte del total de concursantes resolvió menos de 12 problemas?
f) Si para aprobar se necesitaba tener 12 problemas resueltos, ¿qué tanto por ciento de los participantes aprobó?
g) ¿Cuál fue la media de la cantidad de problemas resueltos por los concursantes?

## 1.3.3 Construcción de gráficos (de barras y poligonales)

En séptimo grado resolviste ejercicios y problemas que te exigían del análisis e interpretación de gráficos (de barras, poligonales, pictogramas y circulares o de pastel), aprendiste que una de las formas de presentar la distribución de frecuencia era mediante gráficos los cuales permiten una fácil e inmediata captación visual que te facilita describir inmediatamente las características del fenómeno que es objeto de estudio. Además, estudiaste las características de cada uno de ellos y su utilidad.

Te propongo resolver el ejercicio siguiente.

### *Ejercicio*

19. Enlaza con una línea las características de los gráficos descritas en la columna *A* con la clasificación dada en la columna *B*.

| Columna *A* | Columna *B* |
|---|---|
| a) Consiste en un conjunto de columnas o rectángulos en los cuales cada categoría se representa por una columna. | |
| b) Es muy útil cuando se realiza el análisis de las partes con respecto a un todo. | 1. Pictograma |
| c) Cada figura o símbolo alusivo representa la misma cantidad. | |
| d) Es recomendable para la comparación de datos organizados por categorías. | 2. Gráfico de barra |
| e) Consiste en una gráfica de segmentos en que las categorías aparecen en el eje horizontal y en el vertical, la frecuencia. | 3. Gráfico poligonal |
| f) Es una forma de representar la información en la cual se utilizan figuras o símbolos alusivos al fenómeno objeto de estudio. | 4. Gráfico de pastel |
| g) Es recomendable para el análisis de tendencias de un determinado fenómeno. | |
| h) La altura del rectángulo está dada por la frecuencia que corresponde a la categoría que representa. | |
| i) Consiste en un círculo que está dividido en partes (sectores circulares) y cada parte representa una categoría. | |

En este grado, teniendo en consideración las características estudiadas en séptimo grado, aprenderás a construir los gráficos de barras y los poligonales.

*Ejemplos:*

**Construcción del gráfico de barras**

Construye una gráfica de barras que ilustre los resultados de una encuesta aplicada a los 390 estudiantes de una secundaria básica, con el objetivo de conocer su opinión sobre la transmisión televisiva de la Serie Nacional de Béisbol en el horario de la telenovela, los que se describen en la tabla 1.5 de frecuencia absoluta.

Tabla 1.5

| Categoría | FA |
|---|---|
| A favor | 120 |
| En contra | 180 |
| Indiferentes | 60 |
| No respondieron | 30 |

Para construir una gráfica de barras:

1. Elegimos un sistema de coordenadas en el primer cuadrante (un sistema de coordenadas se construye con dos semirrectas de origen común que son perpendiculares entre sí, el eje horizontal se denota por $x$ (eje de las abscisas) y al eje vertical, por $y$ (eje de las ordenadas)).
2. Situamos sobre el eje de las abscisas las diferentes categorías de la característica medible.
3. Situamos sobre el eje de las ordenadas los valores de las frecuencias absolutas en una escala adecuada.
4. Trazamos barras perpendiculares, todas de igual ancho, cuya altura sea igual al valor de la frecuencia absoluta.
5. Identificamos los ejes en correspondencia con la categoría y la frecuencia absoluta, así como la gráfica con el nombre que describa la variable.

En la gráfica mostrada en la figura 1.20, se puede observar que las cuatro categorías fueron ubicadas en el eje de las abscisas y que la frecuencia absoluta (cantidad de estudiantes que dan su opinión por categorías) fue ubicada en el eje de las ordenadas.

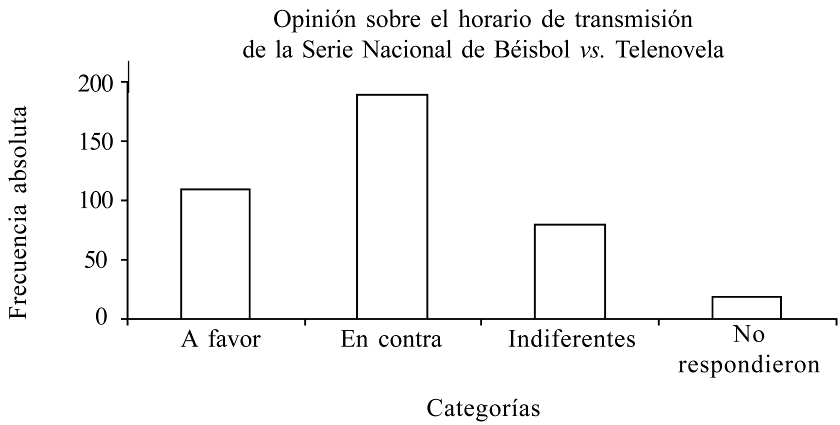



Figura 1.20

Es importante que sepas que la disposición de los ejes puede variar de acuerdo con la posición que se elija para las barras (vertical u horizontal).

## Construcción del gráfico poligonal

Construye una gráfica poligonal que ilustre los índices de mortalidad infantil de Cuba en algunos años del período comprendido de 1964 a 2014, los cuales se describen en la tabla 1.6.[21]

[21] Órgano de prensa *Granma,* 2 de enero de 2014.

Tabla 1.6

| Año | Mortalidad infantil en Cuba (tasa por cada mil nacidos vivos) Algunos años entre 1964-2014 |
|---|---|
| 1965 | 37,9 |
| 1973 | 29,6 |
| 1981 | 18,5 |
| 1989 | 11,1 |
| 1997 | 7,2 |
| 2005 | 6,2 |
| 2013 | 4,2 |

Para construir una gráfica poligonal:

1. Elegimos un sistema de coordenadas en el primer cuadrante.
2. Situamos sobre el eje de las abscisas las diferentes categorías de la característica medible.
3. Situamos sobre el eje de las ordenadas los valores de las frecuencias absolutas.
4. Hacemos corresponder a cada categoría su frecuencia absoluta mediante pares ordenados de la forma ($x$; $y$), donde $x$ representa la categoría, así como $y$ la frecuencia absoluta correspondiente y ploteamos el punto correspondiente en el cuadrante.
5. Unimos con segmentos rectilíneos los puntos representados y queda formada la línea poligonal.
6. Identificamos los ejes en correspondencia con la categoría y frecuencia absoluta, así como la gráfica con el nombre que describa la variable.

Puedes observar en la gráfica de la figura 1.21 que fueron ubicadas en el eje de las abscisas los años que se analizan y en el eje de las ordenadas, la tasa de mortalidad.

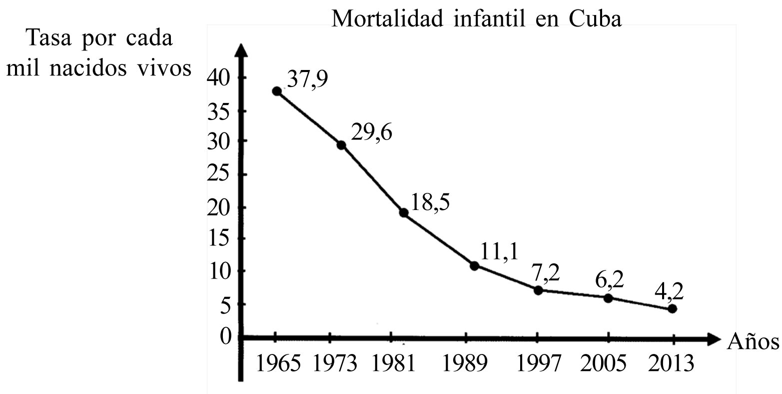



Figura 1.21

## *Ejercicios*

20. En la tabla 1.7 se muestra información sobre las tasas de mortalidad infantil de seis países de Las Américas.[21]

Tabla 1.7

| País | Tasa de Mortalidad |
|---|---|
| Colombia | 15 |
| Cuba | 4,2 |
| Estados Unidos | 6 |
| Haití | 53 |
| México | 13 |
| República Dominicana | 21 |

a) Identifica la variable y clasifícala.
b) Investiga cómo se calcula la tasa de mortalidad infantil.
c) ¿Por qué nuestro país es el que menor tasa de mortalidad tiene? Responde con tres elementos.
d) Construye un gráfico de barra que muestre la información que se brinda en la tabla.

21. La tabla 1.8 corresponde a la cantidad de plazas ofertadas por el Ministerio de Educación Superior para el curso escolar 2013-2014.[22]

Tabla 1.8

| Carreras | Curso diurno | Curso por encuentros |
|---|---|---|
| Pedagógicas | 14 009 | 12 152 |
| Ciencias Médicas | 9 127 | 0 |
| Ciencias Técnicas | 4 385 | 2 715 |
| Económicas | 1 518 | 2 165 |
| Ciencias Sociales y Humanidades | 1 499 | 1 080 |
| Agropecuarias | 1 444 | 1 770 |
| Ciencias Naturales y Matemática | 976 | 90 |
| Cultura Física | 1 816 | 2 641 |
| Arte | 155 | 182 |
| Relaciones Internacionales | 18 | 0 |

a) ¿Cuál es el total de plazas por cada modalidad de curso?
b) ¿De qué carrera se ofertó mayor cantidad de plazas? ¿Por qué?
c) ¿Qué tanto por ciento del total de carreras ofertadas en el curso regular diurno representa las ofertadas a ciencias médicas.

[21] Órgano de prensa *Granma,* 2 de enero de 2014.
[22] Órgano de prensa *Juventud Rebelde,* 29 de mayo de 2013.

d) Ilustra en una misma gráfica la información que se brinda en la tabla de las dos modalidades.
e) Actualiza la información que se brinda en la tabla.

22. En la tabla 1.9 se muestran los datos que se han recopilado como el resultado de medir la temperatura ambiental durante 10 h consecutivas de un día invernal en Chile.

Tabla 1.9

| **Hora (p.m.)** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Temperatura °C** | 5,5 | 5 | 4,5 | 3 | 1 | 0 | –1 | – 0,5 | –2 | –3 |

a) Representa la variación de temperatura en una gráfica poligonal.
b) ¿Cuándo hubo más frío, a las 8:00 p.m. o a las 10:00 p.m.? Fundamenta tu respuesta.
c) ¿Cuántos grados descendió la temperatura desde la 1:00 p.m. hasta las 10:00 p.m.?

23. La tabla 1.10 muestra las temperaturas, en grado Celsius, registradas en una ciudad durante distintas horas del día.

Tabla 1.10

| **Temperatura** | **FA** |
|---|---|
| 38 | 2 |
| 37 | 6 |
| 36 | 10 |
| 35 | 8 |
| 34 | 4 |

Marca con una X la respuesta correcta.

23.1. Se puede afirmar que:

a) ___ La variable objeto de estudio es la ciudad en que se registró la temperatura.
b) ___ La temperatura se registró 5 veces en el día.
c) ___ La frecuencia relativa correspondiente a los 37 °C es 0,2.
d) ___ La temperatura promedio fue 36 °C.

23.2. ¿Qué significado tiene la frecuencia absoluta correspondiente a la temperatura de 38 ºC.

23.3. Construye un gráfico poligonal que represente la información de la tabla 1.10.

24. Únete con un grupo de compañeros de tu aula y crea un equipo de no más de 5 estudiantes para que investiguen en la escuela y en su comunidad: *¿Por qué comienzan a fumar los jóvenes?* Te sugerimos que cada uno de los integrantes del

equipo entreviste a 20 jóvenes y complete la tabla 1.11 en correspondencia con la respuesta que den los jóvenes entrevistados.

Tabla 1.11

| **Motivos**[23] | **Cantidad de estudiantes** |
|---|---|
| *Estímulo y desafío:* rebelión contra los padres o la sociedad, curiosidad, emoción y placer. | |
| *Formación de la propia identidad y necesidad de autoestima:* sentirse bien, parecer más adulto y moderno, creer tener mejor apariencia. | |
| *Pertenecer a un grupo:* necesidad de ser aprobado y aceptado, de evitar desaprobación o rechazo. | |

Seleccionen un responsable del equipo que reúna la información en una tabla de frecuencia absoluta y relativa.
Una vez recogidos los datos

24.1. Completen los espacios en blanco:

a) La variable estadística es: ______________________
b) Se clasifica como: _____________________
c) El motivo más frecuente es: ______________________

24.2. ¿Qué tanto por ciento de los encuestados refiere que es por la necesidad de *Pertenecer a un grupo?* ¿Cuál es tu opinión al respecto?
24.3. Construyan un gráfico que ilustre los resultados anteriores.

**¡!** Lee cuidadosamente las instrucciones siguientes y te invito a que las apliques para la elaboración de los gráficos utilizando el programa *Word,* para ello, se procede de la manera siguiente:

- En la barra de menú seleccionar la opción insertar.
- Seleccionar la opción gráfico.
- Seleccionar el tipo de gráfico.
- Dar clic en aceptar.
- Introducir la matriz de los datos.
- Dar clic en siguiente e introducir los nombres de los ejes.

## *Ejercicios*

25. Haciendo uso del programa *Word* construye:

a) Un gráfico de barras que ilustre en porcentaje los resultados de las pruebas de ingreso de Matemática al Instituto Preuniversitario Vocacional de Ciencias Exactas en tu escuela durante los últimos cinco años.

[23] Plegable del Centro Nacional de Promoción y Educación para la Salud, mayo 2013.

b) Un gráfico poligonal que ilustre en porcentaje el comportamiento de la asistencia de los estudiantes de octavo grado de lunes a viernes de la semana pasada.

Para la realización del ejercicio recopila con anterioridad los datos necesarios que te permitirán resolverlo.

## 1.3.4 Medidas de tendencia central (media, moda y mediana)

Desde la enseñanza primaria conociste los conceptos de media aritmética y moda, los que aplicaste en la resolución de ejercicios y problemas sencillos que te exigían hacer descripciones y análisis del comportamiento de los datos. Luego en séptimo grado, ampliaste tus conocimientos en cuanto a su significado y algunas de las características, ventajas y desventajas de su utilización.

Te invito a que resuelvas los siguientes ejercicios los cuales te permitirán recordar los conceptos de media aritmética y moda, así como sus características para aplicarlos a la resolución de ejercicios y problemas.

### *Ejercicios*

26. Di cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Escribe V o F en la línea dada y de las que sean falsas justifica por qué lo son.

    a) ___ La media aritmética es el valor promedio alrededor del cual se encuentran los datos de un conjunto de datos.
    b) ___ La media aritmética se puede calcular cuando la distribución de frecuencia es categórica.
    c) ___ La moda es el dato que tiene mayor frecuencia absoluta en un conjunto de datos.
    d) ___ La moda siempre existe en un conjunto de datos.
    e) ___ La media aritmética se calcula sumando los valores medidos en un conjunto de datos y dividiéndolos por dos.
    f) ___ La media siempre ocupa el valor central de un conjunto de datos.
    g) ___ La media aritmética es única.
    h) ___ La moda puede no ser única.
    i) ___ La moda se calcula adicionando la frecuencia absoluta de cada uno de los datos y dividiéndola por el total de estos.
    j) ___ La moda se utiliza únicamente en el análisis de situaciones en que intervienen variables cualitativas.

27. Formula tres problemas en que para resolverlos, exija del cálculo de la media aritmética y tres que exijan de la determinación de la moda.
28. Un estudiante sabe que la media de sus calificaciones en los concursos a nivel de escuela en Historia, Matemática, Español, Biología y Física es 94,8 y que en las

cuatro primeras de esas asignaturas tiene, respectivamente, 100, 95, 97 y 92 puntos. Su calificación en el concurso de Física es:

a) ___ 57,84 puntos b) ___ 72,3 puntos c) ___ 90 puntos d) ___ 96 puntos

29. En una secundaria básica fueron encuestados 30 estudiantes de noveno grado para conocer su preferencia en relación con la continuidad de estudios. También se preguntaba su preferencia de continuar estudios en: Instituto Preuniversitario Vocacional de Ciencias Exactas (IPVCE), Instituto Preuniversitario del MININT (IPM), Instituto Preuniversitario Urbano (IPU), Escuelas Militares Camilo Cienfuegos (EMCC), Instituto Politécnico (ETP).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| IPVCE | IPVCE | EMCC | ETP | ETP | IPU |
| ETP | IPM | IPVCE | IPU | IPM | IPM |
| IPM | ETP | IPVCE | IPVCE | EMCC | EMCC |
| IPVCE | IPVCE | EMCC | IPU | EMCC | IPM |
| IPVCE | ETP | ETP | EMCC | EMCC | IPVCE |

a) ¿Será posible calcular la media aritmética para conocer sus preferencias en relación con la continuidad de estudios? Fundamenta tu respuesta.
b) Construye una tabla de frecuencia absoluta y relativa.
c) Determina la moda. Justifica tu respuesta.
d) Representa los datos en un gráfico.

30. En la tabla 1.12 se muestra la distribución de frecuencia de la cantidad de hermanos que tienen un grupo de amigos que asistieron a la Feria del Libro el año anterior. Se conoce que la media aritmética es 2.

Tabla 1.12

| **Cantidad de hermanos** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Frecuencia absoluta** | 4 | 3 | 4 | 5 | $X$ |

Selecciona la alternativa correcta

a) ___ El valor de $X$ es 6.
b) ___ No se puede conocer el valor de $X$.
c) ___ La tabla se completa para $X = 3$.
d) ___ $X$ se puede sustituir por cualquier dígito.

31. Se desea conocer la predilección que tiene un grupo de jóvenes por la música. Para eso se aplica una encuesta de opinión y se tabulan los resultados.
¿De la media aritmética y la moda, cuál sería la que utilizarías para hacer el análisis de estos resultados? Fundamenta tu respuesta.
32. Analiza la situación propuesta en el ejercicio 28 y di si es posible determinar la moda. Argumenta tu respuesta.

33. Un profesor propone analizar las notas obtenidas en las pruebas finales de Matemática del curso anterior de 15 de sus estudiantes y las registra en la pizarra de la forma siguiente:

    100; 70; 50; 90; 90; 80; 60; 60; 90; 70; 90; 60; 50; 50; 70

    Pide a los estudiantes que hagan algunas reflexiones sobre la media y la moda.

    - María dice que la moda es 100 porque es la mayor nota que se obtuvo.
    - Luis dice que la media es 60 porque es el valor central.
    - José responde que la moda es 90 porque es la nota más frecuente.
    - Beatriz plantea que la media no es representativa para hacer el análisis de las notas.

    ¿Cuál de los 4 estudiantes tiene la razón?

    a) ___ Beatriz b) ___ María c) ___ José d) ___ Luis

**Mediana**

**¡!** Lee cuidadosamente las problemáticas siguientes y reflexiona sobre las preguntas que se plantean en cada una de ellas.

*Problemática A*

El director de una escuela secundaria básica con la finalidad de evaluar el rendimiento de los estudiantes de los grupos 8.º 1 y 8.º 2 en la asignatura Matemática, aplicó una prueba diagnóstico a los 17 estudiantes del grupo 8.º 1 y a los 24 estudiantes del grupo 8.º 2 que le permitió evaluar individualmente a los estudiantes con las categorías de MB (muy bien), B (bien), R (regular) y M (mal). Una vez calificados los trabajos, registra en su libreta de control las calificaciones atribuidas a cada estudiante de la forma siguiente:

*Grupo 8.º 1*

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Estudiante | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| Calificación | MB | MB | M | M | R | B | R | B | M | M | MB | B | R | MB | M | R | R |

*Grupo 8.º 2*

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Estudiante | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| Calificación | M | M | R | R | B | B | MB | MB | M | M | M | R | R | R | MB |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Estudiante | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| Calificación | MB | M | R | R | MB | MB | MB | MB | B |

Analiza el comportamiento de las calificaciones atribuidas en ambos grupos y responde las preguntas siguientes:

- ¿Qué grupo consideras tú que obtuvo mejor rendimiento? ¿Por qué?
- ¿En qué te basaste para dar tu criterio?

- ¿Te fue posible calcular la media aritmética? ¿Por qué?
- ¿Crees que la moda te ayudaría a determinar el grupo de mejor rendimiento? ¿Por qué?
- ¿Cuál es la moda en cada grupo?

Seguramente respondiste que no te fue posible calcular la media aritmética de las calificaciones atribuidas por el director, dadas las características de los datos, los cuales no son numéricos, sin embargo sí te fue posible determinar la moda en ambos casos.

Al determinar la moda en ambos grupos seguramente te diste cuenta que en el grupo 8.º 1 hay dos calificaciones que representan las modas, estas son las calificaciones de regular y mal (R y M). ¿Cuál de las dos modas del grupo 8.º 1 te sería la más representativa de este conjunto de datos para dar tu criterio en relación con el rendimiento del grupo?

También identificaste que en el grupo 8.º 2 la moda de las calificaciones atribuidas es muy bien (MB). ¿Será esta la calificación más representativa de este conjunto de datos? ¿Por qué?

Como observaste, no te fue posible determinar la media aritmética de las calificaciones ¿Consideras que con el análisis de la moda en ambos grupos, te bastaría en este caso para dar tu criterio, sobre el grupo de mejor rendimiento? Fundamenta tu respuesta.

*Problemática B*

Con la finalidad de evaluar los conocimientos sobre Historia de Cuba de los estudiantes de los grupos 8.º 3 y 8.º 4 el director de la misma escuela aplicó una prueba de conocimientos y habilidades a los 15 estudiantes del grupo 8.º 3 y a los 30 estudiantes del grupo 8.º 4, pero en este caso calificó la prueba de los estudiantes en una escala de cero (0) a diez (10). Una vez calificados los trabajos registró en su libreta de control las calificaciones obtenidas por cada estudiante de la forma siguiente:

*Grupo 8.º 3*

| Estudiante | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Calificación | 10 | 5 | 5 | 10 | 4 | 5 | 10 | 9 | 4 | 10 | 10 | 3 | 5 | 5 | 10 |

*Grupo 8.º 4*

| Estudiante | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Calificación | 6 | 5 | 8 | 3 | 9 | 7 | 9 | 4 | 10 | 6 | 3 | 8 | 5 | 4 | 3 |
| Estudiante | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| Calificación | 4 | 7 | 6 | 9 | 3 | 9 | 5 | 9 | 4 | 8 | 3 | 9 | 6 | 5 | 4 |

Al igual que en el análisis realizado en la *problemática A,* analiza el comportamiento de las calificaciones atribuidas a los estudiantes en los grupos 8.º 3 y 8.º 4 y responde las preguntas siguientes:

- ¿Qué grupo consideras tú que obtuvo mejores calificaciones?
- ¿Cuál sería la media aritmética de las calificaciones atribuidas en cada grupo?
- ¿Cómo las calculaste?

- ¿Cuál es la moda en cada grupo?
- ¿Crees que la media aritmética y la moda te ayudarían a dar un criterio sobre cuál de los dos grupos obtuvo mejores calificaciones?

Seguramente te diste cuenta que en el análisis de esta problemática a diferencia de la problemática A, sí te fue posible calcular la media aritmética en ambos grupos dadas las características de los datos, que en este caso son numéricos.

Al calcular la media aritmética de las calificaciones en el grupo 8.º 3 comprobaste que esta es de **7 puntos,** sin embargo hay 8 estudiantes del grupo (más del 50 %) que están desaprobados por haber obtenido calificación inferior a **6 puntos.** También identificaste que la moda es **10 puntos.** ¿Serán en este caso la media y la moda representativas de este conjunto de datos? Fundamenta tu respuesta.

Igualmente al calcular la media aritmética de las calificaciones en el grupo 8.º 4, comprobaste que esta era aproximadamente de **5,8 puntos** y, por tanto, es la calificación que representa la nota promedio del grupo, que en una escala (0 - 10) se considera desaprobada. Sin embargo 16 de los estudiantes del grupo (más del 50 %) están aprobados. También determinaste que la moda es la calificación de **9 puntos.** ¿Serán la media aritmética y la moda representativas de este conjunto de datos? Fundamenta tu respuesta.

¿Del comportamiento de la media aritmética y de la moda, consideras tú que podrías dar un criterio, sobre cuál de estos dos grupos demostró tener más conocimientos sobre Historia de Cuba? Fundamenta tu respuesta.

Después de haber hecho el análisis de las *problemáticas A y B* y dar tu criterio en relación con el comportamiento de los datos, de la media aritmética y de la moda, te propongo hacer algunas otras reflexiones que te ayudarán a tener más elementos para dar un criterio más certero sobre el rendimiento de los dos grupos en cada uno de los casos.

Para ello, te propongo que:

- Primeramente organices las calificaciones (datos) en orden creciente o decreciente de cada grupo.

En la *problemática B,* si las organizaste en orden creciente, seguramente te quedarán como se muestra a continuación:

*Grupo 8.º 3*

3,4,4,5,5,5,5,5,9,10,10,10,10,10,10

*Grupo 8.º 4*

3,3,3,3,3,4,4,4,4,4,5,5,5,5,6,6,6,6,7,7,8,8,8,9,9,9,9,9,9,10

- Después divide la cantidad de calificaciones (datos) obtenidas por los estudiantes de cada grupo en dos partes con igual cantidad a la izquierda y a la derecha.

*Grupo 8.º 3*

3,4,4,5,5,5,5 – 5 – 9,10,10,10,10,10,10

*Grupo 8.º 4*

3,3,3,3,3,4,4,4,4,4,5,5,5,5,6 – 6,6,6,7,7,8,8,8,9,9,9,9,9,9,10

- Analiza el comportamiento de los datos y reflexiona en cada caso.

En las reflexiones realizadas al responder las preguntas iniciales planteadas para el análisis de esta problemática, te diste cuenta que la media aritmética y la moda no eran representativas de estos conjuntos de datos para decidir el grupo que demostró tener más conocimientos sobre Historia de Cuba.

Observa que al ordenar las calificaciones del grupo 8.º 3 en orden creciente y dividir la cantidad de las calificaciones en dos partes iguales, hay una calificación (5) que tiene la misma cantidad de datos superiores o iguales como inferiores o iguales a la calificación de 5. También has de observar que esta calificación (5) divide en dos subgrupos iguales a la cantidad de datos ordenados.

A este valor de la variable estadística que divide en dos subgrupos iguales a la cantidad de datos ordenados se le denomina **mediana.**

Observa ahora las calificaciones ordenadas del grupo 8.º 4, puedes darte cuenta que también han sido divididos en dos subgrupos con la misma cantidad de calificaciones, pero a diferencia del caso del grupo 8.º 3, no hay una calificación que ocupe el valor central de este conjunto de datos ordenados. En este caso la *mediana* es la media aritmética de los valores que ocupan la posición central en el conjunto de datos, que en este caso es 6.

*Definición:*

La **mediana** $M_e$ de un conjunto de datos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ dispuestos en orden creciente (o decreciente) es:

- el valor que equidista de los extremos, si $n$ es impar;
- la media aritmética de los valores centrales, si $n$ es par.

¿Considerarías que la mediana de las calificaciones atribuidas en ambos grupos (5 puntos en el grupo 8.º 3 y 6 puntos en el grupo 8.º 4) es representativa del conjunto de datos en cada caso? ¿Por qué?

Entonces, ¿podrías decir, cuál de los dos grupos consideras que tiene más conocimientos de Historia de Cuba? ¿Por qué?

Analicemos ahora el comportamiento de la mediana en la *problemática A.*

Si organizas las calificaciones en orden decreciente seguramente te quedarían como se muestra a continuación:

*Grupo 8.º 1*

MB,MB,MB,MB,B,B,B,R,R,R,R,R,M,M,M,M,M

*Grupo 8.º 2*

MB,MB,MB,MB,MB,MB,MB,MB,B,B,B,R,R,R,R,R,R,R,M,M,M,M,M,M

Al dividir la cantidad de calificaciones obtenidas por los estudiantes de cada grupo en dos partes con igual cantidad a la izquierda y a la derecha, te quedaría de la manera siguiente:

*Grupo 8.º 1*

MB,MB,MB,MB,B,B,B,R – R – R,R,R,M,M,M,M,M

*Grupo 8.º 2*

MB,MB,MB,MB,MB,MB,MB,MB,B,B,B,R – R,R,R,R,R,R,M,M,M,M,M,M

Observa ahora la distribución ordenada de las calificaciones en el grupo 8.º 1, ¿cuál es el dato que equidista de los extremos en este conjunto? ¿Qué nombre recibe? ¿Por qué?

Si observas también las calificaciones ordenadas correspondientes al grupo 8.º 2, te darás cuenta que hay un número par de datos (24) y que han sido divididos en dos partes iguales. ¿Existe algún dato que ocupe el valor central en ese conjunto? Seguramente te diste cuenta de que no existe, sin embargo hay dos calificaciones que ocupan el valor central que son las calificaciones de regular (R). Fíjate que la calificación (R) tiene la misma cantidad de datos superiores o iguales que de inferiores o iguales y que estas calificaciones de (R) dividen en dos subgrupos iguales a la cantidad de datos ordenados. ¿Podrías decir entonces cuál es la mediana de las calificaciones en este caso?

¿Qué puedes decir del rendimiento en Matemática de estos dos grupos? ¿Por qué?

Como pudiste observar, en la *problemática A* la distribución de frecuencia es **categórica** y en la *problemática B,* **numérica,** y en ambos casos fue posible determinar la mediana.

**¿Cómo calcularías la mediana en cada caso?**

1. Se ordenan los datos en forma creciente o decreciente atendiendo a la presencia o intensidad de la característica medible.
2. Se cuenta la cantidad de datos.
   - Si el número de datos es *impar,* la anotación que representa la mediana tendrá la misma cantidad de elementos antes y después que ella, y es el dato que ocupa la posición $\frac{n+1}{2}$.
   - Si el número de datos es *par:*
     a) Y los datos son numéricos, la mediana es la media aritmética de los dos datos centrales.
     b) Y los datos no son numéricos, se le hace corresponder a cada valor de los datos un número de orden de manera tal que se forme una sucesión ordenada de números. La mediana en este caso es la media aritmética de los dos valores centrales.

*Ejemplos:*

1. A continuación se muestran los datos ordenados de la cantidad de personas que asistieron a un consultorio del médico de la familia de lunes a viernes:

   22 23 25 28 30

   En este ejemplo la cantidad de datos $n = 5$ (impar) luego, la mediana del conjunto de datos es $M_e = 25$.

2. A continuación se muestran los datos ordenados de la cantidad de sacos de papa recogidos por seis estudiantes de octavo grado en un trabajo voluntario:

   40 43 45 46 48 51

   En este ejemplo la cantidad de datos $n = 6$ (par) luego, la mediana del conjunto de datos se calcula de la forma siguiente: $M_e = \frac{45+46}{2} = 45{,}5$

3. Para conocer la frecuencia con que las personas jubiladas de un edificio observan el noticiero del mediodía, se aplicó una encuesta de opinión a seis personas seleccionadas al azar, para ello se les preguntó si observaban el noticiero Siempre (S) Frecuentemente (F), A veces (AV), Casi nunca (CN) y Nunca (N).
   A continuación se muestran los datos ordenados de los resultados de la encuesta:

   S S F CN N N

   En ese caso para determinar la mediana, hacemos corresponder a cada uno de los valores de los datos, una sucesión ordenada de números:

   Siempre —-5; Frecuentemente —-4; A veces —3; Casi nunca —2; Nunca —-1

   La cual se dispone de la forma siguiente: 5, 5, 4, 2, 1, 1
   Como los valores centrales son 4 y 2, de acuerdo con la sucesión ordenada de números, calculamos la media aritmética de los dos valores centrales.
   En este ejemplo como $n = 6$, y es un número par de datos se procede como en el ejemplo 2 para el cálculo de la mediana.

   $$M_e = \frac{4+2}{2} = 3$$

   Como la media de los valores centrales es 3, entonces de acuerdo con la sucesión ordenada de números que se le hizo corresponder a cada categoría, se puede decir que la mediana es que **A veces,** las personas observan el noticiero del mediodía.

Características de la mediana:

- Es aplicable a cualquier tipo de datos que puedan ser ordenados.
- Se puede utilizar en distribuciones de frecuencias numérica y categórica.

- Siempre que exista, es única.
- No varía fácilmente al modificar los valores extremos.
- Es apropiada para un grupo pequeño de datos.
- Es fácil de determinar.

Muchos son los problemas en los que se hace necesaria una medida que de cierto modo caracterice o represente al conjunto de datos, o sea, que proporcione una información sobre los valores del conjunto. Estas son llamadas **medidas de tendencia central o de posición,** que como su nombre lo indica, son valores que tienden a ocupar una posición alrededor de la cual se agrupa el mayor número de datos, desde el punto de vista estadístico, y representan al conjunto de datos, lo que facilita la descripción de la variable (o variables) que es objeto de estudio.

Estas medidas de tendencia central son: la media aritmética, la moda y la mediana.

## *Ejercicios*

34. El profesor ha pedido a sus estudiantes que calculen la mediana de los datos siguientes:

    16; 18; 5; 3; 12; 15.

    Elena calcula y responde 4.
    Marcos calcula y responde 13,5.
    ¿Cuál de los dos tiene la respuesta correcta? Responde sin hacer cálculos.

35. Determina la mediana de los datos siguientes:

    a) 2,84; 1,3; 18; 0,7; 1,26; 15,09; 15,2; 0,82.

    b) $\frac{3}{8}a$; $6a$; $\frac{2}{3}a$; $a$; $2a$.

    c) $a + 7$; $a + 1$; $a + 12$; $a - 1$; $a - 3$.

36. Escribe tres ejemplos de situaciones de la vida que exijan de la determinación de la mediana y no del cálculo de la media.
37. Indica si son verdaderas o falsas las proposiciones siguientes. En caso de ser verdadera da un ejemplo en que se cumpla.

    a) ___ La mediana es siempre igual a la moda.
    b) ___ La mediana es siempre distinta de la media aritmética.
    c) ___ La mediana es siempre distinta de la moda y de la media.
    d) ___ Mediana, media y moda pueden ser iguales.

38. El Comité Estatal de Finanzas, realiza un estudio del salario mensual de los trabajadores de una empresa los que se relacionan a continuación:

    $280; $300; $540; $280; $280; $300; $650; $280; $280; $400; $700

Si tuvieras que identificar cuál es el salario más representativo de los trabajadores de esta empresa, ¿cuál seleccionarías? ¿Por qué? ¿En qué medida de tendencia central te auxiliaste para tomar tu decisión?

39. En una encuesta aplicada a estudiantes de octavo grado escogidos al azar de cinco escuelas secundarías básicas sobre el uso del *software* educativo *El Navegante,* se constató que de los encuestados, 45 estudiantes respondieron que casi nunca lo usan, 22 refirieron que lo usaban frecuentemente, 25 que nunca lo usaban, 10 que lo usaban siempre y 35 que lo utilizaban a veces.

    a) Podrías dar tu opinión sobre el uso del *software* en las clases de Matemática en esas cinco escuelas.
    b) En cuál de las medidas de tendencia central te basaste para dar ese criterio. Determínala.

## EJERCICIOS DEL CAPÍTULO

1. En la recta numérica de la figura 1.22 están representados los números *d*, *c*, 0, *a* y *b* (todas las subdivisiones son iguales).

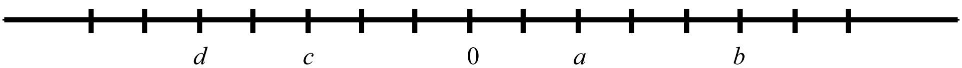



Figura 1.22

Señala cuál de las relaciones dadas es la que se cumple:

a) ___ $b = d$ b) ___ $2a < d$ c) ___ $-c > a$ d) ___ $c + d > 0$

2. En una competencia de pioneros exploradores de una secundaria básica se enfrentaron dos tropas de noveno grado. La tropa Avispa obtuvo $\frac{3}{5}$ del total de puntos, entonces esta tropa obtuvo el:

___ 40 % ___ 60 % ___ 20 % ___ Ninguno de los anteriores

3. De un tanque que contiene agua y se encuentra lleno completamente, se saca $\frac{1}{3}$ de su capacidad para cocinar, el 50 % del resto para lavar y el resto del agua para limpiar. Se puede afirmar que:

a) ___ Se utilizó mayor cantidad de agua para limpiar que para lavar y cocinar.
b) ___ Se utilizó la mitad de la cantidad de agua para limpiar y cocinar.
c) ___ Se utilizó la misma cantidad de agua para las tres actividades.
d) ___ Se utilizó mayor cantidad de agua para lavar que para limpiar.

4. En una Cooperativa de Producción Agropecuaria (CPA) un campesino separó las guayabas buenas de las que se echaron a perder. De las buenas la tercera parte estaban maduras y el resto pintonas. Si entre las guayabas buenas y las que se echaron a perder había 180 guayabas y de ellas el 20 % estaban echadas a perder. La cantidad de guayabas pintonas es:

   a) ___ 36   b) ___ 48   c) ___ 96   d) ___ 144

5. Para la limpieza de una piscina que contiene aproximadamente 3 750,3 $m^3$ de agua se programa hacer tres extracciones. En la primera extracción se desagua la tercera parte del agua contenida en la piscina y en la segunda se desaguan 387 400 $dm^3$ más. La cantidad de agua que quedó en la piscina previo a la tercera extracción fue de:

   a) ___ 2 112,8 m   b) ___ 2 112,8 $dam^3$
   c) ___ 21 128 $dm^3$   d) ___ Ninguna de anteriores

6. Sean: $P = \dfrac{13{,}2 - 2{,}5 \cdot \dfrac{6}{5}}{\sqrt[3]{125}}$ y $Q = \dfrac{2\,400\,000\,000}{1\,000^3}$

   a) Compara los valores numéricos de $P$ y $Q$.
   b) El promedio de $P$ y $Q$ es:
   ___ 2,22   ___ 2,4   ___ 4,44   ___ Ninguno de los anteriores

7. Por cada minuto que pasa, una araña estira su hilo 10 mm, pero el hilo se encoge 2 mm. Su hilo habrá sobrepasado los 3 m, al cabo de ____ horas.[24]

8. Determina el valor numérico de la expresión $D = 3\left(\dfrac{9^{50} \cdot 3^{20}}{3^{121}}\right)^2 - 9\left(\dfrac{9^{50} \cdot 3^{20}}{3^{121}}\right)$ y di a qué conjunto numérico más restringido pertenece el resultado obtenido.

9. Selecciona la respuesta correcta marcando con una cruz (X).

   Si $A = \left(3\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3}\right) : \dfrac{15}{6} - \dfrac{2}{3}$ y $B = \dfrac{0{,}2^{36} \cdot 0{,}2^{64}}{\left(\dfrac{1}{5}\right)^{100}}$, entonces se cumple que:

   ___ $A > B$   ___ $A < B$   ___ $A = B$

10. Simplifica las expresiones siguientes dando el resultado:

10.1. De forma que todos los exponentes sean positivos.

10.2. De forma que no aparezca cociente de potencia.

   a) $\dfrac{6 \cdot 3^3 \cdot 35^2}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^7 \cdot 7^3}$   b) $\dfrac{a^2 \cdot b^{-3} \cdot c^{-4}}{a^{-1} \cdot b^{-2} \cdot c^{-6}}$

[24] Jesús Cantón Arenas: *Ejercicios y problemas integradores de Matemática para los estudiantes de Secundaria Básica,* Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2011, p. 110.

11. Se conoce que la media de tres números es $2{,}5 \cdot 10^4$, siendo dos de los números $1{,}2 \cdot 10^4$ y $5{,}6 \cdot 10^4$; entonces el tercer número escrito en notación científica es:

___ $1{,}82 \cdot 10^4$ ___ $0{,}72 \cdot 10^4$ ___ $7{,}02 \cdot 10^4$ ___ Ninguno de los anteriores

12. Si $X = \dfrac{2^{15} \cdot 2^{-45}}{4^{-29}}$, $Y = \dfrac{2^{29} \cdot 5^{31}}{10^{30}}$ y $Z = \dfrac{22{,}5}{5} + \sqrt[3]{8}$ ; entonces se cumple que:

a)___ $Z > Y > X$ ___ $Y = Z < X$ ___ $Z = Y > X$ ___ $X = Y = Z$

b) El dominio numérico más restringido al que pertenece el valor de $X$ es : ____

13. Dados los conjuntos $M = \{x \in \mathbb{R};\, x \geq -3\}$, $N = \{x \in \mathbb{R};\, -\sqrt{3} < x < 2\}$ y $P$: conjunto de los números naturales pares.

Completa los espacios en blanco, utilizando los símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$; de forma tal que se obtenga una proposición verdadera.

a) 2 ___ $P$ b) 6 ___ $M$ c) $M$ ___ $N$ d) –2 ___ $M$ e) $P$ ___ $M$

f) $\sqrt{2}$ ___ $N$ g) 5 ___ $P$ h) $\sqrt{3}$ ___ $N$ i) $N$ ___ $P$

14. Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas (V) o falsas (F). De las que consideres falsas, justifica por qué lo son. Puedes justificar con contraejemplos.

a) ___La estadística se caracteriza por realizar estudios de hechos aislados que ocurren en la sociedad.
b) ___ La estadística descriptiva, estudia las características de una población, sin derivar conclusiones sobre un grupo mayor que esta.
c) ___ Al estudiar el comportamiento de la temperatura en varias ciudades de un país en un día determinado, la variable estadística está dada por las ciudades.
d) ___ La raza de las personas se considera como una variable cuantitativa.
e) ___ La cantidad de accidentes ocurridos en un año es considerada como una variable discreta.
f) ___ La frecuencia absoluta de un dato es el número de veces que se repite el dato.
g) ___ El pictograma se caracteriza por representar los datos en un círculo que está dividido en partes cada una de las cuales representa una categoría.
h) ___ La media aritmética de un conjunto de datos es el dato que aparece con mayor frecuencia.
i) ___ La moda siempre existe en un conjunto de datos.
j) ___ La mediana de un conjunto de datos es el valor central de este conjunto.

15. En una escuela secundaria básica se seleccionaron al azar un grupo de estudiantes para hacer una investigación sobre la edad de los estudiantes que con más

frecuencia visitan los museos. Para esto se seleccionaron como muestra estudiantes de diferentes grados, recogiéndose sus edades de la forma que aparece en la tabla 1.13.

Tabla 1.13

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 15 | 14 | 12 | 11 | 14 | 14 | 13 | 15 | 16 |
| 12 | 12 | 14 | 14 | 15 | 15 | 13 | 14 | 15 | 13 |
| 11 | 14 | 12 | 15 | 15 | 13 | 15 | 11 | 12 | 14 |

a) Identifica la población y la muestra.
b) Clasifica el tipo de variable estadística.
c) Explica el procedimiento que aplicarías para resolver la situación planteada.
d) Construye la tabla de frecuencia absoluta y relativa.
e) ¿Qué tanto por ciento de estudiantes tienen 11 años?
f) Di la cantidad de estudiantes que tienen edad superior a 13 años.
g) ¿Cuál es la edad más frecuente de los estudiantes seleccionados? ¿Qué nombre recibe esta medida en la estadística?
h) Si quisieras conocer el promedio de edad que tienen los estudiantes seleccionados, ¿qué medida estadística calcularías? ¿Cómo procederías en este caso? Calcúlala.
i) ¿Cuál es la mediana en este conjunto de datos? Cómo la calculaste.
j) ¿Qué importancia tiene para ti la visita a los museos?
k) Te invito a que investigues en tu grupo, la predilección por la visita a los museos y arribes a conclusiones.

16. El salario medio de 5 personas de una fábrica es de $ 380,00.

a) ¿Cuánto incrementará este salario medio un aumento de $80,00 por persona por concepto de estímulo?
b) ¿En cuánto se incrementará el valor que representa la mediana? ¿Por qué?

17. Un estudiante que se prepara para participar en los concursos de conocimientos, obtuvo resultados de 89; 75; 83; 78; 91 y 76 puntos en las seis pruebas realizadas. El entrenador para valorar el rendimiento, calcula la media de las notas como calificación final. El estudiante para ser seleccionado, tiene la opción de mantener su promedio actual o reemplazar la mayor y menor de las notas que tiene actualmente con solo un resultado en la prueba final.

a) Si el estudiante se presenta a la prueba final, halla la menor nota que puede obtener en esta prueba para mantener la media que actualmente tiene.
b) Si el estudiante no se presenta a la prueba final y reemplaza la mayor y la menor de las notas, ¿se alteraría la mediana de las notas obtenidas?
c) Si el estudiante mantiene las notas obtenidas en las seis pruebas, ¿podrías decir cuál es la moda? ¿Por qué?

18. Se ha aplicado una encuesta a un grupo de estudiantes sobre la realización de las actividades deportivas que se hacen en su escuela cuyos resultados se representan en la tabla 1.14.

Tabla 1.14

| Opiniones | Frecuencia absoluta | Frecuencia relativa (en %) |
|---|---|---|
| Totalmente de acuerdo | 20 | |
| De acuerdo | 12 | |
| Indiferente | 7 | |
| En desacuerdo | 7 | |
| Totalmente en desacuerdo | 5 | |

a) Completa la tabla.
b) Representa los datos en el tipo de gráfico que consideres más apropiado.
c) Determina las medidas de tendencia central que te dan elementos para hacer un análisis de los resultados de la encuesta aplicada.
d) Di si te parece cierta la afirmación: el 50 % o más de la población está por lo menos de acuerdo. Da tus razones.

19. Se desea hacer un estudio sobre la relación entre la cantidad de integrantes de los núcleos familiares, la cantidad de equipos electrodomésticos y el gasto de electricidad.
Para arribar a conclusiones, realiza las actividades siguientes:

a) Determina una muestra para hacer el estudio y elabora instrumentos para la búsqueda de los datos.
b) Simplifica el contenido de la tabla principal para lograr una mejor interpretación de estos.
c) Representa en una misma tabla la relación entre la cantidad de equipos electrodomésticos y la cantidad de integrantes de los núcleos familiares.
d) Expresa en porcentajes las informaciones de las tablas anteriores.
e) Determina cuál de las informaciones anteriores puede ser expresada mediante los gráficos conocidos y representa las informaciones en los gráficos correspondientes.
f) Determina las medidas de tendencia central que consideres necesarias para la interpretación de los datos e interpreta el significado de cada una de estas.
g) Expresa mediante un párrafo las conclusiones a las que arribaste en la interpretación de los datos.

## PARA LA AUTOEVALUACIÓN

### Reflexiona sobre lo aprendido

1. ¿Qué es un número irracional?
2. ¿Qué es un número real?

3. ¿Qué conjuntos numéricos son subconjuntos del conjunto de los números reales?
4. ¿Qué operaciones sabes hacer con números reales?
5. ¿Conoces los pasos que se deben seguir para resolver un ejercicio de operaciones combinadas de números reales?
6. ¿Sabes qué es la estadística?
7. ¿Qué importancia tiene la estadística para la sociedad?
8. Sabes identificar cuando una variable estadística es cuantitativa o cualitativa? ¿Qué características tiene cada una?
9. ¿Consideras más ventajoso presentar datos en forma gráfica que en forma de tablas? ¿Por qué?
10. ¿Será posible calcular la mediana en cualquier tipo de distribución?
11. ¿Qué información te aporta la mediana al hacer el análisis de un conjunto de datos?
12. ¿Cómo calcular la mediana cuando los datos están representados en una tabla de frecuencias?
13. ¿Por qué es importante dominar el procedimiento general para el procesamiento de datos?

PONTE A PRUEBA

1. Después de un tornado, los trabajadores de la Empresa de Telecomunicaciones de Cuba S. A. (ETECSA) arreglaron una buena cantidad de líneas telefónicas en una localidad afectada, exactamente, 165. El primer día repararon el 20 % de los números afectados; el segundo día $\frac{5}{12}$ del resto y el tercer día las dos terceras partes de lo que se hizo el primer día.
   a) Si la reparación duró 4 días, ¿cuántos números telefónicos hubo que reparar el último día?
   b) ¿Qué porcentaje del total representa el trabajo realizado el segundo día?

2. Calcula: $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}+\sqrt{\dfrac{8^{10}}{2^{30}}-(-2)^3}+(1,5)^2$
   a) Indica el dominio numérico más restringido al cual pertenece el resultado obtenido.

3. Escoge el conjunto de datos que se ajustan a la descripción dada.
   La media es 3; no tiene moda, la mediana es 3

   $A = \{3; 3; 3; 3\}$
   $B = \{5; 4; 3; 0\}$
   $C = \{0; 3; 6\}$

Describe las medidas de tendencia central que caracterizan los conjuntos de datos que no cumplen la condición dada.

4. Un profesor propone analizar en su grupo de entrenamiento, la cantidad de respuestas correctas que los 15 estudiantes que se entrenan para participar en las olimpiadas populares de Matemática respondieron y para eso las registra en la pizarra de la forma siguiente:

   10; 7; 5; 9; 9; 8; 6; 6; 9; 7; 9; 6; 10; 5; 7

   Pide a sus estudiantes que analicen las medidas de tendencia central.

   - María dice que la mediana es 6.
   - Luis dice que la moda es 4.
   - José responde que la moda es 9 y que la media está muy próxima a 7,5.
   - Beatriz plantea que la mediana es 7 y que la media es 8.

   ¿Cuál de los 4 estudiantes tiene la razón?

5. La mediana de los resultados de María en las tres pruebas realizadas para su ingreso al Instituto Preuniversitario Vocacional de Ciencias Exactas fue 90 puntos. Si su promedio fue de 92 puntos y no hubo coincidencia en ninguna de las calificaciones. Determina las posibles calificaciones obtenidas por María en las tres pruebas realizadas. (Las calificaciones se otorgan en números enteros).

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS

## Epígrafe 1.1

1. b) 2 477 m c) De 2 248 m
2. 360
3. \$1,05
4. $A = 19{,}5$ $B = -5$ $C = \dfrac{9}{80}$ $D = -\dfrac{4}{9}$

4.1.1. d) 4.1.2. d) 4.1.3. d) 4.1.4. a)

5. $E = -7$ $F = -7$ $G = -\dfrac{59}{64}$

   a) Racionales b) Es subconjunto de los números racionales.
   c) Enteros d) $G$, porque está más cerca del cero en la recta numérica.
   e) –8 f) –6 g) –8 y –6 h) Al opuesto de $F$
   i) Potencia de potencia o producto de potencias de igual base. j) 6
6. 3,5
7. El 22,55 % de 678 000 000 es 152 889 000.
8. Aproximadamente el 19 %

9. 109 629 629 630 USD
10. 29 634 921 personas en edad laboral
12. a) En la caja quedan 16 pomos. b) Se han abierto 6 cajas.
13. Se quedó con 96 libros.

    a) Verdadero b) 50 %

14. 36,5 kg
15. 22 años y meses
16. No son ni tartaletas ni pasteles 288 dulces.

    a) Su ganancia es de $108,00. b) La cantidad es de 18 pasteles.

17. Sí, tiene sentido lo que dice.
18. a) 8 quieren ser profesores de inglés.
    b) Representa el 5 % del total, los que quieren ser profesores de matemática.
19. $14 + 32 = 46$
    $46\ 3 = 138$
    $138 : 2 = 69$
    $69 - 1 = \underline{68}$
20. Una

**Epígrafe 1.2**

1. Sí, tiene razón, porque los números irracionales son expresiones decimales infinitas no periódicas.
2. a) $\subset$ b) $\notin$ c) $\not\subset$ d) $\in$ e) $\subset$
   f) $\notin$ g) $\in$ h) $\notin$ i) $\subset$ j) $\notin$
   k) $\cap$ l) $\cap$ m) $\notin$ n) $\in$ ñ) $\cap$
3. a) V b) F, porque es subconjunto.
   c) F, porque es subconjunto. d) V
   e) F, porque pertenece. f) F, porque sí pertenece.
   g) V h) F, si es periódica.
   i) F, porque no pertenece. j) F, porque no es subconjunto.
   k) V l) F, porque $\sqrt[3]{8} = 2$; $2 \in \mathbb{Q}$.
   m) V n) F, porque es subconjunto.
   ñ) F, porque $\left(\sqrt[3]{-3}\right)^3 = -3$; $-3 \in \mathbb{Q}$ o) V
   p) F, porque $\sqrt{5} + \left(-\sqrt{5}\right) = 0$; $0 \in \mathbb{Q}$ q) V
4. a) $\mathbb{Q}$ b) $\mathbb{N}$ c) $\mathbb{Q}_+$ d) $\mathbb{Q}$ e) $\mathbb{Z}$
   f) $\mathbb{I}$ g) $\mathbb{I}$ h) $\mathbb{Q}_+$ i) $\mathbb{Q}$
6. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{I}$ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{I} = \mathbb{Q}$ $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{I} = \mathbb{Q}$ $\mathbb{I} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{I}$

7. $n = 1$; $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, $n = 2$; $\dfrac{\sqrt{8}+2}{2} = \sqrt{2}+1$, $n = 3$; $\dfrac{\sqrt{11}+3}{2}$.

11.* a) $l$: 3,0 cm; $a$: 4,0 cm; $h$: 12 cm b) $l$: 6,0 dm; $a$: 8,0 dm; $h$: 24 dm

**Epígrafe 1.3**

1. a) No corresponde a estudios realizados dentro de la estadística descriptiva, pues se está realizando el estudio de un hecho aislado que es la producción de huevos en un día.
   b) Sí corresponde a estudios realizados dentro de la estadística descriptiva, pues se está realizando el estudio de un conjunto de datos que se obtienen a partir de las notas que los estudiantes del grupo han obtenido en Matemática.
   c) Sí corresponde a estudios realizados dentro de la estadística descriptiva, pues se está realizando el estudio del comportamiento de las votaciones durante un período de tiempo que en este caso es del año 1990 al año 2013.
   d) No corresponde a estudios realizados dentro de la estadística descriptiva, pues se está realizando el estudio de un hecho aislado que es la preferencia por los programas musicales de una persona.
   e) Sí corresponde a estudios realizados dentro de la estadística descriptiva, pues se está realizando el estudio del comportamiento de la cantidad de lluvia caída durante un período de tiempo que en este caso es de 12 meses.
2. a) Población: Los estudiantes de octavo grado de la escuela secundaria básica.
   Muestra: Los estudiantes seleccionados, que en este caso fueron 40.
   b) Población: Unidades de bombillos incandescentes que se producen diariamente en la fábrica (en este caso son 12 100 unidades).
   Muestra: Las unidades seleccionadas, que en este caso fueron 120.
   c) Población: Viviendas del Consejo Popular.
   Muestra: Las viviendas seleccionadas del Consejo Popular, que en este caso fue 20 %.
   d) Población: Pacientes que ingresaron al hospital en un día (en este caso 540).
   Muestra: Los pacientes seleccionados para hacer el estudio, que en este caso fueron 54.
   e) Población: Pobladores de Pensilvania.
   Muestra: Las personas seleccionadas para hacer el estudio, que en este caso fueron 200.
3. Son variables estadísticas cualitativas:
   - La profesión de las personas.
   - El color de los ojos de un grupo de personas.
   - El rendimiento académico de un grupo de estudiantes de una escuela.
   Porque se refieren a características o atributos que expresan una cualidad que no puede tomar valores numéricos.

5. Son variables cuantitativas:
   - La cantidad de estudiantes de un grupo o de una escuela.
   - El promedio de la cantidad de lluvia caída en una determinada zona del país durante los 12 meses del año.

- El número de habitantes en determinadas regiones de un país.
- La magnitud de los terremotos en la escala de Richter.

  Porque se refieren a características o atributos que expresan una cantidad o cantidad de magnitud y, por tanto, toman valores numéricos.

7. a) De acuerdo

   b) No estoy de acuerdo porque la variable cantidad de estudiantes toma un número finito de valores numéricos los cuales se hacen coincidir con números enteros.

   c) No estoy de acuerdo porque la variable la cantidad de juegos ganados o perdidos toma un número finito de valores numéricos los cuales se hacen coincidir con números enteros.

   d) De acuerdo

   e) De acuerdo

   f) No estoy de acuerdo porque la variable calidad de las clases se refiere a los atributos que expresan una cualidad que no puede tomar valores numéricos. Por ejemplo, se pueden atribuir las categorías muy bien, bien, regular, mala.

9. a) Seleccionaría una muestra representativa de la producción diaria y le aplicaría los criterios de calidad establecidos por el Ministerio de la Agricultura los que analizaría durante el trimestre.

   b) Población: Producción total de huevos diariamente que en este caso es de 6 000.

   c) Muestra: La cantidad de huevos seleccionados diariamente para aplicarle los criterios de calidad establecidos por el Ministerio de Agricultura.

   d) Tabla 1.15

Tabla 1.15

| **Variable** | **Tipo de variable** | **Valores de la variable** |
|---|---|---|
| Calidad de la producción diaria de huevos durante el trimestre | Cualitativa | Buena, regular y mala |
| Promedio de la cantidad de huevos diarios que ponen las gallinas en el trimestre | Cuantitativa | Cualquier valor real |
| Nivel cultural de los trabajadores | Cualitativa | Primario, Medio básico, Medio superior y Universitario |
| Cantidad de ausencias de cada trabajador durante el trimestre | Cuantitativa | 0; 1; 2; 3; 4; 5;… |
| Organización de los trabajadores por turnos de trabajo | Cualitativa | Turno $A$, Turno $B$, Turno $C$, ... |

10.1. a) Cualitativa

   b) Obesos de los centros universitarios de Wisconsin y Florida.

   c) Obesos seleccionados que en este caso fueron 154.

10.2. a) Población

11. a) Verdadera

   b) Falsa, porque la frecuencia absoluta es el número de veces que aparece el dato repetido.

   c) Verdadera

d) Falsa, porque la frecuencia relativa es el cociente de la frecuencia absoluta por la cantidad de datos.
e) Falsa, porque la suma de la frecuencia relativa es igual a la unidad (1).
f) Falsa, porque la suma de la frecuencia relativa es igual al 100% cuando se expresa en términos porcentuales.
g) Verdadera

12. a) Categórica   b) Numérica   c) Categórica   d) Numérica
e) Categórica   f) Numérica

13. a) Tabla 1.16

Tabla 1.16

| Cantidad de hermanos | Frecuencia absoluta | Frecuencia relativa |
|---|---|---|
| 0 | 5 | 0,17 |
| 1 | 6 | 0,2 |
| 2 | 10 | 0,33 |
| 3 | 2 | 0,07 |
| 4 | 4 | 0,13 |
| 5 | 2 | 0,07 |
| 6 | 1 | 0,03 |
| Total | 30 | 1,00 |

14. b) Tabla 1.17

Tabla 1.17

| Salto de altura (m) | Conteo | Frecuencia absoluta | Frecuencia relativa decimal | Frecuencia relativa porcentual |
|---|---|---|---|---|
| 2,30 | 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 I | 51 | 0,27 | 27 % |
| 2,31 | 卌 卌 卌 卌 I | 21 | 0,11 | 11 % |
| 2,32 | 卌 卌 III | 13 | 0,07 | 7,0 % |
| 2,33 | 卌 卌 III | 13 | 0,07 | 7,0 % |
| 2,34 | 卌 卌 卌 III | 18 | 0,09 | 9,0 % |
| 2,35 | 卌 卌 卌 卌 I | 21 | 0,11 | 11 % |
| 2,36 | 卌 卌 卌 II | 17 | 0,09 | 9,0 % |
| 2,37 | 卌 卌 卌 | 15 | 0,08 | 8,0 % |
| 2,38 | 卌 II | 7 | 0,04 | 4,0 % |
| 2,40 | 卌 卌 III | 13 | 0,07 | 7,0 % |

c) 2,30 m   d) Aproximadamente 2,33 m

15. a) Cantidad de ramos vendidos por el Día de las Madres. Variable cuantitativa.
b) Numérica   c) Tabla 1.18

Tabla 1.18

| Tipos de ramos de acuerdo con la cantidad de flores | Cantidad de ramos (frecuencia absoluta) | Frecuencia relativa |
|---|---|---|
| 6 | 4 | 0,13 |
| 10 | 8 | 0,27 |
| 12 | 9 | 0,30 |
| 18 | 5 | 0,17 |
| 24 | 4 | 0,13 |
| | 30 | 1,00 |

d) El ramo de 12 flores e) El 30 %

f) El gráfico de barras pues me permite hacer la comparación de la cantidad de ramos vendidos de acuerdo con su tipo.

16. c) X La frecuencia relativa correspondiente a la edad de 16 años es el 25 %.

17. a) Población: Matrícula de la escuela que en este caso es de 500.
Muestra: Estudiantes seleccionados para hacer la investigación que en este caso es 40.
b) Motivación por el estudio de las Matemáticas
c) Tabla 1.19

Tabla 1.19

| Categoría | Frecuencia absoluta | Frecuencia relativa |
|---|---|---|
| Siempre | 7 | 0,175 |
| Casi siempre | 6 | 0,15 |
| A veces | 14 | 0,35 |
| Casi nunca | 11 | 0,275 |
| Nunca | 2 | 0,05 |
| Total | 40 | 1,00 |

d) Categórica
e) Categoría más frecuente: A veces Categoría menos frecuente: Nunca
f) No es posible, pues la variable es cualitativa.

18. a) Cantidad de problemas resueltos por los estudiantes. Variable: Cuantitativa
b) 7 c) 5 estudiantes d) Tabla 1.20

Tabla 1.20

| Problemas resueltos | Frecuencia relativa |
|---|---|
| 20 | $\frac{3}{20}$ |
| 15 | $\frac{7}{20}$ |
| 12 | $\frac{5}{20}$ |
| 10 | $\frac{1}{10}$ |
| 5 | $\frac{3}{20}$ |

e) La cuarta parte f) Aprobó el 75 %

g) La media de la cantidad de problemas resueltos fue de 13 problemas.

19. a) –2 b) – 4 c) –1 d) –2 e) –3 f) –1 g) –3 h) –2 i) – 4
20. a) Variable: Tasa de mortalidad infantil. Cuantitativa
21. a) Curso Regular Diurno 34 947

    Curso por encuentros 22 794

    b) Se ofertó mayor cantidad de plazas a las carreras pedagógicas.

    c) El 12,5 % aproximadamente.
22. b) Hubo más frío a las 10 p.m.

    c) Descendió 8,5°

23.1. c) X La frecuencia relativa correspondiente a los 37 °C es 0,2.

23.2. Significa que en dos horarios diferentes la temperatura registrada fue de 38 °C.

24.1. a) La variable estadística es: Motivos por los cuales los jóvenes fuman.

b) Se clasifica como: Variable cualitativa

26. a) Verdadera b) Falsa c) Verdadera d) Falsa e) Falsa f) Falsa g) Verdadera h) Verdadera i) Falsa j) Falsa
28. c) X 90 puntos
29. a) No, porque la variable es cualitativa. b) Tabla 1.21

Tabla 1.21

| Preferencia | Frecuencia absoluta | Frecuencia relativa |
|---|---|---|
| IPVCE | 9 | 0,30 |
| ETP | 6 | 0,20 |
| IPM | 5 | 0,17 |
| EMCC | 7 | 0,23 |
| IPU | 3 | 0,11 |
| Total | 30 | 1,00 |

c) La moda es la preferencia por el IPVCE, porque es el dato que más se repite en este conjunto de datos.

30. c) X La tabla se completa para $x = 3$.
31. La moda
32. No hay moda, es amodal
33. c) X José
34. La respuesta correcta la tiene Marcos.
35. a) 2,07 b) $a$ c) $a + 1$
37. a) Falsa b) Falsa c) Falsa d) Verdadera. Ejemplo: 6; 4; 4; 2
38. Seleccionaría como salario medio más representativo $300,00 y me auxiliaría para tomar esa decisión en la mediana.
39. a) Sí y es que casi nunca se utiliza ese *software* en las clases de matemática en esas escuelas.

    b) En la mediana y en este caso es Casi nunca.

**Ejercicios del capítulo**

1. $-c > a$ 2. 60 % 3. c) 4. c) 5. 4)

6. a) $Q > P$ b) 2,22 7. En 7 h 8. $-\dfrac{8}{3} \in \mathbb{Q}$ 9. $A = B$

10. a) 1) $\dfrac{3^2}{2^4 \cdot 5^5 \cdot 7}$ 2) $2^{-4} \cdot 3^2 \cdot 5^{-5} \cdot 7^{-1}$

10. b) 1) $\dfrac{a^3 \cdot c^2}{b}$ 2) $a^3 \cdot b^{-1} \cdot c^2$

11. $0{,}7 \cdot 10^4$ 12. a) $Y = Z < X$ b) $N$

13. a) $\in$ b) $\in$ c) $\not\subset$ d) $\in$ e) $\subset$
f) $\in$ g) $\notin$ h) $\in$ i) $\notin$

14 a) Falsa b) Verdadera c) Falsa d) Falsa e) Verdadera
f) Verdadera g) Falsa h) Falsa i) Falsa j) Falsa

15. a) Total de estudiantes de la secundaria básica, y la muestra es la cantidad de estudiantes seleccionados que en este caso es de 30 estudiantes.
b) Cuantitativa discreta d) Tabla 1.22

Tabla 1.22

| Edad de los estudiantes | Frecuencia absoluta | Frecuencia relativa |
|---|---|---|
| 11 | 4 | 0,13 |
| 12 | 5 | 0,17 |
| 13 | 4 | 0,13 |
| 14 | 8 | 0,27 |
| 15 | 8 | 0,27 |
| 16 | 1 | 0,03 |

e) Tienen 11 años el 13 % de los estudiantes.
f) Tienen edad superior a 13 años, 17 estudiantes.
g) Las edades más frecuentes son 14 y 15 años. Moda.
h) La media y es 14 años.
i) La mediana es 14 años.

16. a) En \$80,00
b) En \$ 80,00

17. a) 84 puntos b) No se alteraría c) No, porque no hay moda.

18. Tabla 1.23

Tabla 1.23

| Opiniones | Frecuencia absoluta | Frecuencia relativa (en %) |
|---|---|---|
| Totalmente de acuerdo | 20 | 40 |
| De acuerdo | 12 | 24 |
| Indiferente | 7 | 14 |
| En desacuerdo | 7 | 12 |
| Totalmente en desacuerdo | 5 | 10 |

c) Moda: totalmente de acuerdo Mediana: de acuerdo
d) Sí, parece cierta esta afirmación.

# CAPÍTULO 2

## *Geometría plana y cálculo de cuerpos*

En este capítulo vas a ampliar el estudio de algunas de las figuras planas que conoces desde la primaria, nuevos conceptos de ángulos relacionados con la circunferencia, así como también, otras figuras que te permitirán resolver diferentes problemas geométricos de cálculo, demostración y construcción.

Antes debes realizar un repaso sistematizador, para el cual es importante que recuerdes los elementos de la circunferencia que estudiaste en séptimo grado, tales como el centro, el radio, el diámetro, los arcos, además, todas las propiedades relacionadas con estos. Después completarás tu estudio resolviendo los cinco primeros ejercicios del primer epígrafe u otros similares que te oriente tu profesor, así estarás en condiciones de enfrentar con éxito el estudio de los ángulos en la circunferencia. Te invitamos a que nos sigas…

## 2.1 Ángulos en la circunferencia

El grupo 8.º 3 está en el cumpleaños de Claudia. Todos se divierten de lo lindo.

Vivian mira el *cake* e imagina una gran circunferencia, figura geométrica que estudió en séptimo grado, en ese momento pensó si existe alguna propiedad geométrica para cortarlo en ángulos como los que ilustra la figura 2.1 y que ayude a decidir cuál es el mayor.

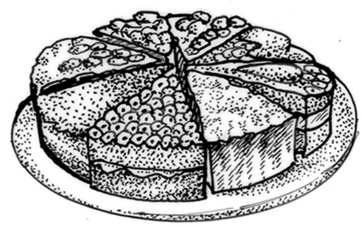


Figura 2.1

El estudio de nuevos conceptos de ángulo, relacionados con la circunferencia, que ahora iniciaremos te permitirá responder esta y otras muchas interrogantes.

**¡!** ¿Cuántas posibilidades existen de que dos rectas se corten y que al mismo tiempo sean secantes a una circunferencia? ¿Puedes dibujar todos los casos?

Estarás de acuerdo con que hay cuatro posibilidades y en cada una de ellas existe un ángulo particular (fig 2.2).

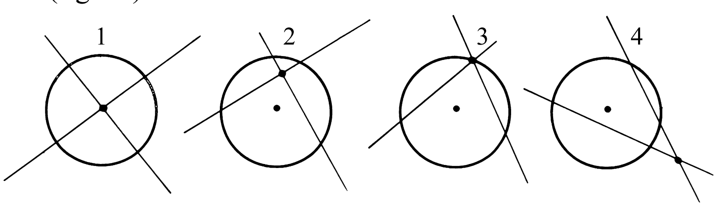



Figura 2.2

## 2.1.1 Ángulos centrales en la circunferencia

Observa la figura 2.2. ¿Qué distingue al ángulo determinado en el caso 1? ¿Cuál es la posición de su vértice respecto a la circunferencia trazada?

**Recuerda** *la definición de ángulo central:*

> Un **ángulo central** es aquel que tiene su vértice en el centro de una circunferencia y sus lados son radios de esta.

*Ejemplo 1:*

En la figura 2.3, el ángulo $AOB$ es un ángulo central de la circunferencia dada.

Observa que su vértice $O$ coincide con el centro de la circunferencia y que los puntos $A$ y $B$ de intersección de sus lados con la circunferencia determinan su arco correspondiente $\overset{\frown}{AB}$ situado en el interior de dicho ángulo y también su cuerda correspondiente $\overline{AB}$.

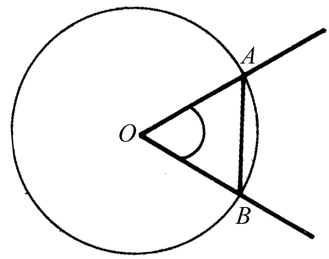


Figura 2.3

*Ejemplo 2:*

En la figura 2.4, aparece señalado el ángulo central $COD$. Observa que $C$ y $D$ son los puntos de intersección de sus lados con la circunferencia y que determinan su arco correspondiente $\overset{\frown}{CMD}$, situado en el interior de dicho ángulo y su cuerda correspondiente $\overline{CD}$.

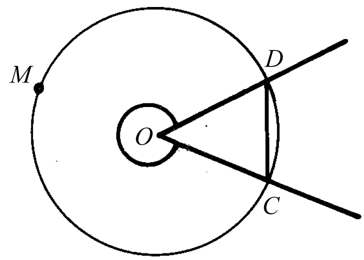


Figura 2.4

**Recuerda** *la definición de arco y cuerda correspondiente a un ángulo central:*

> El **arco correspondiente** a un ángulo central en una circunferencia es el arco que determinan sus lados al cortarla y cuyos puntos están contenidos en el interior de dicho ángulo.
>
> La **cuerda correspondiente** a un ángulo central es el segmento que determinan los puntos de intersección de sus lados con la circunferencia.
>
> La **amplitud de un ángulo central** es la amplitud de su arco correspondiente y recíprocamente la amplitud de un arco de circunferencia es la misma que la de su ángulo central.

En este grado solo trabajaremos con los ángulos centrales que tienen una amplitud menor o igual que 180°, como el que aparece en la figura 2.3.

Con las amplitudes de los arcos puedes operar de la misma forma que sabes hacerlo con las amplitudes de los ángulos.

*Ejemplo 3:*

En la figura 2.5, los puntos $A$, $D$, $C$ y $B$ están dispuestos consecutivamente en una de las semicircunferencias de la circunferencia de centro $O$ y diámetro $\overline{AB}$, $\angle AOD = 30°$; $\angle DOC = 120°$; $\overset{\frown}{CB} = 30°$.

Calcula la amplitud del $\overset{\frown}{AC}$.

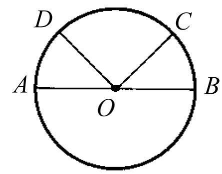



Figura 2.5

*Solución:*

Primera vía de solución (por suma de amplitudes de arcos: $\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{AC}$)

$\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC} = 30° + 120$ porque la amplitud del arco es la de su ángulo central

$= 150°$

$\overset{\frown}{AC} = 150°$

Segunda vía de solución (por diferencia de amplitudes de arcos: $\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{AC}$)

$\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CB} = 180° - 30°$

$\overset{\frown}{AC} = 150°$

R/ La amplitud del arco $AC$ es 150°.

*Ejemplo 4:*

En un informe de CITMA[25] aparece reflejado que cuando los colonialistas españoles llegaron a Cuba aproximadamente el 85 % de su superficie estaba constituida por bosques y que al triunfo de la Revolución el área de bosques había descendido al 12 % del total de nuestra superficie.

Este 85 % está representado en la figura 2.6 en un tipo de gráfica estadística que estudiaste en séptimo grado.

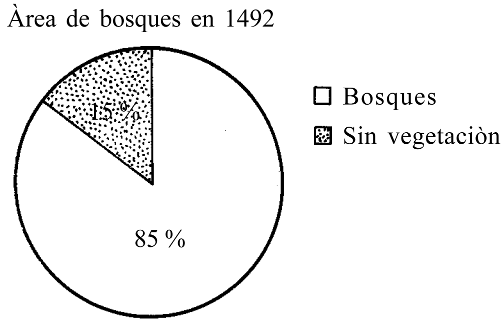



Figura 2.6

[25] CITMA: Ministerio de Ciencia, Tecnología y Medio Ambiente.

a) ¿En qué tipo de gráfica se representan los datos dados?
b) ¿Cuál es aproximadamente la amplitud del ángulo central correspondiente a la superficie que representan los bosques en 1492?
c) Comenta con tu destacamento de pioneros, ¿cómo contribuirán a preservar los árboles de la comunidad en que está ubicada la escuela?

*Solución:*

a) Los datos dados se representaron en una gráfica circular o de pastel.
b) Si denotamos por $x°$ la amplitud del ángulo central que corresponde al ángulo del sector angular que representa el 85 % de la superficie de bosques en 1492, se tiene que:

Primera vía de solución (por tanto por ciento)

Determinar el 85 % de 360°: $\frac{85}{100} \cdot 360° = 306°$

Segunda vía de solución (por proporcionalidad)

$\left.\begin{array}{l} 100\,\% \rightarrow 360° \\ 85\,\% \rightarrow x° \end{array}\right\}$ de donde: $x = \frac{85 \cdot 360°}{100} = 306°$

Tercera vía de solución (por tanteo)

A un 75 % de la gráfica le correspondería un arco de:

$$\begin{array}{ccccc} 50\,\% & + & 25\,\% & = & 75\,\% \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 180° & + & 90° & = & 270° \end{array}$$

Del 25 % restante, que representa 90°, $\frac{1}{5}$ es el 5 % de la gráfica total y su doble es el 10 %, que debemos calcular para sumarlo al 75 % y obtener el 85 %, por tanto: $2\left(\frac{1}{5} \cdot 90°\right) = 2(18°) = 36°$.

Así, al 85 % de la gráfica correspondería un arco de (270 + 36°) = 306°.
Cuarta vía de solución (por porcentajes cómodos)

85 % = 75 % + 10 %

Luego como: $75\,\% = \frac{3}{4}$ y $10\,\% = \frac{1}{10}$

$$85\,\% \cdot 360° = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{10}\right) \cdot 360° = 270° + 36° = 306°,$$

pues: $\frac{3}{4} \cdot 360° = 270°$ y $\frac{1}{10} \cdot 360° = 36°$

R/ El ángulo central correspondiente al 85 % de la gráfica es de 306°.

### Teoremas sobre relaciones entre ángulos centrales, arcos y cuerdas

**Recuerda** *el teorema sobre ángulos centrales-arcos iguales*

*Teorema 1:*

| |
|---|
| En una circunferencia o en circunferencias iguales a ángulos centrales iguales corresponden arcos iguales. |

Premisa:

En la $C(O, OB)$, $\angle AOB$ y $\angle COD$ ángulos centrales tales que: $A$, $D$ y $C$ pertenecen a la circunferencia y que $\angle AOB = \angle COD$ (fig. 2.7 a).

Tesis: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

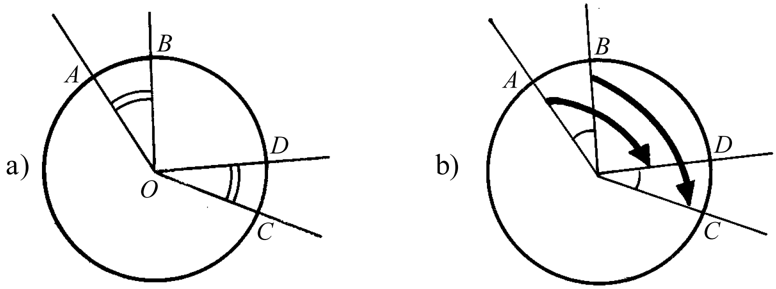



Figura 2.7

Demostración:

$\angle AOB = \angle DOC$, por lo tanto, existe un movimiento mediante el cual $\angle AOB$ se transforma en el $\angle DOC$. Consideremos que este movimiento es una rotación de centro $O$ y ángulo de rotación de amplitud $\alpha = \angle BOC$.

Por este movimiento se tiene que:

- El punto $O$, vértice común de esos dos ángulos y su imagen coinciden.
- La semirrecta $OB$ al recorrer el ángulo de rotación $\angle BOC$ se transforma necesariamente en la semirrecta $OC$.

Como además se cumple que:

$\angle BOC = \angle BOD + \angle DOC$ por suma de amplitudes de ángulos
$= \angle BOD + \angle AOB$ sustituyendo $\angle AOB = \angle DOC$
$= \angle AOB + \angle BOD$ por propiedad conmutativa de la adición de amplitudes de ángulos
$= \angle AOD$ por suma de amplitudes de ángulos

Es decir: $\angle AOB = \angle BOC$. De esta igualdad de ángulos: $\angle AOD$ se transforma en $\angle BOC$ por el movimiento considerado, y como ya sabemos que la semirrecta $OB$ se transforma por ese movimiento en la semirrecta *OC*, se puede afirmar que la semirrecta *OA* se transforma en la semirrecta *OD* (fig. 2.7 b)). Así:

*A* se transforma en un punto de la semirrecta *OC*. ¿En cuál?
*B* se transforma en un punto de la semirrecta *OD*. ¿En cuál?

- Como $\overline{OA} = \overline{OD}$ y $\overline{OB} = \overline{OC}$ por ser radios de la circunferencia, la imagen del punto *A* es el punto *D* y la imagen del punto *B* es el punto *C*.
- Luego por el movimiento considerado, $\overset{\frown}{CD}$ es imagen de $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

l. q. q. d.

*Recíproco del teorema sobre ángulos centrales-arcos iguales*

*Teorema 2:*

| |
|---|
| En una circunferencia o en circunferencias iguales, a arcos iguales corresponden ángulos centrales iguales. |

Te proponemos que realices la demostración del teorema 2 de manera análoga a la del teorema 1.

*Ejemplo 5:*

En la figura 2.8, las circunferencias
$C_1(O_1; \overline{O_1A})$ y $C_2(O_2; \overline{O_2C})$ son iguales y
$\angle AO_1B = \angle CO_2D$, $AO_1B = \angle CO_2D$
Entonces se cumple que: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

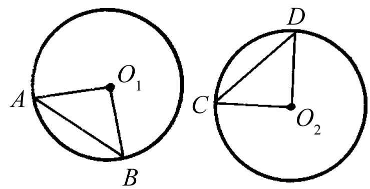


Figura 2.8

**Recuerda** el *teorema sobre ángulos centrales-cuerdas iguales*

*Teorema 3:*

| |
|---|
| En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, a ángulos centrales iguales corresponden cuerdas iguales. |

**Recuerda** *el recíproco del teorema sobre ángulos centrales-cuerdas iguales*

*Teorema 4:*

| |
|---|
| En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, a cuerdas iguales corresponden ángulos centrales iguales. |

El teorema 3 y su recíproco, el teorema 4, podrás demostrarlos fácilmente cuando estudies el epígrafe de igualdad de triángulos.

*Ejemplo 6:*

En la circunferencia de centro $O$ y diámetro $\overline{BD}$ de la figura 2.9: $\angle AOB = \angle COD$ entonces se cumple que: $\overline{AB} = \overline{CD}$.

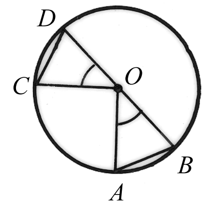



Figura 2.9

**¡!** Formula ahora de manera análoga a las parejas de teoremas anteriores, el teorema sobre la relación arco-cuerdas iguales y su recíproco.

Como no siempre los arcos o las cuerdas son iguales vamos a formular también un teorema que te permitirá comparar los arcos o las cuerdas, veámoslo a continuación.

**Recuerda** el *teorema sobre la comparación de arcos y cuerdas*

*Teorema 5:*

| |
|---|
| En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, al arco del mayor de dos ángulos centrales corresponde la mayor cuerda. |

*Ejemplo 7:*

En la figura 2.10:

$A$, $B$ y $C$ son puntos de la circunferencia de centro $O$ y diámetro $\overline{AB}$. $\angle AOC = 75°$.

Fundamenta que: $\overline{BC} > \overline{AC}$.

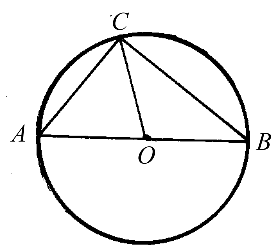



Figura 2.10

*Solución:*

$\angle AOC = 75°$ por datos
$\angle COB = 105°$ por ser adyacente con el ángulo $\angle AOC$
$\angle COB > \angle AOC$

Como en una circunferencia, a mayor ángulo central corresponde mayor arco: $\overset{\frown}{BC} > \overset{\frown}{AC}$ y por este teorema le corresponde también la mayor cuerda: $\overline{BC} > \overline{AC}$.

## *Ejercicios*

1. En la figura 2.11 aparecen una circunferencia y los puntos $A$, $B$, $C$ y $D$ que pertenecen a esta; $O \in \overline{AF}$ ; $O$ punto medio del diámetro $\overline{DB}$.

Enlaza la columna A con la B según corresponda.

| **Columna A** | **Columna B** |
|---|---|
| Radio | $O$ |
| Arco | $\overline{AF}$ |
| Diámetro | $AC$ |
| Recta tangente | $\overline{AD}$ |
| Recta secante | $\overline{AO}$ |
| Cuerda | $AB$ |
| Centro | $ED$ |

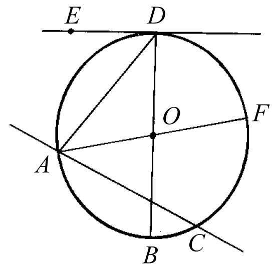


Figura 2.11

2. En la figura 2.12: $A$, $B$ y $C$ son puntos de la circunferencia de centro $O$ y radio $\overline{AO}$; $O$ punto de $\overline{AC}$, $\overline{OC} \perp \overline{CD}$.

Completa los espacios en blanco de forma tal que obtengas una proposición verdadera:

a) Son radios de la circunferencia, ___, ___ y ___.
b) Son cuerdas de la circunferencia, ___, ___ y ___.
c) La cuerda ____ es el doble del radio.
d) El arco que mide 180° es _____.
e) Los arcos que miden menos de 180° son ___ y ___.
f) La recta que contiene los puntos $C$ y $D$ recibe el nombre de _______________.

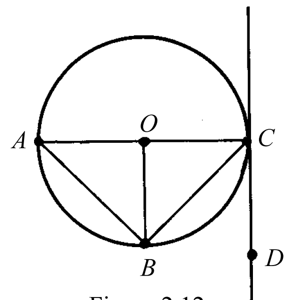


Figura 2.12

3. Completa los espacios de forma tal que obtengas una proposición verdadera:

a) La longitud de la cuerda mayor de una circunferencia de radio igual a 1,5 cm es _____________.
b) La tangente a una circunferencia en un punto $A$ y el radio de contacto en este punto forman un ángulo de amplitud igual a _______.
c) La recta que no tiene puntos comunes con una circunferencia se denomina recta ________________.
d) La recta que tiene dos puntos comunes con una circunferencia se denomina recta ________________.

4. Di si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones y fundamenta tu respuesta en caso de ser falsas.

a) ___ Si dos circunferencias tienen el mismo centro, entonces son iguales.
b) ___ Dos puntos cualesquiera de una circunferencia son centralmente simétricos con respecto al centro de esta circunferencia.
c) ___ La longitud del radio de una circunferencia es igual al 50 % de la longitud del diámetro de esta circunferencia.
d) ___ Una circunferencia es simétrica respecto a cualquier recta que pase por su centro.

5. Construye una circunferencia de 0,2 dm de radio e indica dos puntos $A$ y $B$, que pertenezcan a ella. Traza la cuerda $AB$, la secante $OB$ y una tangente por el punto $A$.
6. En la figura 2.13, los puntos $C$, $D$ y $E$ pertenecen a la circunferencia de centro $O$ y diámetro $\overline{AB}$. Enlaza con una flecha, el arco de la columna I con el ángulo central que le corresponde de la columna II.

| I | II |
|---|---|
| $\overset{\frown}{CBD}$ | $\angle COA$ |
| $\overset{\frown}{AC}$ | $\angle DOB$ |
| $\overset{\frown}{CD}$ | $\angle AOD$ |
| $\overset{\frown}{BD}$ | $\angle DOC$ |

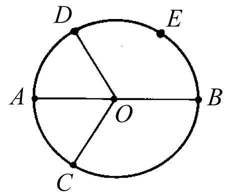


Figura 2.13

7. La circunferencia de centro $O$ y radio $\overline{AO}$ de la figura 2.14 contiene los puntos $B$, $C$ y $D$.

$\overline{AB} = \overline{CD}$, $\angle BOC = 38°$ y $\angle AOD = 82°$.

Completa los espacios en blanco de forma tal que se obtenga una proposición verdadera.

a) Los arcos $\overset{\frown}{AD}$ = ___ y $\overset{\frown}{BC}$ = ____
b) Los arcos $\overset{\frown}{AB}$ = ___ y $\overset{\frown}{CD}$ = ____
c) La amplitud de $\angle AOB$ = ___ y $\angle COD$ = ___

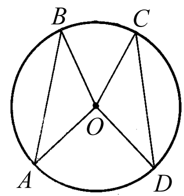


Figura 2.14

8. En la figura 2.15, los puntos $A$, $B$, $C$ y $D$ pertenecen a la circunferencia de centro $O$ y radio $\overline{OD}$ que también cumple que:

- $\overline{AB} = \overline{CD}$
- $\angle AOB = 67{,}5°$

Calcula las amplitudes del $\angle COD$ y $\overset{\frown}{AB}$.

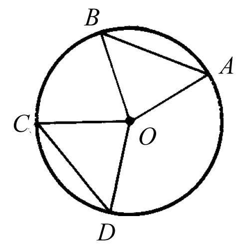


Figura 2.15

9. En la figura 2.16, se tiene una circunferencia de centro $O$ y de 2,0 cm de radio, $\overline{AB}$ es una cuerda, la semirrecta $CB$ es tangente a la circunferencia en el punto $B$, los puntos $A$, $O$, $D$ y $C$ están alineados y $\angle OCB = 30°$.

a) Calcula $\angle COB$, $\angle DAB$, $\angle ABO$ y $\angle ABC$.
b) Calcula $\overset{\frown}{BDA}$.

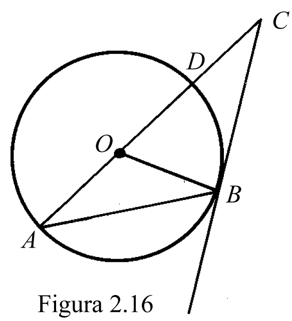


Figura 2.16

10. En la figura 2.17, $S$, $Q$ y $P$ son puntos de la circunferencia de centro $O$ y radio $\overline{OR}$, $\overline{OR} \perp \overline{SQ}$ y $\angle SOQ = 70°$.

Selecciona la respuesta correcta:

a) El triángulo $OSQ$ es:
acutángulo obtusángulo rectángulo

b) $\overset{\frown}{SR} < \overset{\frown}{RQ}$ $\overset{\frown}{SR} = \overset{\frown}{RQ}$ $\overset{\frown}{SR} > \overset{\frown}{RQ}$

c) La amplitud de $\overset{\frown}{PR}$ es:
105° 140° 175° Otra amplitud

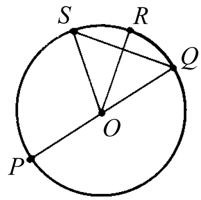


Figura 2.17

11. En la figura 2.18: $C_1\left(O_1;\overline{O_1B}\right) = C_2\left(O_2;\overline{O_2C}\right)$

$A$ punto de $C_1\left(O_1;\overline{O_1B}\right)$

$D$ punto de $C_2\left(O_2;\overline{O_2C}\right)$

$A$, $B$, $C$ y $D$ puntos de los lados del triángulo $O_1RO_2$ isósceles de base $\overline{O_1O_2}$. Si $\angle R = 40°$, calcula $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{CD}$.

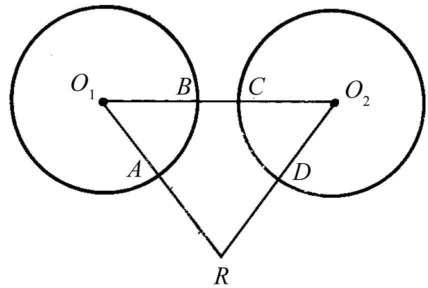


Figura 2.18

12. En la figura 2.19, es dada una circunferencia de centro $O$ y radio $\overline{OD}$.

$AB \parallel DC$; $\overset{\frown}{BD} = 30°$ y $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

Determina la amplitudes de: $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{DC}$, $\overset{\frown}{ABC}$ y $\angle DOC$.

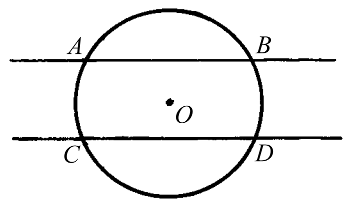


Figura 2.19

13. En la figura 2.20 se han trazado una circunferencia de centro $O$ y radio $\overline{OC}$, las cuerdas iguales $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, con el $\overset{\frown}{AB} = 140°$.

a) Calcula $\overset{\frown}{AC}$.

b) Clasifica el $\Delta ABC$ según la longitud de sus lados.

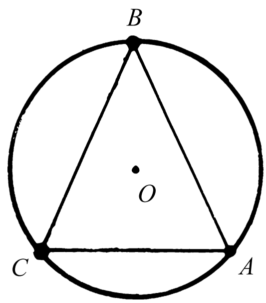


Figura 2.20

14. ¿Qué amplitud tiene el ángulo menor formado por las agujas del reloj a las 8:00 a.m.?

15. En la figura 2.21, los puntos $A$, $B$, $D$ y $E$ pertenecen a la circunferencia de centro $O$ y radio $\overline{OC}$, tal que se cumple:

$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} = 36°$ y $\overset{\frown}{AED} = 3\,\overset{\frown}{AB}$

Entonces la amplitud del $\angle AOC$ es:

144°   108°   72°   216°   Otra amplitud

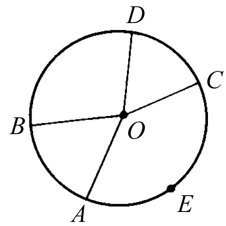



Figura 2.21

16.* En la figura 2.22: $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son cuerdas de la circunferencia de centro $O$ y radio $\overline{OC}$, $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.

Demuestra que son iguales $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

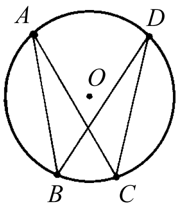



Figura 2.22

## 2.1.2 Ángulos inscritos en la circunferencia

**¡!** Piensa de nuevo en las posibilidades que dibujaste al inicio del epígrafe sobre dos rectas que se corten y al mismo tiempo sean secantes a una circunferencia (fig. 2.2).

- No es difícil para ti identificar en el caso 1 dos parejas de ángulos centrales.
- ¿Qué distingue al ángulo determinado en el caso 3?
- ¿Cuál es la posición del vértice del ángulo determinado en ese caso?

**Recuerda** *la definición de ángulo inscrito:*

| |
|---|
| El ángulo formado por la unión de dos semirrectas de origen común, cuyo vértice pertenece a una circunferencia y cuyos lados intersecan a la circunferencia en otros dos puntos se denomina **ángulo inscrito a la circunferencia.** |

*Ejemplo 8:*

En la figura 2.23, el $\angle ABC$ es un ángulo inscrito en la circunferencia de centro $O$. Observa que su vértice es el punto $B$ que pertenece a la circunferencia y los lados la intersecan en los puntos $A$ y $C$, entonces el arco $AC$ es el arco correspondiente al ángulo inscrito $ABC$. Es correcto también decir, el ángulo inscrito $ABC$ correspondiente a la cuerda $AB$ o al arco $AC$.

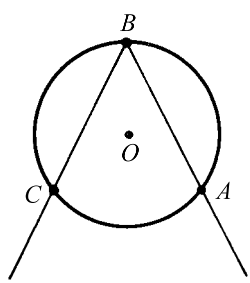



Figura 2.23

*Ejemplo 9:*

¿Cuál es la posición del centro de una circunferencia con respecto a sus ángulos inscritos? Dibuja todos los casos posibles.

*Solución:*

Los casos posibles puedes observarlos en la figura 2.24.

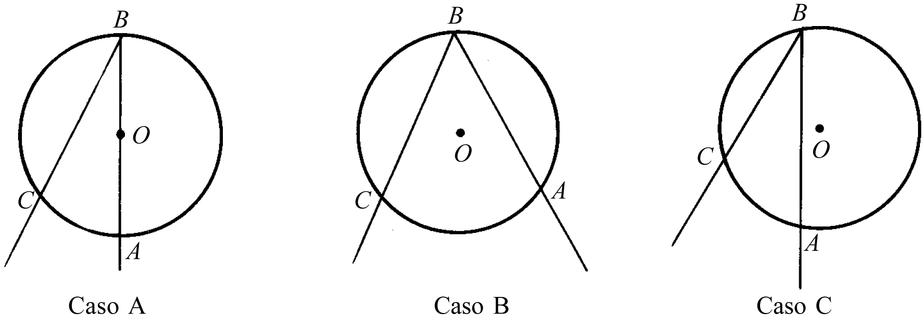



Figura 2.24

**Recuerda** *el teorema de la amplitud de un ángulo inscrito:*

*Teorema 6:*

> La amplitud de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad de la amplitud de su arco correspondiente.

Demostremos este teorema, para lo cual consideremos un ángulo inscrito $ABC$ en una circunferencia cualquiera de centro $O$, cuyo arco correspondiente es $\overset{\frown}{AC}$.

Tesis: $\angle ABC = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$

Como este ángulo puede ocupar diferentes posiciones en la circunferencia es conveniente ahora hacer una diferenciación de casos, como la que aparece en la figura 2.24 del ejemplo 9, y demostrar por separado cada caso.

**Caso A**

El centro de la circunferencia está sobre un lado del ángulo.

Demostración:

(Ver figura 2.25)

Tracemos el radio $OC$ y obtenemos el $\Delta OBC$.

$\overset{\frown}{AC}$ y $\angle AOC$ tienen la misma amplitud por tratarse de un ángulo central y su arco correspondiente.

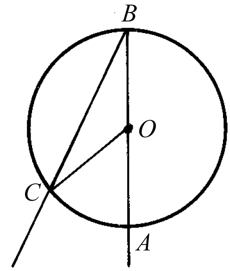



Figura 2.25

$\angle AOC = \angle OBC + \angle OCB$ por la propiedad del ángulo exterior en el $\Delta OBC$

$\angle AOC = 2\angle OBC$ porque $\angle OCB = \angle OBC$ por ángulos base del $\Delta OBC$ isósceles

$\angle AOC = 2\ \angle ABC$ porque $\angle OBC = \angle ABC$ porque $O \in AB$.

De donde: $\dfrac{\angle AOC}{2} = \angle ABC$ luego: $\angle ABC = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$. l. q. q. d.

**Caso B**

El centro de la circunferencia es un punto interior del ángulo $ABC$.

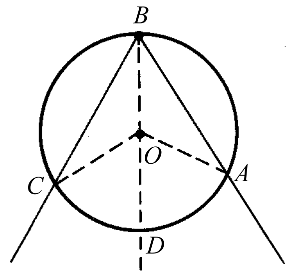



Figura 2.26

Demostración:

(Ver figura 2.26)

Haremos la demostración basándonos en el caso A.
Trazamos la semirrecta $BD$ que pasa por $O$, el $\angle ABC$ queda dividido en dos ángulos: $\angle ABD$ y $\angle DBC$ y el arco $\overset{\frown}{AC}$ en los arcos $\overset{\frown}{AD}$ y $\overset{\frown}{DC}$.

Luego: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC}$ y $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$ (I)

$\angle ABD = \dfrac{AD}{2}$ (II) y $\angle DBC = \dfrac{DC}{2}$ (III) por el caso A ya demostrado.

Sustituyendo (II) y (III) en (I) se llega a la tesis por suma de arcos:

$$\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \text{ luego } \angle ABC = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \text{ l. q. q. d.}$$

**Caso C**

El centro de la circunferencia es un punto exterior al ángulo $ABC$.

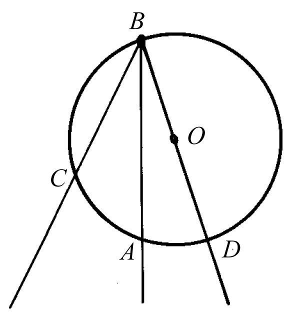



Figura 2.27

Demostración:

(Ver figura 2.27)

La demostración podemos hacerla también basándonos en el caso A.

Traza el diámetro $\overline{BD}$ y prolóngalo para formar los $\angle ABD$ y $\angle CBD$, ambos inscritos.

$\angle ABC = \angle CBD - \angle ABD$ (I) por diferencia de amplitudes de ángulos.

Se cumple, por el caso A ya demostrado: $\angle CBD = \dfrac{\overset{\frown}{CD}}{2}$ (II)

Se cumple, por el caso A ya demostrado: $\angle ABD = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2}$ (III)

Sustituyendo (II) y (III) en (I): $\angle ABC = \dfrac{\overset{\frown}{CD}}{2} - \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ por diferencia de arcos

Se llega a la tesis: $\angle ABC = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ l. q. q. d.

**¡!** La profesora de Matemática dejó de tarea una actividad para investigar, en la cual pidió construir una circunferencia, determinar en esta un arco cualquiera y trazar algunos ángulos inscritos correspondientes a él.
Para medir todos los ángulos trazados y a partir de esto arribar a una conclusión con respecto a sus amplitudes, Alicia construyó una figura similar a la figura 2.28, en la cual $\angle ABE$, $\angle ACE$ y $\angle ADE$ son inscritos correspondientes al arco $\overset{\frown}{AE}$. Raúl dijo que no era necesario hacer mediciones porque se podía aplicar directamente a los tres ángulos el teorema 6. Haz tú también una figura similar a la de Alicia y compara el procedimiento seguido por ella con la idea dada por Raúl y saca tu propia conclusión.

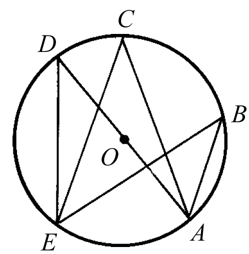


Figura 2.28

**Recuerda** *el teorema sobre ángulos inscritos en el mismo arco:*

*Teorema 7:*

| |
|---|
| Los ángulos inscritos en una circunferencia a los cuales les corresponde el mismo arco son iguales. |

**R¡!** Cuando se revisó la tarea, se pudo apreciar que este teorema confirma los resultados que obtuvo Alicia al resolver la tarea de Matemática.
Esteban también llegó a igual resultado que Alicia, pero la profesora le dijo que sin proponérselo, al mismo tiempo encontró otro teorema. ¿Saben por qué? Pues, porque el arco que corresponde a los ángulos inscritos que dibujó Esteban es una semicircunferencia. El teorema siguiente es al que se refería la profesora y cuando lo leas podrás entender mejor lo que ella dijo.

**Recuerda** *el teorema de Tales:*

*Teorema 8:*

| |
|---|
| Si a un ángulo inscrito en una circunferencia le corresponde un arco que es una semicircunferencia o su cuerda correspondiente es un diámetro, entonces es un ángulo recto. |

Observa que el teorema de Tales es un caso particular del teorema 6.

*Ejemplo 10:*

En la figura 2.29, el $\angle ACB$ está inscrito en la circunferencia de centro $O$ y diámetro $AB$.
Halla la amplitud del $\angle ACB$

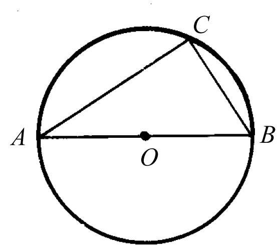


Figura 2.29

*Solución:*

$\angle ACB = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ por ser un ángulo inscrito, pero el arco $AB$ es una semicircunferencia, luego $\overset{\frown}{AB} = 180°$ y $\angle ACB = 90°$.

**Recuerda** *el recíproco del teorema de Tales:*

*Teorema 9:*

| |
|---|
| Si un ángulo inscrito en una circunferencia es recto, entonces su arco correspondiente es una semicircunferencia y la cuerda correspondiente es un diámetro. |

*¿Quién fue Tales?*

*Tales de Mileto (625-546 a.n.e.) (fig. 2.30) nació en Mileto. Hijo de un rico comerciante, realizó en su juventud muchos viajes por Egipto y Babilonia, quizás sea esta una de las principales fuentes de sus conocimientos matemáticos.*
*Se consideró por los helenos como un hombre de inteligencia superior. Entre sus principales aportes científicos están: el cálculo de la altura de la pirámide de Keops, el cálculo de la distancia de una nave en el mar respecto a la costa, el teorema que acabas de estudiar, entre otros.*


Figura 2.30

*Fue también un excelente astrónomo, pues predijo el eclipse solar que ocurrió en el año 585 a.n.e.*[26] *Por todos estos motivos se le califica como el primero de los siete sabios de la Antigua Grecia.*

Traza en tu cuaderno de trabajo, un ángulo central y un ángulo inscrito que les corresponda el mismo arco, como puedes observar en la figura 2.31, luego mide sus amplitudes con el semicírculo graduado y compáralas. ¿A qué conclusión llegaste? ¿Se cumplirá siempre esta relación?

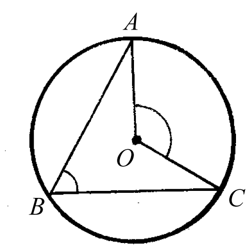


Figura 2.31

[26] Luis J. Davidson: ob. cit.

**Recuerda** *el teorema relación ángulo central-ángulo inscrito:*

*Teorema 10:*

| |
|---|
| Si a un ángulo central y a un ángulo inscrito en una circunferencia les corresponde el mismo arco, entonces la amplitud del ángulo inscrito es igual a la mitad de la amplitud del ángulo central. |

*Ejemplo 11:*

En la circunferencia de la figura 2.32, el $\angle ABC = 68°$. Determina la amplitud del $\angle ADC$.

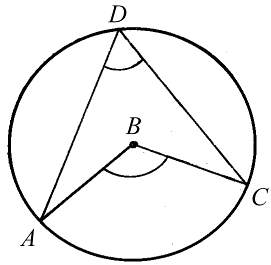



Figura 2.32

*Solución:*

Por el teorema anterior su amplitud es igual a la amplitud del ángulo central que le corresponde el mismo arco:

$$\angle ADC = \frac{\angle ABC}{2} = \frac{68°}{2} = 34°$$

R/ La amplitud del $\angle ADC$ es 34°.

Analiza de nuevo la figura 2.2 del inicio del epígrafe sobre las posibilidades de dos rectas que se cortan y al mismo tiempo son secantes a una circunferencia.

¿Qué distingue al ángulo determinado en los casos 2 y 4? ¿Cuál es la posición del vértice del ángulo determinado en estos casos respecto a la circunferencia?

¿Puedes clasificar los ángulos de los casos 2 y 4 como uno de los ángulos estudiados? Por supuesto que no.

## *Ejercicios*

1. En la figura 2.33: $A$, $B$, $C$ y $D$ son puntos de la circunferencia de centro $O$ y diámetro $\overline{AC}$ y $\overset{\frown}{AD} = 94°$. Selecciona de las siguientes afirmaciones cuál es la verdadera.

   a) ___ $\angle ABC = 94°$
   b) ___ $\angle ACD = 94°$
   c) ___ $\angle ACD = 47°$

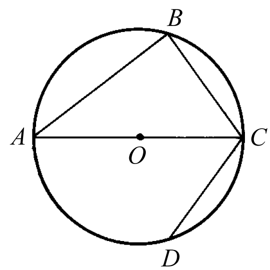



Figura 2.33

2. En la figura 2.34, $\angle ACB$ y $\angle ADB$ están inscritos en la circunferencia de centro $O$ y radio $\overline{OC}$, $\angle ACB = 35°$. Enlaza los ángulos de la columna I con la amplitud que les corresponde en la columna II de forma tal que se obtenga la respuesta correcta.

| I | II |
|---|---|
| $\angle AOB$ | 35° |
| $\angle ADB$ | 17,5° |
| $\overset{\frown}{AB}$ | 70° |

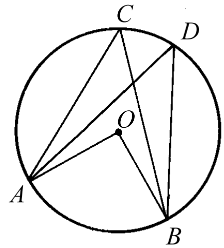


Figura 2.34

3. En la figura 2.35, los puntos $A$, $B$, $C$, $D$ y $E$ pertenecen a la circunferencia de centro $O$ y radio $\overline{OB}$.
$\angle ABE + \angle ACE + \angle ADE = 84°$, entonces $\overset{\frown}{AE}$ es igual a:

   a) ___ 84° b) ___ 28°
   c) ___ 56° d) ___ Falta información

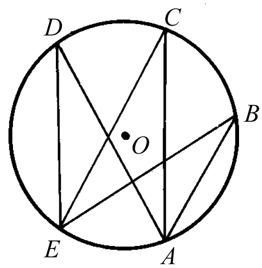


Figura 2.35

4. En la figura 2.36, $P$ y $Q$ son puntos de la circunferencia de centro $O$ y diámetro $\overline{MN}$ ; $\angle MQP = 40°$.
Selecciona la respuesta correcta:

   a) El triángulo $MNP$ es:

      acutángulo obtusángulo rectángulo

   b) La amplitud del $\angle PMN$ es:

      40° 90° 50°

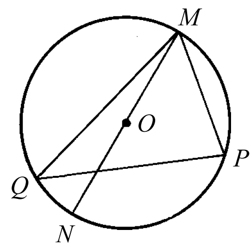


Figura 2.36

5. En la figura 2.37, los puntos $S$ y $R$ pertenecen a la circunferencia de centro $O$ y radio $\overline{OP}$, $QROP$ es un cuadrado.
La amplitud del $\angle RSP$ es igual a:

   a) ___ 22,5° b) ___ 45° c) ___ 90°

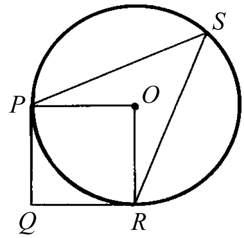


Figura 2.37

6. En la figura 2.38, $C$ y $B$; pertenecen a la circunferencia de centro $O$ y radio $\overline{OA}$ ; $\angle AOB = 2\angle ABO$, entonces la amplitud del $\angle ACB$ es igual a:

   a) ___ 92° b) ___ 60°
   c) ___ 46° d) ___ Otra amplitud

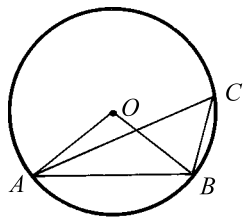


Figura 2.38

7. En la figura 2.39, $A$, $B$, $C$ y $D$ son puntos de la circunferencia de centro $O$ y radio $\overline{OE}$ ; $C$ punto medio de $\overset{\frown}{AE}$ y $\angle A = \angle E$.

   Si el $\angle B = 40°$, calcula $\angle AOE$.

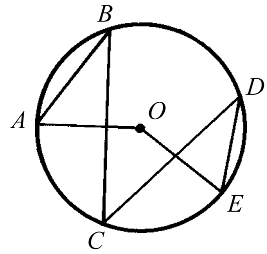


Figura 2.39

8. En la figura 2.40: $B$, $C$ y $D$ son puntos de la circunferencia de centro $O$ y radio $\overline{OA}$ ; $B$, $E$, $O$, $D$ puntos alineados.

8.1. Completa el espacio en blanco:

   a) Un ángulo central es $\angle$____
   b) Un ángulo inscrito es $\angle$____

8.2. Selecciona la respuesta correcta:

   Si el $\angle AOC = 110°$, entonces $\overset{\frown}{ABC}$ tiene una amplitud de:

   a) 55° b) 110° c) 250° d) No se puede determinar

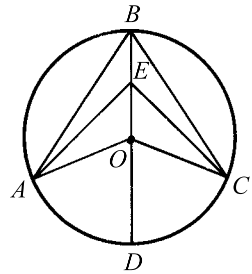


Figura 2.40

9. En la figura 2.41, $P$ es un punto de la circunferencia de centro $O$ y diámetro $\overline{MN}$ .
   Si el $\angle PMN = 3x + 15°$ y $\angle MNP = 5x - 5°$.

   a) Halla la amplitud del arco $NP$.
   b) Clasifica el triángulo $MNP$ según la longitud de sus lados.

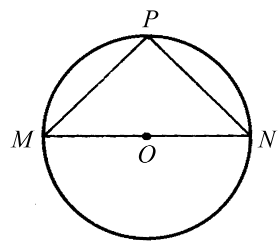


Figura 2.41

10. En la figura 2.42, se trazó una circunferencia de centro $O$ y radio $\overline{OB}$; $\overline{AB}$ es una cuerda de 0,4 dm de longitud, la semirrecta $CB$ es tangente a la circunferencia en el punto $B$, el punto $O$ pertenece a $\overline{AC}$ y $\angle COB = 60°$.

    a) Calcula la amplitud de $\angle OAB$ y $\angle ABC$.

    b) Calcula la longitud de $\overline{CB}$ .

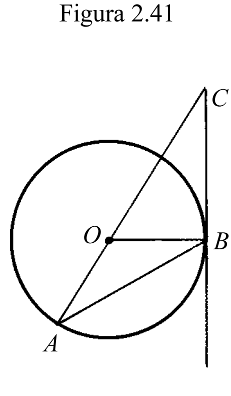


Figura 2.42

11. En la figura 2.43, $\overline{AC}$ es un diámetro de la circunferencia de centro $O$; $\overline{EB}$ es una cuerda, $\overset{\frown}{EC} = 100°$ y $\overline{AC} \perp \overline{BE}$. Calcula $\angle ABE$, $\angle ABC$ y $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$.

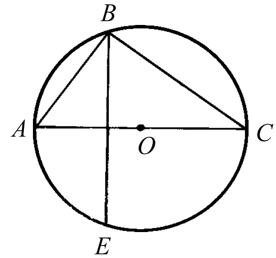



Figura 2.43

12. En la circunferencia de centro $O$ y radio $\overline{OR}$ de la figura 2.44: $\overline{OR} \perp \overline{SQ}$ y $\angle SOQ = 70°$.
Calcula $\overset{\frown}{PR}$ si $\overline{SQ}$ es una cuerda y $\overline{PQ}$ es un diámetro.

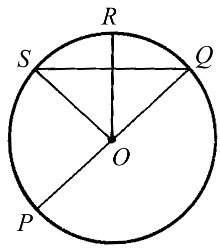



Figura 2.44

13. En la figura 2.45: $\overline{AD}$ y $\overline{CB}$ son diámetros de la circunferencia de centro $O$ y radio $\overline{OC}$, $\overset{\frown}{AB} = 60°$ y $\overline{AD} = 4{,}2$ cm.
   a) Calcula la amplitud de los arcos $\overset{\frown}{CD}$ y $\overset{\frown}{DB}$.
   b) Calcula el perímetro del $\Delta AOB$.

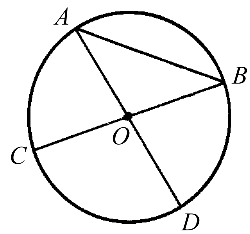



Figura 2.45

14. En la figura 2.46: $A$, $B$ y $C$ puntos de la circunferencia de centro $M$ y radio $\overline{MD}$, $AD$ bisectriz de $\angle A$; $\overset{\frown}{AC} = 140°$ y $\angle C = 50°$.
   a) Calcula la amplitud del $\angle BAC$ y los $\overset{\frown}{BDC}$ y $\overset{\frown}{ABD}$.
   b) ¿Puede ser $\overline{AD}$ un diámetro de la circunferencia? Fundamenta.

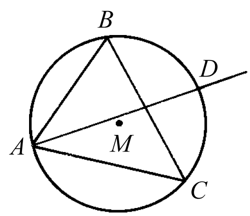



Figura 2.46

15. En la figura 2.47: $B$ y $D$ son puntos de la circunferencia de centro $O$ y diámetro $\overline{AC}$; $\angle ACB = 50°$ y $\overset{\frown}{AD} = 80°$.
   a) Halla la amplitud del $\angle B$.
   b) Prueba que $\overline{DB}$ es un diámetro de la circunferencia.

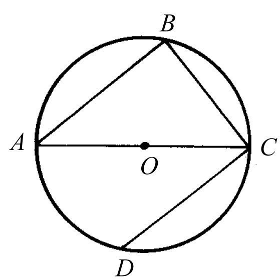



Figura 2.47

16. En la figura 2.48:

$P$ y $R$ son puntos de la circunferencia de centro $O$ y diámetro $\overline{MN}$.

a) Si $\widehat{MR} = 90°$, demuestra que $\overline{PR}$ es la bisectriz del $\angle MPN$.

b) Si $\overline{MP} = 4{,}0$ cm y $\overline{NP} = 3{,}0$ cm, calcula el área del triángulo $MNP$.

c) Calcula el perímetro del triángulo $MNP$.

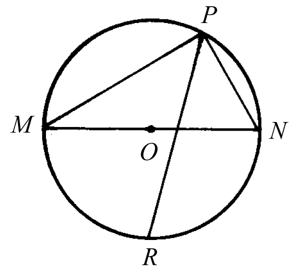



Figura 2.48

17. En la figura 2.49: $C$ y $D$ son puntos de la circunferencia de centro $O$ y diámetro $\overline{AB}$, $\overline{OD} \perp \overline{AB}$, $\angle OBC = 70°$.

Halla la amplitud de los $\angle ODC$ y $\angle BCD$.

Sugerencia: traza el radio $\overline{OC}$.

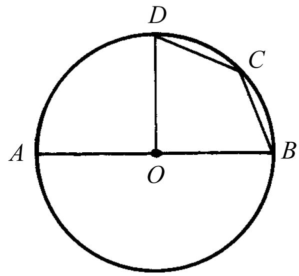



Figura 2.49

18. En la figura 2.50, los puntos $A$, $B$ y $C$ pertenecen a la circunferencia de centro $O$ y radio $\overline{AO}$, las intersecciones de la recta $AB$ con las semirrectas $CA$ y $CB$ son respectivamente los puntos $A$ y $B$, que determinan los ángulos $\alpha = 80°$ y $\beta = 50°$.

Halla la amplitud del ángulo $AOB$.

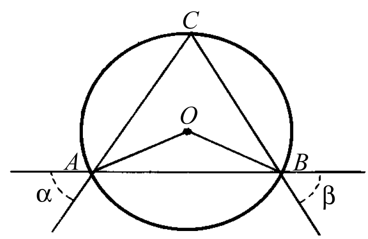



Figura 2.50

## 2.1.3 Ángulos seminscritos

Vamos a continuar con la idea de diferenciar casos de dos rectas que se corten y que a su vez corten a una circunferencia dada, pero ahora variaremos las exigencias, pensemos en los casos en que al menos una de las rectas que se cortan sea también tangente a la circunferencia dada. Dibuja todos los casos posibles. Analicemos los casos que dibujaste.

Existen cinco posibilidades:

**Caso 1:** Ambas rectas tangentes a la circunferencia

Observa la ilustración del caso 1 en la figura 2.51. ¿Cuál es aquí la posición del vértice del ángulo formado respecto a la circunferencia?

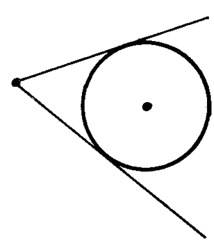


Figura 2.51

En el resto de los casos posibles, que están representados en la figura 2.52, solamente una de las rectas es tangente a la circunferencia.

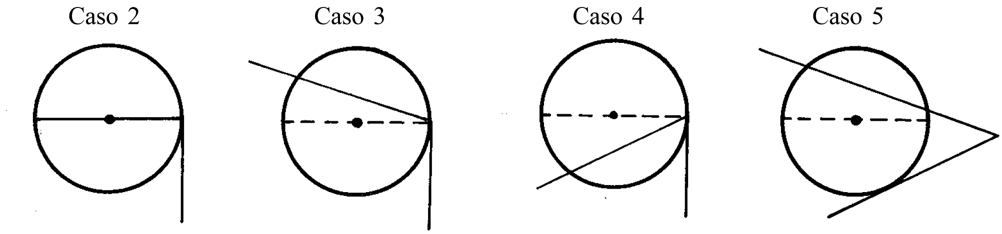



Figura 2.52

¿Cuál es la posición del vértice del ángulo formado en cada uno de estos casos respecto a la circunferencia? ¿Qué propiedades geométricas aparecen en ellos?

En los casos 2, 3 y 4, el ángulo formado tiene como vértice a un punto de la circunferencia, uno de los dos lados es tangente a la circunferencia y el otro lado secante. Este tipo de ángulo se define a continuación:

**Recuerda** *la definición de ángulo seminscrito:*

| |
|---|
| Un ángulo formado por la unión de dos semirrectas de origen común que tiene su vértice en la circunferencia y cuyos lados son uno tangente y el otro lado secante a dicha circunferencia se denomina **ángulo seminscrito.** |

*Ejemplo 12:*

En la figura 2.53:

$BC$ es tangente a la circunferencia de centro $O$ y diámetro $\overline{AB}$, en el punto $B$.

El ángulo $ABC$ es seminscrito y el $\widehat{AB}$ es su arco correspondiente, ya que el arco correspondiente a un ángulo seminscrito es el que está en su interior, comprendido desde su vértice hasta el punto de intersección de la circunferencia con el lado secante del ángulo.

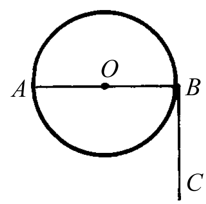



Figura 2.53

En la figura 2.52 identifica todos los casos de ángulos seminscritos que se han representado.

*Ejemplo 13:*

¿Cuál es la posición del centro de una circunferencia con respecto a todos los casos de ángulos seminscritos que se pueden presentar?

*Solución:*

(Ver figura 2.54)

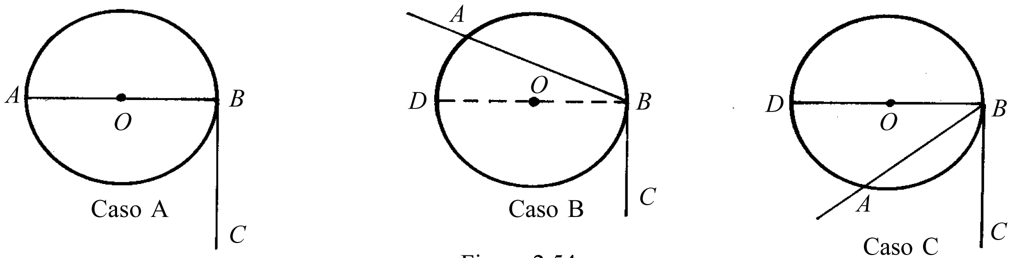



Figura 2.54

**Recuerda** *el teorema sobre la amplitud del ángulo seminscrito:*

*Teorema 11:*

| |
|---|
| La amplitud de un ángulo seminscrito en una circunferencia es igual a la mitad de la amplitud de su arco correspondiente. |

Vamos a demostrar este teorema, para lo cual consideremos en una circunferencia cualquiera de centro $O$ y radio $\overline{OB}$, un ángulo seminscrito $ABC$, de arco correspondiente $\widehat{AB}$.

Premisa: $\angle ABC$ seminscrito Tesis: $\angle ABC = \dfrac{\widehat{AB}}{2}$

Como este ángulo seminscrito puede ser de tres tipos diferentes según analizamos en el ejemplo 13. Vamos a realizar la demostración por separado para cada uno de esos casos, en los que se añade otra condición a la premisa.

**Caso A**

(Ver figura 2.54)

El centro de la circunferencia está en el lado $\overline{AB}$ del $\angle ABC$ que es una cuerda, por eso este es un diámetro.

Premisa: $\angle ABC$ seminscrito; $O \in \overline{AB}$

Demostración:

$\angle ABC = 90°$ (I) por propiedad de la tangente
$AB = 180°$ por ser una semicircunferencia
$AB = 2 \cdot 90°$ descomponiendo el producto

$\dfrac{AB}{2} = 90°$ (II) despejando.

Luego, de I y II : $\angle ABC = \dfrac{\widehat{AB}}{2}$ l. q. q. d.

**Caso B**

(Ver figura 2.54)

El centro de la circunferencia es un punto interior al ángulo.

Premisa: $\angle ABC$ seminscrito
$O$ punto interior del $\angle ABC$

Demostración:

Vamos a trazar un diámetro por el vértice $A$ para reducir este al caso anterior.

$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$ (I) por suma de amplitudes de ángulos

Pero $\angle ABD = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2}$ (II) por ángulo inscrito y $\angle DBC = \dfrac{\overset{\frown}{DB}}{2}$ (III) por el caso A.

Luego sustituyendo (II) y (III) en (I): $\angle ABC = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2} + \dfrac{\overset{\frown}{DB}}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

Por suma de arcos: $\angle ABC = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ l. q. q. d

Para demostrar el caso C te recomendamos considerar un diámetro por el vértice del ángulo, para reducirlo al caso A y aplicar diferencia de amplitudes de los arcos correspondientes para llegar a la tesis. ¿Te atreves?

**Recuerda** *el teorema relación ángulo inscrito-seminscrito-central*

*Teorema 12:*

- Si a un ángulo inscrito y a un ángulo seminscrito en una circunferencia les corresponde el mismo arco, entonces sus amplitudes son iguales.
- Si a un ángulo inscrito o a un ángulo seminscrito en una circunferencia les corresponde el mismo arco que a un ángulo central, entonces la amplitud del ángulo inscrito o seminscrito es igual a la mitad de la amplitud del ángulo central.

En los ejemplos siguientes podrás aplicar el teorema anterior.

*Ejemplo 14:*

Davel y sus amigos pertenecen al grupo de educación energética, ellos han construido nada menos que un ventilador casero que quieren acoplar a un panel solar. Para presentar el diseño del enrejado de las aspas, que puedes apreciar en la figura 2.55, necesitan calcular la amplitud de algunos ángulos. ¿Puedes ayudarlos en este empeño?
Se sabe que en el dibujo:

$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$, que la flecha representa una línea tangente y que las líneas continuas son diámetros.

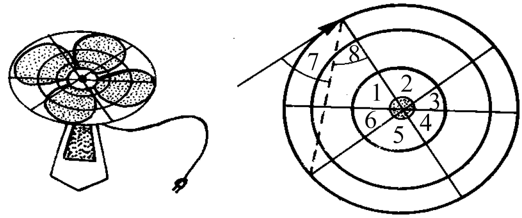



Figura 2.55

La línea discontinua es una cuerda que parte del punto de tangencia hasta el extremo de uno de los diámetros trazados.

*Solución:*

Los ángulos 1, 2, 3, 4, 5, 6 son iguales (por datos y porque forman parejas de ángulos opuestos por el vértice). A su vez cada uno mide 60°, ya que son seis ángulos centrales consecutivos: $\frac{360°}{6} = 60°$.

Al $\angle 7$ le corresponde el mismo arco que un ángulo central a = $\angle 1$ + $\angle 6$ = 120° y $\angle 7 = \frac{120°}{2} = 60°$ por ser ángulo seminscrito. Al $\angle 8$ le corresponde el mismo arco que al ángulo central $\angle 5$, luego: $\angle 8 = \frac{60°}{2} = 30°$ por ser un ángulo inscrito.

R/ Los ángulos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 son iguales a 60° y el $\angle 8 = 30°$.

*Ejemplo 15:*

En la figura 2.56, la recta *RQ* es tangente a la circunferencia de centro *T* y radio $\overline{TP}$; los puntos *P*, *S* y *Q* están alineados. Demuestra que los triángulos *PQR* y *SQR* son equiángulos.

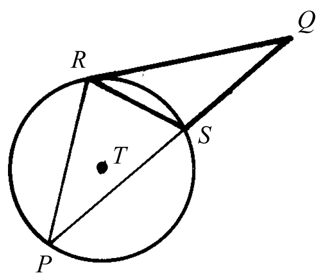



Figura 2.56

*Solución:*

La palabra *equiángulo* se forma añadiendo a la palabra *ángulo* el prefijo: *equi*, que significa *igual,* por eso *equiángulo* significa *de iguales ángulos.* Por tanto, debemos probar que ambos triángulos tienen respectivamente iguales sus ángulos.

$\angle PQR = \angle SQR$ por ser ángulo común
$\angle RPQ = \angle QRS$ por inscrito y seminscrito correspondientes al mismo arco
$\angle QRP = \angle RSQ$ por terceros ángulos

De las tres igualdades anteriores se cumple que ambos triángulos tienen sus ángulos respectivamente iguales, es decir, son equiángulos. l. q. q. d.

## *Ejercicios*

1. En la figura 2.57, los puntos $D$ y $G$ pertenecen a la circunferencia de centro $M$ y diámetros $\overline{EB}$ y $\overline{CF}$. Las rectas $CH$ y $BI$ son tangentes a la circunferencia dada respectivamente en los puntos $C$ y $B$.
   a) Nombra los ángulos inscritos.
   b) Nombra los ángulos seminscritos.

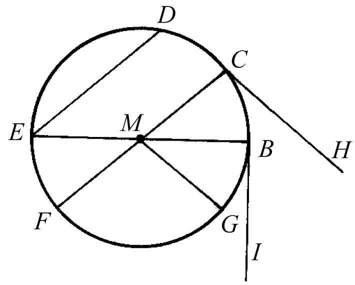


Figura 2.57

2. En la figura 2.58, la recta $AD$ es tangente a la circunferencia de centro $O$ y diámetro $\overline{CB}$, en el punto $A$; $\angle M = 50°$ y $\overline{AM} = \overline{MB}$ cuerdas.

   Calcula la amplitud de los ángulos: $\angle DAB$; $\angle AOB$; $\angle CAB$.

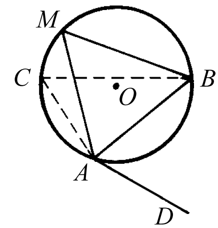


Figura 2.58

3. Fundamenta o refuta la afirmación siguiente:

   "*Un ángulo seminscrito cuyo arco correspondiente es una semicircunferencia es recto*".

   Utiliza una figura análoga a la 2.59 en tu análisis.

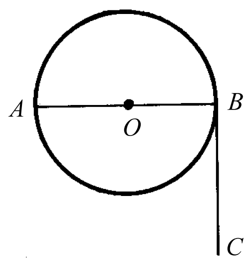


Figura 2.59

4. En la figura 2.60, las rectas $ON$ y $NP$ que se cortan en un punto $N$, exterior a la circunferencia de centro $Q$ y radio $\overline{PQ}$ son al mismo tiempo tangentes a dicha circunferencia, en los puntos $O$ y $P$ respectivamente. Fundamenta que el cuadriláte-ro $NPQO$ tiene dos ángulos iguales.

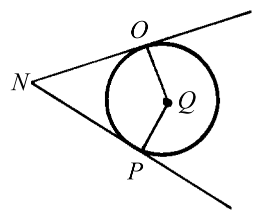


Figura 2.60

5. El punto $M$ pertenece a la circunferencia de centro $P$ y radio $\overline{PB}$ de la figura 2.61; la recta $AT$ es tangente a dicha circunferencia en el punto $A$ y $\angle TAB = 70°$.

   Calcula la amplitud del $\overset{\frown}{AB}$ y del $\angle AMB$.

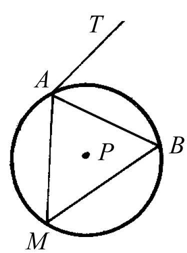


Figura 2.61

6. En la figura 2.62, los puntos $B$, $C$ y $D$ pertenecen a la circunferencia de centro $O$ y radio $\overline{OA}$:

$\angle ADB = 3x + y$ $\qquad$ $\angle DCA = x + y - 10°$
$\angle DBA = 2x + y - 40°$ $\qquad$ $\angle ACB = 3x - y + 50°$
$\angle AMB = 5x - y - 10°$

Calcula las amplitudes del $\angle AMB$ y del $\angle AOB$.

¿Qué tipo de ángulo es cada uno de ellos?

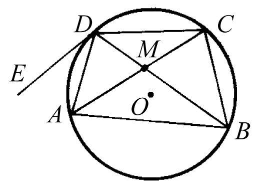



Figura 2.62

7. Demuestra que en una circunferencia cualquiera de centro $O$ y radio $\overline{OB}$, todo ángulo seminscrito $ABC$ de arco correspondiente $\overset{\frown}{AB}$, con el centro de la circunferencia punto exterior al ángulo $ABC$, entonces se cumple que: $\angle ABC = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$.

(Caso C del teorema 11 (fig. 2.54))

8. En la figura 2.63, la recta $AT$ es tangente a la circunferencia de centro $O$ y diámetro $\overline{CB}$, en el punto $A$, $\angle M = 46°$ y $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AM}$.

Calcula la amplitud de los ángulos:

$\angle ABM$; $\angle BAT$; $\angle MAB$; $\angle AOB$

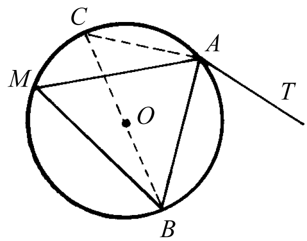



Figura 2.63

9. Demuestra el teorema 12 (fig. 2.64):

Si a un ángulo inscrito o a un ángulo seminscrito en una circunferencia les corresponde el mismo arco que a un ángulo central, entonces la amplitud del ángulo inscrito o seminscrito es igual a la mitad de la amplitud del ángulo central.

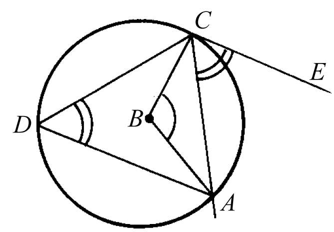



Figura 2.64

10. En la figura 2.65, se han trazado desde el punto $R$ dos tangentes a la circunferencia de centro $A$ y radio $\overline{AK}$, en los puntos $Q$ y $K$, respectivamente. ¿Quién hizo la afirmación correcta Rosa o Pepe? ¿Por qué?

Rosa: $\angle RQH = 90°$ porque $RQ$ es tangente a la circunferencia en $Q$, según los datos.

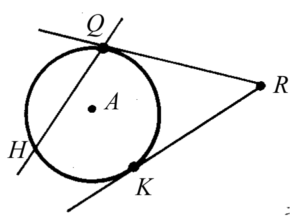



Figura 2.65

Pepe: $\angle RQH \neq 90°$ porque aunque $RQ$ es tangente a la circunferencia en $Q$, el ángulo recto se forma con el radio en el punto de tangencia y el lado $QH$ del ángulo no contiene un radio.

## 2.2 Longitud de la circunferencia y área del círculo

Hace mucho tiempo los hombres se esforzaron por calcular el perímetro y el área de figuras planas, entre las que se encontraba la circunferencia, por la importancia en la vida práctica de distintos objetos circulares, tales como el torno de alfarero, la rueda de hilar, la rueda de las carretillas u otros objetos rodantes.

*Estos cálculos se remontan aproximadamente a 2 000 años a.n.e. en el Antiguo Egipto, según se pudo conocer en los papiros egipcios con contenidos matemáticos, como el denominado Papiro de Rhind, nombre que le fue dado por el científico inglés que lo descubrió y que se encuentra actualmente en el Museo de Londres. Este papiro contiene 84 problemas de aplicación práctica, entre los que aparece el cálculo del área del círculo.*

*La cultura babilónica aplicó también el cálculo en la circunferencia y el círculo. Babilonia era una región situada entre los ríos Tigris y Éufrates, aproximadamente donde se encuentra actualmente la República de Irán. Los aportes científicos de los babilónicos llegaron a nuestra época por tablillas de barro de contenido matemático, que se conservan diseminadas en famosos museos del mundo y muchas de las cuales aún no han sido descifradas.*

En este epígrafe aprenderás cómo calcular la longitud de la circunferencia y el área del círculo, procedimientos que están basados en las ideas básicas que sobre ello tuvieron estas antiguas civilizaciones.

### 2.2.1 Polígonos inscritos y circunscritos

La inscripción de polígonos fue una de las primeras ideas del hombre para determinar la longitud de la circunferencia.

¿Qué significa esta idea? ¿Cuándo está inscrito un polígono en una circunferencia?

**Recuerda** *la definición de polígono inscrito:*

> Un polígono está **inscrito en una circunferencia** cuando todos sus vértices son puntos de dicha circunferencia.
>
> Si un polígono está inscrito en una circunferencia, entonces se dice que **la circunferencia está circunscrita** al polígono.

*Ejemplo 16:*

Juan Pablo observa la figura 2.66 y le dice a Rosario:

"En la figura existen dos polígonos y están inscritos en la circunferencia". Pero Rosario le refuta:

"Te equivocas, hay tres polígonos, pero solo el pentágono *ABCDE* está inscrito en esta, el cuadrilátero *AODE* y el pentágono *ABCDO* no lo están, porque su vértice *O* no es un punto de la circunferencia".

¿Quién hizo la afirmación correcta? ¿Por qué?

*Solución:*

Rosario hizo la afirmación correcta, porque solamente está inscrito el pentágono *ABCDE,* en los otros dos el punto O no pertenece a la circunferencia, por lo cual el cuadrilátero *AODE* y el pentágono *ABCDO* no están inscritos en la circunferencia.

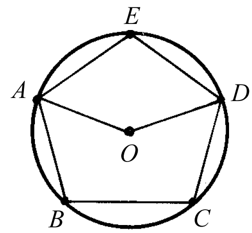



Figura 2.66

**Recuerda** *la definición de polígono circunscrito:*

| |
|---|
| Un polígono está **circunscrito a una circunferencia** si sus lados son tangentes a dicha circunferencia.<br>Si un polígono está circunscrito a una circunferencia, entonces se dice que **la circunferencia está inscrita** en el polígono. |

*Ejemplo 17:*

En la figura 2. 67, el polígono *ABCD* está circunscrito a la circunferencia de centro *O* y radio $\overline{OB}$. Podemos en este caso decir que la circunferencia está inscrita en el polígono.

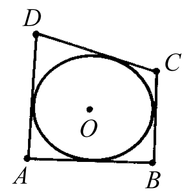



Figura 2.67

**¿Cómo inscribir o circunscribir un polígono?**

Si pensamos en el polígono más sencillo: el triángulo, siempre es posible inscribir o circunscribir un triángulo cualquiera. Un procedimiento para esto se basa en el estudio de sus rectas notables. Veamos cómo.

*Ejemplo 18:*

Dado un triángulo cualquiera *ABC* inscribe una circunferencia en él.

*Solución:*

1. Traza las bisectrices de dos de sus ángulos, del $\angle B$ y del $\angle C$. Sea *I* el punto de intersección de ambas bisectrices.
2. Construye la perpendicular desde *I* a uno de los lados del triángulo. Es este el radio *r* de la circunferencia inscrita, porque *I* equidista de los lados del triángulo.
3. Construye la circunferencia inscrita al $\Delta ABC$, con centro en *I* y radio *r* (fig. 2.68).

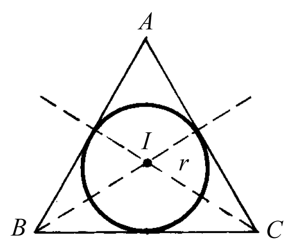



Figura 2.68

El trazado de las bisectrices te permite inscribir una circunferencia en un triángulo, pues el punto en que estas se cortan es el centro de la circunferencia inscrita, cuyo radio está determinado por la distancia de este punto a uno de los lados del triángulo. Con el centro y el radio ya está determinada de manera única la circunferencia inscrita y puedes trazarla.

*Ejemplo 19:*

Dado un triángulo cualquiera $ABC$ traza la circunferencia que lo circunscribe.

*Solución:*

1. Traza las mediatrices de dos de sus lados, del lado $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Sea $M$ el punto de intersección de ambas mediatrices.
2. Determina el radio $r$ de la circunferencia circunscrita desde $M$ a uno cualquiera de los vértices del triángulo.
3. Construye la circunferencia circunscrita al $\Delta ABC$, con centro en $M$ y radio $r$ (fig. 2.69).

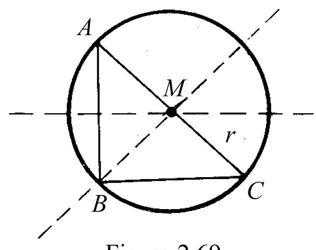


Figura 2.69

El trazado de las mediatrices te permite circunscribir una circunferencia a un triángulo, pues el punto en que estas se cortan es el centro de la circunferencia circunscrita, cuyo radio está determinado por la distancia de este punto a uno de los vértices del triángulo. Con el centro y el radio ya está determinada de manera única la circunferencia circunscrita y puedes trazarla.

## ¿Cómo inscribir o circunscribir otros polígonos?

Nuestro estudio estará limitado a inscribir o circunscribir solamente polígonos regulares.

A continuación te presentaremos algunos ejemplos sobre esto, pero antes vamos a definir algunos elementos importantes sobre los polígonos regulares inscritos o circunscritos y a formular algunas de sus propiedades.

*Ejemplo 20:*

En la figura 2.70 se han trazado las circunferencias inscrita y circunscrita de un polígono regular $ABCD$ de cuatro lados, por supuesto, se trata de un cuadrado. En este se destacan el centro $O$, el radio $r$ y la apotema $a$.

| *Elementos* | *Descripción* |
|---|---|
| Centro | Punto en que coinciden los centros de la circunferencia inscrita, la circunscrita y del polígono regular. |
| Apotema | Segmento perpendicular a un lado trazado desde el centro. La apotema es el radio de la circunferencia inscrita a un polígono. |
| Radio | Segmento que une el centro del polígono regular con uno cualquiera de sus vértices. Es también el radio de la circunferencia circunscrita al polígono. |

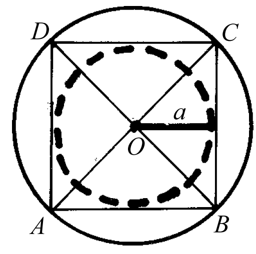


Figura 2.70

¿Cuál es la amplitud de los ángulos centrales que se asocian al cuadrado *ABCD* inscrito en la circunferencia trazada con la línea continua en la figura 2.70? Recuerda el procedimiento que aplicaste para determinar esta amplitud, porque lo vamos a utilizar en el ejemplo 21.

**Recuerda** *el teorema sobre la existencia de polígonos regulares inscritos y circunscritos*

*Teorema 13:*

| |
|---|
| Todo polígono regular se puede inscribir en una circunferencia. |
| Todo polígono regular se puede circunscribir a una circunferencia. |

El problema de construir un polígono regular de $n$ lados inscrito a una circunferencia de centro $O$ y de radio $r$ dada, se reduce a dividir la circunferencia en arcos iguales, utilizando el semicírculo. Para ello solo basta hallar la amplitud de un ángulo central $\alpha$ de la circunferencia dada, cuya amplitud se calcula de la forma: $\alpha = \dfrac{360°}{n}$.

Con este valor no hay más que tomar este ángulo sucesivamente $n$ veces alrededor del centro de la circunferencia. Los radios trazados dividirán a la circunferencia en $n$ arcos iguales cuyos extremos son los vértices del polígono deseado.

*Ejemplo 21:*

Construye un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 2,0 cm de radio.

*Solución:*

Describiremos los pasos de esta construcción:

1. Trazar la circunferencia con centro en $O$ y radio igual a 2,0 cm.
2. Calcular la amplitud de los ángulos centrales $\alpha$ para: $n = 5$ en la expresión: $\dfrac{360°}{n}$.

   Luego $\alpha = \dfrac{360°}{5} = 72°$
3. Trazar consecutivamente con centro $O$ cinco ángulos centrales de 72°, para ello puedes utilizar el semicírculo. De este modo, el ángulo completo en $O$ quedará dividido en cinco ángulos iguales, cuyos lados al cortar la circunferencia determinarán cinco puntos.
4. Unir mediante segmentos los cinco puntos obtenidos sobre la circunferencia, que son los vértices del polígono inscrito que se desea construir. Así, queda determinado el pentágono *ABCDE* de la figura 2.71.

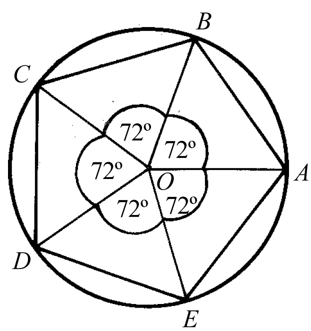



Figura 2.71

*Ejemplo 22:*

Construye un pentágono regular circunscrito a una circunferencia de 2,0 cm de radio.

*Solución:*

De forma análoga al ejemplo 21, para trazar un pentágono, describiremos los pasos de esta construcción, que puedes apreciar en la figura 2.72:

1. Por los puntos $A$, $B$, $C$, $D$ y $E$ se trazan las tangentes a la circunferencia de centro $O$ y radio $\overline{OA}$ .
2. Donde se cortan las tangentes se determinan cinco puntos que son los vértices del pentágono *FGHIJ*.

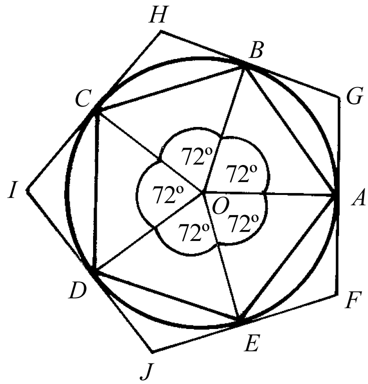



Figura 2.72

Realiza estas construcciones en tu libreta y comprueba que el lado del exágono regular es igual al radio de la circunferencia circunscrita, puedes hacerlo de diferentes formas:

Medir con un compás o una regla graduada.

Utilizar algún asistente geométrico, por ejemplo, el *Geómetra,* que puedes encontrar en el *software* educativo *Elementos Matemáticos.*

## *Ejercicios*

1. Identifica el término que se define en cada afirmación y escríbelo en las cuadrículas horizontales del acróstico (fig. 2.73).

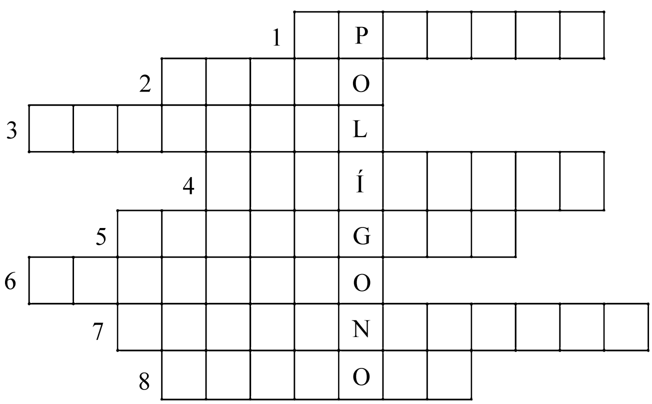



Figura 2.73

1. Segmento perpendicular trazado desde el centro de un polígono regular a uno de sus lados.
2. Paralelogramo que tienen cuatro lados iguales.
3. Segmento que une dos vértices no consecutivos de un polígono.
4. Recta perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento.
5. Nombre del polígono de cinco lados.
6. Nombre del polígono cuando sus vértices son puntos de una circunferencia.
7. Nombre del polígono cuando sus lados son tangentes a una circunferencia.
8. Nombre del polígono de seis lados.

2. De las siguientes proposiciones, determina cuáles son falsas y conviértelas en verdaderas.

   a) Todo pentágono es un polígono regular.
   b) Los ángulos centrales de los polígonos de 10 lados miden 36°.
   c) Un triángulo es un polígono regular si todos sus ángulos son iguales.
   d) Todo polígono se puede inscribir a una circunferencia.
   e) Todo polígono regular se puede circunscribir a una circunferencia.

3. Construye polígonos regulares inscritos en una circunferencia como se te indica en cada inciso.

   a) Un triángulo equilátero en una circunferencia de radio igual a 2,0 cm.
   b) Un cuadrado y un octágono en una circunferencia de diámetro igual a 25 mm.
   c) Un exágono de perímetro igual a 1,2 dm.

4. Construye la circunferencia circunscrita al exágono del ejercicio 3 c).
5. Trabaja con el asistente matemático *Geómetra,* construye varios polígonos inscritos y circunscritos a una circunferencia de radio *r*.
6. Completa los espacios en blanco de manera que se obtenga una proposición verdadera:

   a) La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un polígono regular de 11 lados es _______________.
   b) La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un polígono regular es igual a 1 260°, entonces el número de sus lados es ____________.
   c) La amplitud de un ángulo interior de un polígono regular de 15 lados es _____________.

7. En la figura 2.74, los lados del cuadrado *ABCD* son tangentes a la circunferencia de centro *O* y radio $r = 3{,}0$ cm en los puntos *M*, *N*, *P* y *Q*.
   Selecciona la respuesta correcta:

   a) La longitud de la apotema $\overline{OM}$ es:
   ___ 1,5 cm ___ 3,0 cm ___ 6,0 cm
   b) El perímetro del cuadrado *ABCD* es:
   ___ 12 cm ___ 24 cm$^2$ ___ 24 cm
   c) El área del cuadrado *ABCD* es:
   ___ 9,0 cm$^2$ ____ 24 cm$^2$ ____36 cm$^2$

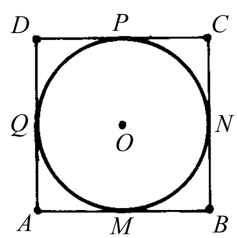


Figura 2.74

8. En la figura 2.75, el cuadrado *ABCD* está inscrito en la circunferencia de centro *O* y diámetro $\overline{AC} = 10,0$ cm. Calcula el área del cuadrado *ABCD*.

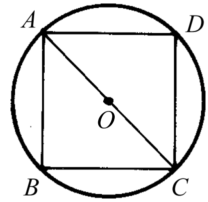



Figura 2.75

9.* Demuestra que la longitud de la diagonal de un cuadrado inscrito a una circunferencia es igual al diámetro de esta.

10. En la figura 2.76 está inscrito un polígono regular en la circunferencia de centro *O* y diámetro $\overline{AD} = 10$ cm. Completa los espacios en blanco de forma que se obtenga una proposición verdadera.

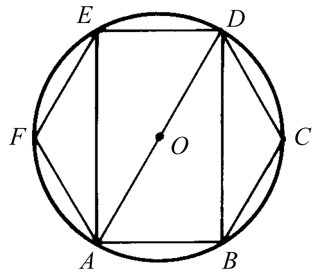



Figura 2.76

a) El triángulo *AEF* según sus lados se clasifica en __________________.
b) El triángulo *ADE* según sus ángulos se clasifica en: _______________.
c) La amplitud del arco *AFD* es igual a: _______.
d) La amplitud del arco *ACE* es igual a: _______.
e) El perímetro del polígono *ABCDEF* es igual a: _______.

## 2.2.2 Longitud de la circunferencia

La palabra perímetro proviene de las voces griegas *peri* que quiere decir **alrededor** y *metron* que quiere decir **medida,** esto se traduce como **la medida del borde.** En el caso de la circunferencia, que estudiaremos en este epígrafe, al perímetro se le denomina *longitud de la circunferencia.*

Desde la Antigüedad el hombre se percató que en la medida que una circunferencia era mayor se hacía también mayor su diámetro, lo que los llevó a pensar que seguramente existía determinada relación entre ambos. Te proponemos indagar sobre esa relación junto con Enrique y Ricardo.

**¡!** Enrique y Ricardo tomaron diferentes objetos de la vida cotidiana en forma de círculo como los que aparecen en la figura 2.77, para indagar lo que mide la longitud de su borde. ¿Cómo lo hicieron? Rodearon cada uno de estos objetos con un hilo, que después estiraban cuidadosamente sobre una regla para medir su longitud.


Figura 2.77

Ricardo tomó la moneda de un peso y al estirar el hilo obtuvo un segmento de 8 cm de longitud, que consideró la longitud de la circunferencia de la moneda. Enrique tomó la moneda de 5 centavos y obtuvo que la longitud de la circunferencia descrita por esa moneda es 6,8 cm (fig. 2.78).

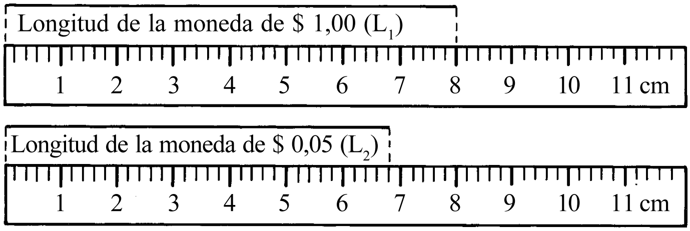



Figura 2.78

Al comprobar que en la medida que se tomaba una circunferencia de mayor diámetro, la longitud de la circunferencia era mayor les hizo suponer, que la longitud de una circunferencia depende de la longitud de su diámetro y decidieron determinar cuántas veces está contenido el diámetro de una circunferencia en su longitud.

Así verificaron que en cada circunferencia que midieron el diámetro está contenido completamente tres veces en su longitud y sobraba un pedazo pequeño, como puedes observar en la figura 2.79.

Siguiendo este procedimiento, al dividir la longitud de la moneda de $1,00, que es 8,0 cm, entre su diámetro de 2,54 cm obtuvieron:

$$\frac{L}{d} \approx \frac{8}{2{,}54} \approx 3{,}149\,606\,299\,212\,598\ldots \approx 3{,}14$$

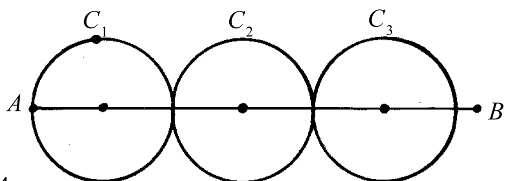



Figura 2.79

Las circunferencias construidas con el asistente *Geómetra* de la figura 2.80, también cumplen la misma relación.

Utiliza este asistente para comprobar esta relación en otras circunferencias.

¿Se obtendrán los mismos resultados?

Longitud $C_1$ $(O, \overline{OB}) = 8{,}00$ cm

$\overline{AB} = 2{,}55$ cm

$$\frac{LC_1}{\overline{AB}} = \frac{8{,}00}{2{,}55} \approx 3{,}14$$

Longitud $C_2$ $(O, \overline{OD}) = 10{,}00$ cm

$\overline{CD} = 3{,}18$ cm

$$\frac{LC_2}{\overline{CD}} = \frac{10{,}00}{3{,}18} \approx 3{,}14$$

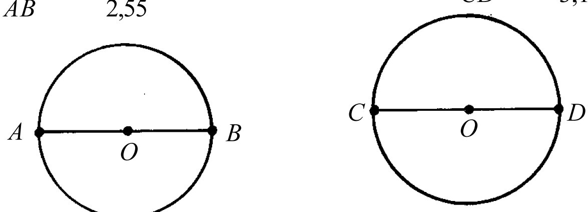



Figura 2.80

*En Grecia, allá por los años 287-212 a.n.e., el más genial de los matemáticos de la*

*Antigüedad, Arquímedes de Siracusa (fig. 2.81), utilizó este mismo procedimiento para calcular la longitud de la circunferencia, según el cual el cociente de la longitud de una circunferencia cualquiera entre la longitud de su diámetro es siempre el mismo.*
*Arquímedes también se percató de que el diámetro de una circunferencia estaba contenido en ella tres veces y un "pedacito", y que ese pedacito es un séptimo del diámetro. Estos fueron aproximadamente sus cálculos (fig. 2.82).*

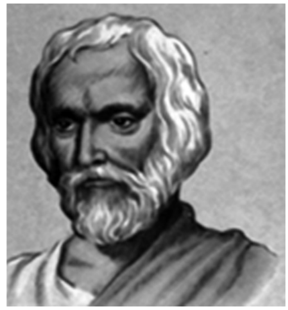


Figura 2.81

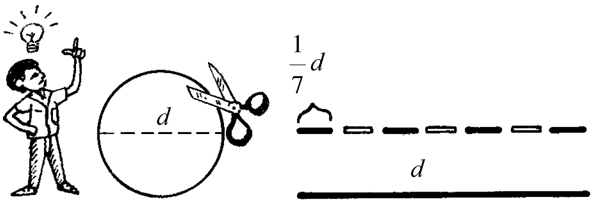



Figura 2.82

$$\frac{L}{d} = 3 + \frac{1}{7};\ 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} \approx 3{,}14 \qquad \frac{L}{d} \approx 3{,}14$$

De aquí surgió la idea para la fórmula de la longitud de la circunferencia.

La razón $\frac{L}{d}$ es un número que universalmente se designa con la letra griega π.

Este número es una constante que representa una expresión decimal infinita no periódica: $\pi \approx 3{,}141\ 59\ldots$, por tanto, este número es irracional. En los cálculos en que interviene lo tomaremos con un valor aproximado $\pi \approx 3{,}14$.

De esta expresión: $\frac{L}{d} \approx \pi$ se deduce que: $L = \pi \cdot d = \pi \cdot 2r = 2\pi r$

Para calcular la longitud $L$ de una circunferencia de centro $O$, diámetro $d$ y radio $r$, podemos utilizar cualquiera de las expresiones del recuadro siguiente, ¿por qué?

$$\boxed{\begin{array}{l} L = \pi \cdot d \\ L = \pi \cdot (2\,r) \\ L = 2\,\pi\,r \end{array}}$$

*Ejemplo 23:*

Calcula la longitud de una circunferencia de centro $A$ cuyo radio tiene longitud $r = 2{,}5$ cm.

*Solución:*

$L = 2 \cdot \pi \cdot r$
$L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}5$
$L = 15{,}7$ cm
$L \approx 16$ cm

R/ La circunferencia mencionada tiene aproximadamente 16 cm de longitud.

*Ejemplo 24:*

La longitud de una circunferencia es igual 31,4 cm. Calcula la longitud del radio.

*Solución:*

$L = 2 \cdot \pi \cdot r$
$31{,}4 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r$
$31{,}4 = 6{,}28 \cdot r$

$$r = \frac{31{,}4}{6{,}28} = 5{,}00 \text{ cm}$$

R/ La longitud del radio de la circunferencia es aproximadamente de 5,00 cm.

*Ejemplo 25:*

El tronco de un árbol tiene 4,0 m de diámetro. ¿Cuántos hombres se necesitan para abrazarlo, si aproximadamente cada hombre con las manos extendidas abarca 1,60 m?

*Solución:*

$L = \pi \cdot d = 3{,}14 \cdot 4{,}0 \text{ m} = 12{,}56 \text{ m}$
$12{,}56 : 1{,}60 = 7{,}85$

R/ Se necesitan 8 hombres para abrazar el árbol con las manos extendidas.

**Longitud de un arco de circunferencia**

Beatriz mece a su hermanita en un columpio con mucho cuidado, siempre tratando de recorrer un pequeño arco para que no ocurra un accidente (fig. 2.83).

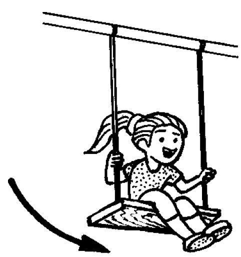


Figura 2.83

¿Cómo se podrá calcular aproximadamente la longitud del arco recorrido por el columpio?

Para calcular esta longitud, se debe determinar una relación entre la longitud del arco que recorre el columpio y la longitud de la circunferencia correspondiente a este arco. Representemos esta situación geométrica en una circunferencia de centro $O$ y radio $r$ (fig. 2.84), en la cual:

- La longitud del arco considerado $\alpha$ se denota como $b$.
- La amplitud del ángulo central correspondiente al arco de longitud $b$, como $\alpha$.
- La longitud de la circunferencia dada, con la letra $L$ y la amplitud del ángulo completo de toda la circunferencia, como 360°.
- La longitud $b$ de un arco de circunferencia que corresponde a un grado de amplitud es: $b = \frac{L}{360°}$.

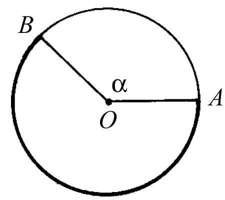


Figura 2.84

Luego para un arco de amplitud $\alpha°$ su longitud sería: $b = \frac{L}{360°} \cdot \alpha°$.

De lo anterior podemos formar la proporción: $\frac{b}{L} = \frac{\alpha°}{360°}$.

Ahora, Beatriz podrá calcular aproximadamente la longitud del arco recorrido por el columpio utilizando la proporción anterior.

*Ejemplo 26:*

¿Cuál es la longitud de un arco correspondiente a un ángulo central de amplitud 60° en una circunferencia de radio 12,0 cm?

*Solución:*

$\frac{b}{L} = \frac{\alpha°}{360°}$, se conocen la amplitud de $\alpha$ y la longitud del radio, luego hay que calcular la longitud de la circunferencia ($L$).

$L = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 12 = 6{,}28 \cdot 12 = 75{,}36$ cm

Sustituyendo en la proporción para calcular la longitud de $b$, obtenemos:

$$\frac{b}{75{,}36} = \frac{60}{360}$$

$$b = 75{,}36 \cdot \frac{60}{360} = 12{,}56 \qquad b \approx 12{,}6 \text{ cm}$$

R/ La longitud de un arco correspondiente para ese ángulo central de 60° es de aproximadamente 12,6 cm.

**Aplicación práctica de la relación longitud de la circunferencia-radio**

**¡!** En el desplazamiento de los vehículos rodantes se establece una determinada relación entre la longitud de las circunferencias de sus ruedas y sus respectivos radios.

Veamos algunos ejemplos. El primero con las ruedas de un tractor, equipo motorizado de suma importancia para el desarrollo de la agricultura en nuestro país. Fíjate en la figura 2.85 que sus ruedas traseras no tienen igual diámetro que las delanteras.

¿Dan la misma cantidad de vueltas las ruedas delanteras que las traseras cuando el tractor ha avanzado un trayecto de 100 m?

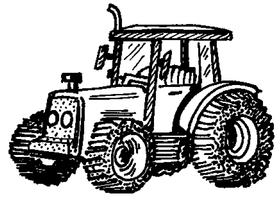


Figura 2.85

Con el estudio que vamos a realizar podemos darle respuesta a la interrogante antes planteada; vamos a realizar el análisis a partir del cálculo de la longitud de diferentes circunferencias.

*Ejemplo 27:*

Observa en la tabla 2.1 la variación de la longitud de la circunferencia, cuando la longitud de su radio varía. O sea, a medida que la longitud del radio aumenta, la longitud de la circunferencia aumenta, por lo cual a mayor diámetro, será mayor también la longitud de la circunferencia.

Tabla 2.1

| **Circunferencias** | **Longitud del radio** | **Longitud de la circunferencia** |
|---|---|---|
| $C_1$ | 1,0 cm | $2\pi$ |
| $C_2$ | 2,0 cm | $4\pi$ |
| $C_3$ | 3,0 cm | $6\pi$ |
| $C_4$ | 4,0 cm | $8\pi$ |

¿Recuerdas que cuando dos magnitudes están relacionadas de modo que los valores de una de ellas se obtienen multiplicando por un mismo número los valores correspondientes de la otra, se dice que son directamente proporcionales?

En una proporcionalidad directa, dos cantidades cualesquiera de una magnitud y su correspondiente en la otra, forman una proporción.

*Ejemplo 28:*

Observa que en la ecuación $L = 2\pi r$, si hacemos $k = 2\pi$, obtenemos la ecuación $L = k \cdot r$, donde el factor de proporcionalidad es $2\pi$.

Luego decimos que la longitud de la circunferencia es directamente proporcional a la longitud de su radio. Esta relación se puede representar en un sistema de coordenadas rectangulares, toma para ello las cantidades proporcionales de la tabla 2.1 y confecciona una gráfica en la figura 2.86.

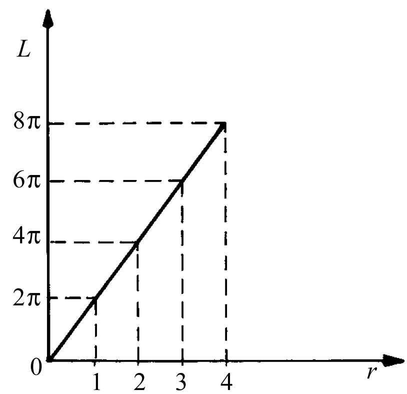



Figura 2.86

*Ejemplo 29:*

El radio de la rueda delantera de una bicicleta de circo mide 20 cm y el de la rueda trasera 30 cm.

a) Al recorrer una determinada distancia, ¿qué rueda habrá dado más vueltas? Argumenta.
b) Cuando la rueda trasera da una vuelta completa, ¿cuántas habrá dado la rueda delantera?

*Solución:*

a) Habrá dado más vueltas la rueda delantera por tener menor radio.
b) $L_d = 2 \cdot \pi \cdot 20 = 40\ \pi$
$L_t = 2 \cdot \pi \cdot 30 = 60\ \pi$

$$\frac{L_t}{L_d} = \frac{60\pi}{40\pi} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

R/ La rueda delantera habrá dado 1,5 vueltas.

**R¡!** *Solución del problema planteado anteriormente*
Las ruedas delanteras del tractor darán mayor cantidad de vueltas que las traseras en un trayecto de 100 m.

## *Ejercicios*

1. Calcula la longitud de una circunferencia cuyo diámetro mide:

   a) 3,5 cm　　b) 4,0 dm　　c) 60,0 mm

2. Calcula la longitud de una circunferencia cuyo radio es igual a:

   a) 1,0 km　　b) 6,0 dm　　c) 1,4 m

3. Calcula el radio de una circunferencia cuya longitud es igual a:

   a) 6,28 m　　b) 22 km　　c) 125,6 cm

4. El radio de la esfera terrestre tiene 6 370 km. Determina la longitud aproximada del arco del horizonte correspondiente a un ángulo de 30° de la circunferencia que se obtendría al proyectar paralelamente la esfera terrestre en un plano, como se representa en la figura 2.87.

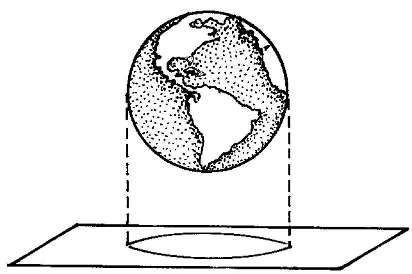


Figura 2.87

5. La longitud del radio de las ruedas traseras de un tractor miden 0,6 m. ¿Cuántos kilómetros avanza el tractor cuando cada rueda ha dado 400 vueltas?
6. Las ruedas de un auto tienen 25 cm de radio. ¿Cuántas vueltas tiene que dar cada rueda para recorrer 78,5 m?
7. Una parte de la lona de la caseta que utilizaron los pioneros en la acampada aparece sombreada en la figura 2.88 de manera que:

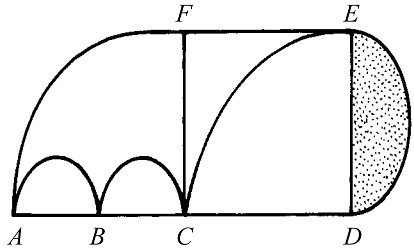


Figura 2.88

   - Los puntos $A$, $B$, $C$ y $D$ donde se fijó al suelo están alineados, siendo $C$ el punto medio del segmento $AD$ y: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{1}{2}$.
   - Los puntos $E$ y $F$ en que se fijó al techo, se ubicaron en estacas a una altura de 2,0 m formando el cuadrado $CDEF$.
     También está representada la puerta ajustada al marco $ED$.
     Calcula la suma de las longitudes de los cinco arcos que aparecen en la figura.
8. Completa la tabla 2.2 sabiendo que los datos de cada fila corresponden a la misma circunferencia.

   *L:* longitud de la circunferencia.
   *d:* diámetro de la circunferencia
   *r:* radio de la circunferencia
   *b:* longitud de un arco
   $\alpha$: amplitud de un ángulo central al que le corresponde el arco de longitud *b*

Tabla 2.2

| ***L*** | ***d*** | ***r*** | ***b*** | $\alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| 13,2 cm | | | | 50° |
| | 7,8 cm | | | 200° |
| | 5,00 m | | 3,93 m | |
| 14,8 cm | | | 10,0 cm | |
| | | | 2,5 m | 60° |
| | | 0,43 cm | | 30° |

9. Calcula la longitud de una circunferencia conociendo que uno de sus arcos cuya amplitud es igual a 20° tiene una longitud de 5,4 cm.
10. En la figura 2.89, el triángulo $ABC$ es equilátero y está inscrito en la circunferencia de centro $O$ y radio igual a 9,0 cm. Selecciona la respuesta correcta.
    La longitud del arco $AB$ es igual a

    a) ___ 120° b) ___ 19 cm
    c) ___ 9,4 cm d) ___ No se puede determinar por falta de datos.

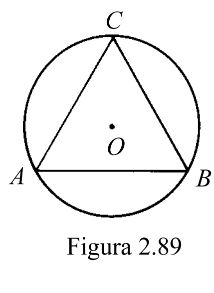


Figura 2.89

11. En la figura 2.90, el triángulo $ABC$ está inscrito en la circunferencia de centro $O$, diámetro $\overline{AB} = 4{,}0\ \text{dm}$ y la amplitud del ángulo $CAB$ es igual a 36°.
Selecciona la respuesta falsa y conviértela en verdadera.

   a) La longitud del radio es igual a 20 cm.
   b) El ángulo $ACB$ tiene amplitud igual a 90°.
   c) La longitud del arco $BC$ es igual a 1,256 dm.
   d) La amplitud del arco $AC$ es igual a 108°

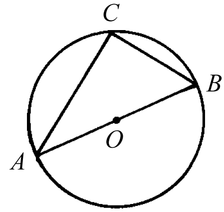



Figura 2.90

12. En la figura 2.91, $A$, $B$ y $C$ son puntos de la circunferencia, $\overset{\frown}{AC} = 120°$, $\angle CAB = 30°$.

   a) Clasifica el $\Delta ABC$ según la amplitud de sus ángulos.
   b) ¿Qué representa la cuerda $\overline{AB}$ para la circunferencia? Argumenta.
   c) Si $\overline{AB} = 2{,}4\ \text{cm}$, calcula la longitud de la circunferencia.

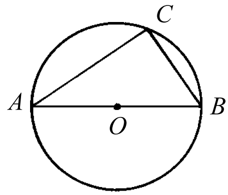



Figura 2.91

13. Los brazos de un columpio miden 1,8 m de largo y pueden describir como máximo un ángulo de 120° (fig. 2.92). ¿Cuál es el recorrido del asiento del columpio cuando el ángulo es máximo?

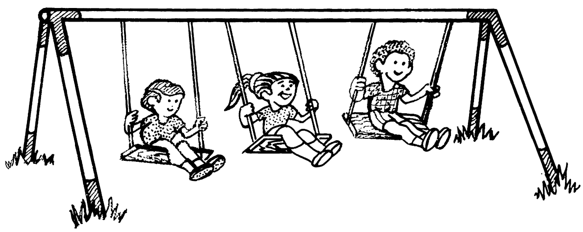


Figura 2.92

14. El minutero de un reloj tiene 6,0 cm de longitud. ¿Cuántos centímetros recorre su extremo libre al avanzar 20 min?

## 2.2.3 Área del círculo

El disco es un implemento deportivo que se emplea desde la Antigüedad en uno de los eventos de lanzamiento del atletismo. Su masa es de 2 kg y su sección circular, similar a la que se ilustra en la figura 2.93 con un diámetro de 219 a 221 mm en la categoría masculina y en la femenina, de 180 a 182 mm.

**¡!** ¿Cuál es el área de un disco de lanzamiento de diámetro 220 mm? El estudio de este epígrafe te permitirá responder esta interrogante.

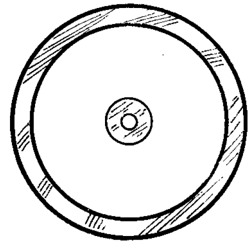


Figura 2.93

### Área de un polígono regular de lado *n*

En séptimo grado se sistematizaron los conocimientos sobre cálculo de áreas de polígonos de tres y cuatro lados, en este epígrafe estudiarás una fórmula para calcular el área de un polígono regular de *n* lados.

Considera un exágono regular de lado *l*; para calcular el área de este polígono, puedes descomponerlo en triángulos y obtener seis triángulos equiláteros cuya altura es el apotema del polígono y de base uno de los lados iguales. El área del polígono *ABCDEF* es la suma de las áreas de los seis triángulos formados como se muestra en la figura 2.94.

Área del exágono *ABCDEF*: $A_E = 6 \cdot A_{\Delta ABC}$

Área del triángulo *ABO*: $A_{\Delta ABC} = \dfrac{l \cdot a}{2}$

Se sustituye la fórmula para calcular el área del triángulo *ABC* en la fórmula para calcular el área del exágono y obtenemos:

$$A_E = 6 \cdot \frac{l \cdot a}{2}$$

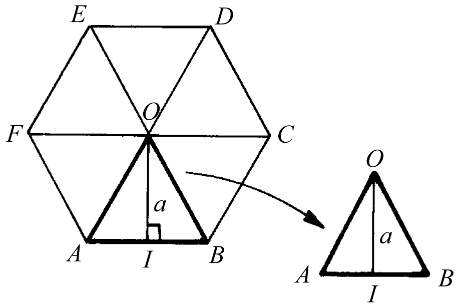



Figura 2.94

El perímetro del exágono es igual a: $P_E = 6 \cdot l$

Al sustituir la fórmula del perímetro del exágono en la fórmula para calcular su área, obtenemos una nueva relación: $A_E = P \cdot \dfrac{a}{2}$.

Como se puede apreciar esta última fórmula depende de la apotema y del perímetro del polígono cuya área se desea calcular, de lo cual se deduce la fórmula para calcular el área de cualquier polígono regular.

**Recuerda** *la fórmula del área de un polígono regular:*

| |
|---|
| El área de un polígono regular es igual al semiproducto[27] del perímetro por la apotema: $A_{Pr} = \dfrac{P \cdot a}{2}$ |

### Área del círculo

Para obtener una fórmula para calcular el área del círculo, considera varios polígonos regulares inscritos en una circunferencia de radio *r* y apotema *a*, como se muestra en la figura 2.95.

[27] Semiproducto: significa en matemática que el producto se divide por 2.

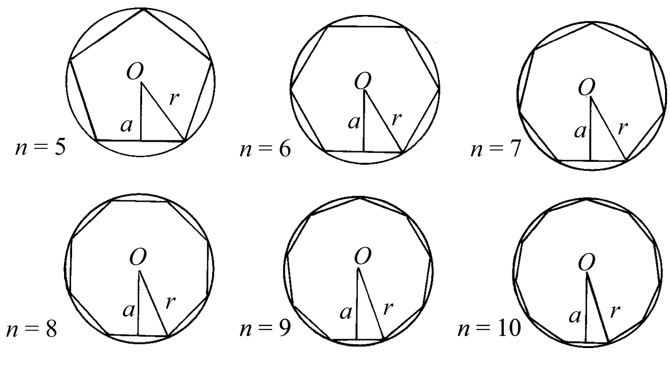



Figura 2.95

Observa qué sucede con la circunferencia y el polígono regular inscrito en ella, si continúas aumentando cada vez más el número $n$, de lados del polígono, y analiza las interrogantes siguientes:

1. ¿Qué relación existe entre la longitud de la apotema y la longitud del radio?

   R/ La longitud de la apotema $a$ se aproxima cada vez más a la longitud del radio $r$, hasta llegar a ser la apotema igual a la longitud del radio de la circunferencia.

2. ¿Qué relación existe entre el perímetro del polígono inscrito de $n$ lados y la longitud de la circunferencia?

   R/ El perímetro $n \cdot l$ del polígono se aproxima cada vez más a la longitud $L$ de la circunferencia hasta llegar a ser el perímetro del polígono igual a la longitud de la circunferencia.

3. ¿Qué relación existe entre el área del polígono inscrito y el área del círculo?

   R/ El área del polígono se aproxima también cada vez más al área del círculo hasta llegar a ser: $A_P = A_C$.

### ¿Cómo calcular el área del círculo?

Ya sabes que el área del polígono $A_p$ se aproxima cada vez más al área del círculo $A_c$, por eso podemos utilizar la fórmula del área de un polígono de $n$ lados para calcular el área del círculo:

$$A_P = \frac{P \cdot a}{2} \quad \text{pero} \quad P = L$$

$$A_P = \frac{L \cdot a}{2} \quad \text{pero} \quad a = r \ \text{y} \ L = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$A_P = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot r}{2}$$

$$A_C = \pi \cdot r^2$$

*Fórmula del área de un círculo:*

$$\boxed{A_C = \pi \cdot r^2}$$

Si sustituimos el radio por la expresión: $r = \frac{d}{2}$, obtenemos otra fórmula que no es necesario que memorices, porque puedes obtenerla fácilmente, cuando tengas en los datos el diámetro en lugar del radio. ¿Te atreves a intentarlo?

*Ejemplo 29:*

Calcula el área de un círculo de radio igual a 10,0 dm.

*Solución:*

Sustituimos $r = 10{,}0$ dm en la fórmula estudiada:

$$A_C = \pi \cdot r^2$$
$$A_C = 3{,}14 \cdot 10^2$$
$$A_C = 3{,}14 \cdot 100$$
$$A_C = 314 \text{ dm}^2$$

R/ El área del círculo es aproximadamente 314 dm$^2$.

*Ejemplo 30:*

Halla el radio del círculo cuya área es igual a 78,5 dm$^2$.

$$A_C = 78{,}5 \text{ dm}^2$$
$$A_C = \pi \cdot r^2$$
$$78{,}5 = 3{,}14 \cdot r^2$$
$$r^2 = \frac{78{,}5}{3{,}14}$$
$$r^2 = 25$$
$$r = 5{,}00 \text{ dm}$$

R/ El radio del círculo es 5 dm.

**R ¡!** Solución del problema planteado para calcular el área de un disco de lanzamiento de diámetro igual a 220 mm.

Datos

$d = 220$ mm

Utilicemos la fórmula:

$$A_C = \pi \cdot \frac{d^2}{4}$$

Sustituyendo:

$$A_C = 3{,}14 \cdot \frac{220^2}{4}$$

$$A_C = 3{,}14 \cdot \frac{48\,400}{4}$$

$$A_C = 3{,}14 \cdot 12\,100$$

$$A_C = 37\,994 \text{ mm}^2$$

$$A_C \approx 380 \text{ cm}^2$$

R/ El área del disco de lanzamiento del atletismo es aproximadamente 380 cm$^2$.

**Área de la corona circular**

**¡!** De una pieza metálica en forma de círculo, de diámetro igual a 8,0 mm, como se muestra en la figura 2.96, se quiere fabricar una arandela para un tornillo de diámetro igual a 2,0 mm. ¿Qué área ocupará la arandela sobre una superficie plana? ¿Qué forma geométrica tiene la arandela fabricada?

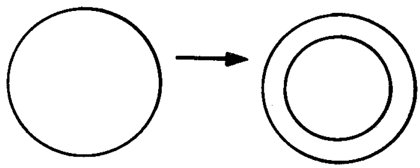


Figura 2.96

Esta forma geométrica, nueva para ti, se denomina **corona circular;** veamos su definición.

**Recuerda** *la definición de corona circular:*

| |
|---|
| El conjunto de puntos del plano entre dos círculos concéntricos de diferentes radios, en el cual también se incluyen sus circunferencias-borde, se llama corona circular. |

A partir de la fórmula para calcular el área del círculo puedes buscar una fórmula para calcular el área de la corona circular.

*Ejemplo 31:*

En la figura 2.97, tenemos que $r_1$, radio del círculo 1, y $r_2$, radio del círculo 2. Entonces se expresan las fórmulas para calcular las áreas de los dos círculos en función de $r_1$ y $r_2$ con $r_2 > r_1$.

$A_{C_1} = \pi\ r_1^2$ ; $A_{C_2} = \pi\ r_2^2$

$A_{corona} = A_{C_2} - A_{C_1}$

$A_{corona} = \pi \cdot r_2^2 - \pi \cdot r_1^2$

$A_{corona} = \pi\ (r_2^2 - r_1^2)$

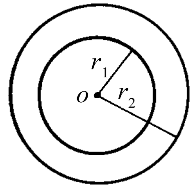



Figura 2.97

Así se obtiene que el área de la corona circular es igual a la diferencia entre el área del círculo mayor y el área del círculo menor: $A_{corona} = \pi\ (r_2^2 - r_1^2)$

**R¡!** Ya puedes calcular el área de la arandela para el tornillo del problema planteado, utilizando la fórmula obtenida:

*Solución:*

Datos:

$r_2 = 4{,}0$ mm  $r_1 = 1{,}0$ mm

Emplearemos la fórmula del área de la corona circular:

$A_{corona} = \pi\ (r_2^2 - r_1^2)$

$A_{Arandela} = 3{,}14 \cdot (4^2 - 1^2)$

$A_{Arandela} = 3{,}14 \cdot (16 - 1)$

$A_{Arandela} = 3{,}14 \cdot 15$

$A_{Arandela} = 47{,}1\ \text{mm}^2$

$A_{Arandela} \approx 47\ \text{mm}^2$

R/ El área de la arandela será aproximadamente 47 mm$^2$.

Veamos otro ejemplo:

*Ejemplo 32:*

Calcula el área de una corona circular determinada respectivamente por las circunferencias de radio $r_1 = 2{,}0$ dm y $r_2 = 30{,}0$ cm.

Datos:

$r_1 = 2{,}0$ dm = 20 cm

$r_2 = 30$ cm

$A_{corona} = \pi\ (r_2^2 - r_1^2)$

$A_{corona} = 3{,}14\ (30^2 - 20^2)$

$A_{corona} = 3{,}14\ (900 - 400)$

$A_{corona} = 3{,}14 \cdot 500$

$A_{corona} = 157{,}0\ \text{cm}^2$

$A_{corona} = 15{,}70\ \text{dm}^2$

$A_{corona} \approx 16\ \text{dm}^2$

R/ El área de la corona circular determinada es aproximadamente 16 dm$^2$.

## Área del sector circular

**¡!** En la figura 2.98 se tiene un círculo de centro $O$ y radio $\overline{OA} = 2{,}0\ \text{cm}$, los radios $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ forman un ángulo de 120°.

¿Puedes identificar la figura geométrica que representa la parte sombreada en el círculo? ¿Cuál será su área?

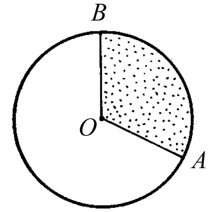



Figura 2.98

**Recuerda** *la definición de sector circular:*

| |
|---|
| Se llama sector circular al conjunto de puntos del círculo limitado por los lados de un ángulo central y su arco correspondiente, que incluye también a los puntos cotenidos en ellos. |

Para calcular el área de un sector circular ($A_{SC}$) de un ángulo de amplitud α en un círculo de área ($A_C$), planteamos la proporción que representa la igualdad entre la razón de las áreas de dos sectores circulares en la misma unidad de medida y la razón entre sus amplitudes correspondientes expresadas en grado.

Como en toda proporción, conociendo el valor de tres de sus cuatro términos puedes hallar el cuarto término (fig. 2.98).

$$\frac{A_{SC}}{A_C} = \frac{\alpha°}{360°};\ A_{SC} = A_C \cdot \frac{\alpha°}{360°}$$

$$A_{SC} = \pi \cdot r^2 \frac{\alpha°}{360°}$$

*Ejemplo 33:*

En un círculo de radio igual a 4,0 dm se ha trazado un sector circular de 60° de amplitud. Halla su área.

*Solución:*

$$\frac{A_{SC}}{A_C} = \frac{\alpha°}{360°}$$

$$A_{SC} = A_C \cdot \frac{\alpha°}{360°}$$

$$A_{SC} = 50,24 \cdot \frac{60°}{360°}$$

$$A_{SC} = 50,24 \cdot \frac{1}{6}$$

$$A_{SC} = 8,4 \text{ dm}^2$$

Cálculo auxiliar:
$A_C$ = Área del círculo
$A_C = \pi \cdot r^2$
$A_C = 3,14 \cdot 4^2$
$A_C = 3,14 \cdot 16$
$A_C \approx 50,24 \text{ dm}^2$

R/ El área círculo es aproximadamente 8,4 dm$^2$.

**R ¡!** Ya puedes identificar en la figura 2.98 que la parte que aparece sombreada es un sector circular y determinar su área.

*Solución:*

Datos:

$r = 2{,}0$ cm

$\frac{A_{SC}}{A_C} = \frac{\alpha}{360}$

$A_{SC} = A_C \cdot \frac{\alpha}{360}$

$A_{SC} = 12{,}56 \cdot \frac{120}{360}$

$A_{SC} = 12{,}56 \cdot \frac{1}{3}$

$A_{SC} = 4{,}2\,\text{cm}^2$

Cálculo auxiliar:
Área del círculo
$A_c = \pi \cdot r^2$
$A_c = 3{,}14 \cdot 2^2$
$A_c = 3{,}14 \cdot 4$
$A_c = 12{,}56$ cm$^2$

R/ El área sombreada del círculo es aproximadamente a 4,2 cm$^2$.

## *Ejercicios*

1. Selecciona la fórmula de la columna II para calcular la longitud o área correspondiente en la columna I.

| I | | II | |
|---|---|---|---|
| 1 | Área del sector circular | A | $\pi \cdot d$ |
| 2 | Longitud del arco de circunferencia | B | $\pi \cdot \frac{d^2}{4}$ |
| 3 | Longitud de una circunferencia | C | $\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)$ |
| 4 | Área de un círculo | D | $L \cdot \frac{\alpha}{360°}$ |
| 5 | Área de una corona circular | E | $\alpha = L \cdot \frac{b}{360°}$ |
| 6 | Amplitud de un arco de circunferencia | F | $A_C \cdot \frac{\alpha}{360°}$ |

2. Di cuál de las afirmaciones siguientes es la verdadera.

a) ___ El número irracional $\pi = 3{,}14$.

b) ___ La parte del círculo limitada por un arco y los lados del ángulo central correspondiente se calcula utilizando la relación $\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)$.

c) ___ El área del círculo se puede calcular utilizando la relación $\pi \cdot \frac{d^2}{4}$.

d) ___ La longitud de la circunferencia se puede calcular utilizando la relación $L = 2\pi d$.

3. Calcula el área de un círculo cuyo radio es igual a:

   a) $r = 7{,}00$ cm  b) $r = 5{,}0$ m  c) $r = 100$ mm

4. Calcula el área de un círculo cuyo diámetro mide:

   a) $d = 30{,}0$ cm  b) $d = 1{,}7$ m  c) $d = 13{,}0$ mm

5. Dada el área del círculo, halla el elemento pedido:

   a) $A = 24$ mm, halla $r$
   b) $A = 314$ cm$^2$, halla $d$
   c) $A = 19{,}6$ dm$^2$, halla $r$ y $d$

6. Calcula el área de una corona circular, si:

   a) $r_1 = 1{,}0$ dm y $r_2 = 12{,}0$ cm
   b) $r_1 = 0{,}30$ m y $r_2 = 4{,}5$ dm

7. a) Dados $A_C = 36\pi$ m$^2$ y $\alpha = 45°$, halla $r$, $d$ y $A_{SC}$.
   b) Dados $L = 14{,}8$ cm y $b = 120$ mm, halla $r$, $d$, $A_C$ y $\alpha$.
   c) Dados $r = 5{,}0$ cm y $b = 60$ mm, halla $\alpha$, $A_C$, $A_{SC}$ y $L$.

8. En la figura 2.99, la circunferencia de centro $O$ y radio $r$ está inscrita al cuadrado $ABCD$ de lado igual a 4,0 cm. Calcula el área de la parte sombreada.

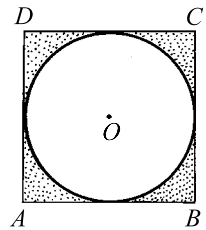


Figura 2.99

9. En la figura 2.100, el cuadrado $ABCD$ de 5,00 cm de lado está inscrito en una circunferencia de 70 mm de radio. Calcula el área sombreada.

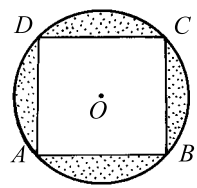


Figura 2.100

10. En la figura 2.101, la circunferencia de centro $O$ y radio $r_1$ está inscrita al cuadrado $MNPQ$ de lado igual a 8,0 cm. La circunferencia menor tiene su centro en $O$ y su radio es $r_2 = 2{,}0$ cm. Calcula el área sombreada.

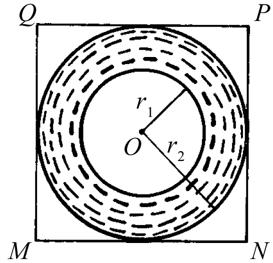


Figura 2.101

11. En la circunferencia de centro $O$ y radio $\overline{ON} = 2{,}2$ m (fig. 2.102), el ángulo $\angle MON = 90°$. Calcula el área sombreada.

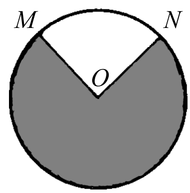



Figura 2.102

12. La superficie de una mesa está formada por una parte central cuadrada y dos semicírculos adosados en dos lados opuestos (fig. 2.103). Calcula el área de la superficie de la mesa.

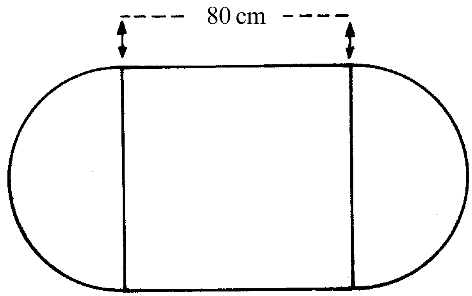



Figura 2.103

13. El minutero de un reloj tiene 12 mm de largo. ¿Qué parte de la superficie barre al pasar de las 2:00 p.m. a las 2:35 p.m.?
14. En un parque infantil de forma circular de 50 m de radio, hay situada una fuente concéntrica a él de forma circular de 5,0 m de radio. ¿De qué área disponen los niños para jugar?
15. Se tienen dos figuras $S_1$ y $S_2$ de cartulina con forma de sector circular. $S_1$ tiene 2,0 cm de radio y un ángulo de 60° y $S_2$ tiene 3,0 cm de radio y un ángulo de 30°. Halla la razón entre las superficies de $S_1$ y $S_2$.
16. Se trazan tres circunferencias concéntricas cuyos respectivos radios tienen longitud: $r_1 = 4{,}0$ cm, $r_2 = 6{,}0$ cm y $r_3 = 9{,}0$ cm. ¿Cuántas veces es mayor la superficie comprendida entre las circunferencias 2 y 3 que la superficie comprendida entre las circunferencias 1 y 2?
17. Una *pizza* familiar circular es cortada en varios trozos (sectores) iguales con un ángulo central igual a 45°.

    a) ¿En cuántos trozos (sectores) se cortó la *pizza*?
    b) Si la superficie de uno de los trozos es de aproximadamente 88,3 cm$^2$, ¿cuál es la longitud aproximada de la *pizza*?

18.* En la figura 2.104, se tiene un exágono regular de 6,9 cm de apotema inscrito en una circunferencia de 8,0 cm. Calcula el área sombreada.

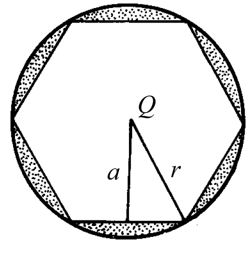



Figura 2.104

19.* En la figura 2.105, se tiene una circunferencia de longitud igual a $L = 12{,}56$ cm inscrita en un triángulo equilátero. Calcula el área de la parte sombreada.

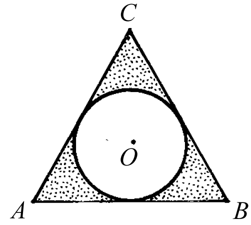



Figura 2.105

20.* En la figura 2.106, se tienen tres circunferencia iguales, tangentes entre sí, de centros en $O_1$, $O_2$ y $O_3$ de radio igual a $r = 20$ mm. Calcula el área de la parte sombreada.

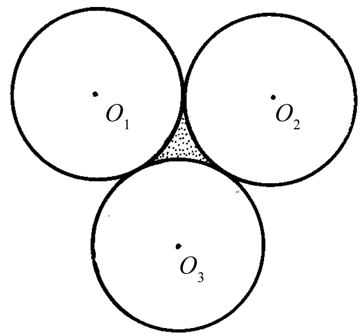



Figura 2.106

21.* En la figura 2.107, $\overline{AB}$ es una cuerda de la circunferencia de centro $O$; $\overline{AO} \perp \overline{OB}$.
Calcula el radio de la circunferencia si el área sombreada es de 1,14 cm$^2$.

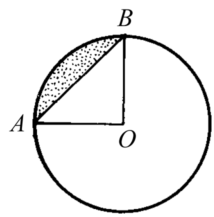



Figura 2.107

22. En la figura 2.108, $\overline{AD}$ es diámetro y $E$ es un punto de la circunferencia de centro $O$. La recta $BC$ es tangente a la circunferencia en el punto $F$. $ABCD$ es un rectángulo. Calcula el área sombreada si se conoce que $\overline{AE} = 1{,}6$ dm y $\overline{DE} = 12$ cm.

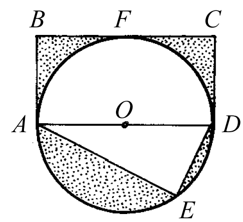



Figura 2.108

## 2.2.4 Construcción de gráficos circulares o de pastel

Desde que iniciaste tus estudios sobre Estadística, has interpretado diversas informaciones presentadas en gráficos circulares o de pastel. Estos gráficos se utilizan cuando se quiere analizar el comportamiento de las partes respecto al todo, pero ¿cómo se construye un gráfico circular?

*Ejemplo 34:*

La composición de la superficie terrestre es (fig. 2.109):

- Las tres cuartas partes corresponden a agua.
- La cuarta parte corresponde a tierra.

Representa la información en un gráfico circular.

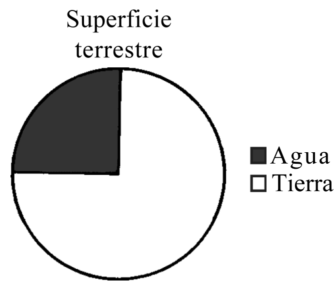


Figura 2.109

Observa que los datos se ofrecen en fracciones, con igual denominador, por tanto, es fácil representarlos en un gráfico circular, solo basta dividir el círculo en cuatro partes iguales, trazando dos diámetros perpendiculares, luego se selecciona la cuarta parte que le corresponde a la tierra y las tres cuartas partes que le corresponden al agua, figura 2.109.

¿Cómo proceder para construir un gráfico circular o de pastel cuando los datos no se ofrecen como en el ejemplo 34?

*Ejemplo 35:*

En una secundaria básica la matrícula es de 600 alumnos, 150 cursan el séptimo grado, 200, el octavo grado y 250, el noveno grado. Representa la información en un gráfico circular.

*Solución:*

(Ver figura 2.110)
Séptimo grado:

$$\frac{150}{600} \cdot 360° = \frac{1}{4} \cdot 360° = 90°$$

Octavo grado:

$$\frac{200}{600} \cdot 360° = \frac{1}{3} \cdot 360° = 120°$$

Noveno grado:

$$\frac{250}{600} \cdot 360° = \frac{5}{12} \cdot 360° = 150°$$

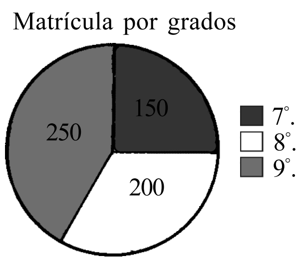


Figura 2.110

*Pasos para construir un gráfico de pastel:*

1. Determinar la medida del ángulo central correspondiente al sector multiplicando la frecuencia relativa por 360°.

2. Comprobar que las amplitudes obtenidas suman 360°.
3. Trazar un círculo de radio *r*.
4. Trazar en el círculo los sectores circulares obtenidos con ayuda de un semicírculo.
5. Identificar en el gráfico los datos objeto de análisis en el problema.

*Ejemplo 36:*

Se puede construir fácilmente una gráfica de pastel para insertarla en un documento, aplicando los recursos informáticos. Para eso sigue los pasos que se describen a continuación:

a) Abre el documento en el que vas a insertar la gráfica o un nuevo documento en el programa *Microsoft Office Word.*
b) Da *click* con el *mouse* en la opción: **Insertar** (fig. 2.111).
c) Después en la opción: **Gráfico.**


Figura 2.111

d) Selecciona ahora: **Circular** y allí el tipo de gráfico circular que deseas y a seguidas: **Aceptar** (fig. 2.112).

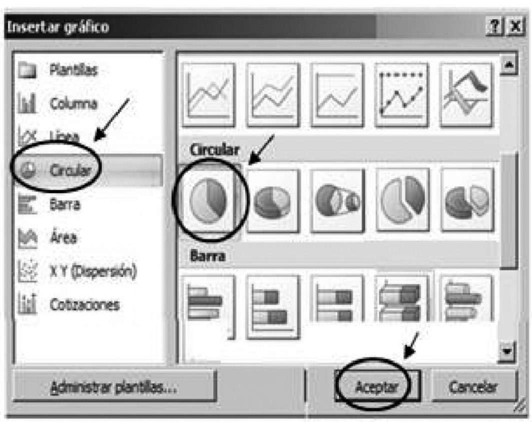



Figura 2.112

e) Rellena la tabla que se abre en *Excel* con los datos necesarios (fig. 2.113); para cada dato toma una fila. En el caso del ejemplo 34, estos datos serían: 150, 200 y 250, que son las cantidades de alumnos de cada grado y reescribe el nombre del gráfico.

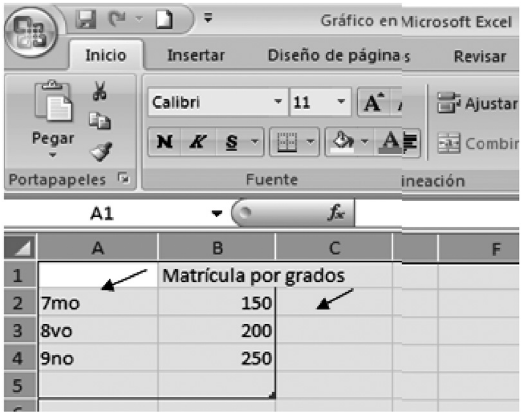



Figura 2.113

¡Y ya tienes tu gráfica circular lista!

## *Ejercicios*

1. En la tabla 2.3 se muestran los resultados de la actuación de Cuba en los juegos olímpicos de Londres 2012.

Tabla 2.3

| **Medallas** | **Cantidad** |
|---|---|
| Oro | |
| Plata | 3 |
| Bronce | 6 |
| Total | 14 |

a) ¿Cuántas medallas de oro obtuvo Cuba?
b) Calcula la frecuencia relativa en cada caso.
c) Representa la información en un gráfico de pastel.

2. En la tabla 2.4 se muestra el tanto por ciento de alumnos de una secundaria básica incorporados a círculos de interés.

Tabla 2.4

| **Círculos de interés** | **% de incorporados** |
|---|---|
| Gastronomía | 20 |
| Salud Pública | 33 |
| Deportes | 27 |
| No incorporados | |

a) ¿Qué tanto por ciento de la matrícula está aún sin incorporarse a los círculos de interés?
b) Si la matrícula de la escuela es de 520 alumnos, ¿cuántos de ellos prefieren el círculo de interés de gastronomía?
c) Representa la información en un gráfico de pastel.

3. En un trabajo práctico de Matemática sobre el consultorio médico de la familia aparece una gráfica como la que muestra la figura 2.114, sobre la distribución de sus pacientes. Obsérvala y responde cada una de las preguntas siguientes:

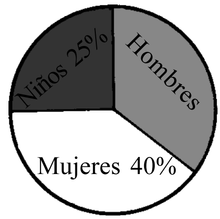



Figura 2.114

a) Selecciona la respuesta correcta.

   • La mayor cantidad de pacientes está representada por
   ___ Mujeres ___ Hombres ___ Niños

   • La expresión: “Los niños representan el 25 %” significa que

   __ En el consultorio atienden a 25 niños.
   __ La cuarta parte de los pacientes que se atienden son niños.
   __ De cada 1 000 pacientes que se atienden, 25 son niños.

b) Si en el consultorio se atienden 240 pacientes, determina la cantidad de pacientes que corresponde a niños, mujeres y hombres.

4. Investiga en tu consultorio de la familia la cantidad de personas de la tercera edad que:

a) Padecen de hipertensión arterial.
b) Son diabéticos.
c) Son cardiópatas.

4.1. Construye un gráfico de pastel con los datos recopilados empleando el programa de *Microsoft Office Word.*

## 2.3 Igualdad de figuras geométricas en el plano

En séptimo grado aprendiste cómo dada una figura geométrica puedes construir otras figuras iguales a partir de los diferentes movimientos del plano y de las construcciones geométricas. Ahora tenemos ante nosotros otra nueva interrogante:

¿Si se tienen dos figuras geométricas, cómo podremos determinar si son iguales?

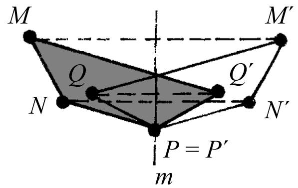
La veracidad de una proposición no debe asegurarse por “lo que parezca”, solamente podemos afirmar que una proposición matemática es verdadera si puede ser fundamentada o demostrada a partir de los axiomas considerados o de otras proposiciones verdaderas.

Resolver la interrogante anterior es el propósito fundamental de este epígrafe, recordemos antes las propiedades fundamentales de los movimientos del plano.

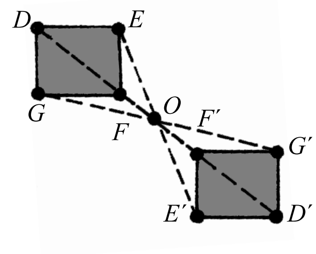
## 2.3.1 Sistematización de los movimientos del plano

Observa los cuatro ejemplos de diferentes figuras que fueron construidas aplicando los movimientos del plano que estudiaste en séptimo grado (fig. 2.115).

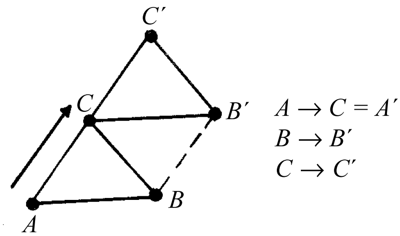
I. Simetría axial o reflexión de eje $m$




II. Simetría central o reflexión de centro $O$




III. Traslación de vector $\overrightarrow{AC}$




IV. Rotación de centro $O$ y ángulo $\alpha$

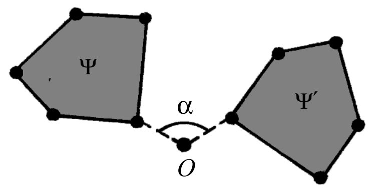



Figura 2.115

**Recuerda** *la propiedad fundamental de cada movimiento estudiado:*

- **Reflexión respecto a una recta:** el eje de simetría es la mediatriz de todo segmento determinado por un punto y su imagen.
- **Reflexión respecto a un punto:** el centro de simetría es el punto medio de todo segmento determinado por un punto y su imagen.
- **Traslación:** todo punto del plano y su imagen en una misma traslación determinan segmentos paralelos, de igual longitud y sentido.
- **Rotación:** todo punto $P$ y su imagen $P'$ equidistan del centro de rotación $O$ y al unir estos puntos con el centro de rotación se determinan ángulos iguales de la forma $\angle POP'$, con vértice en el centro de rotación. Orientamos los ángulos de rotación siempre en sentido antihorario.

## *Ejercicios*

1. Identifica en cada uno de los 4 ejemplos de movimiento de la figura 2.115 los elementos siguientes:

   - Los puntos fijos

- Una recta y su imagen
- Un segmento y su imagen
- Un ángulo y su imagen

2. Construye la imagen de las figuras que se describen en cada inciso por el movimiento que se indica:

   a) La mediana del lado $\overline{AB}$ en un triángulo acutángulo *ABC*; su imagen por la simetría axial de eje *r*, donde *r* es la recta que contiene al lado $\overline{AB}$.
   b) Un triángulo *MNP* rectángulo en el vértice *M*; su imagen por la simetría central con centro en el ortocentro de dicho triángulo.
   c) La bisectriz del ángulo agudo $\angle QPR$; su imagen por la traslación que transforma el punto *P* en el punto *Q*.

3. Construye el eje *s* de la simetría axial que transforma al segmento *MN* en el segmento *PQ*, de modo que *Q* es la imagen de *M* (fig. 2.116).

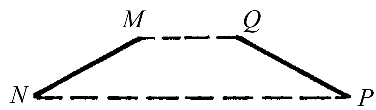


Figura 2.116

## 2.3.2 Figuras iguales

En la vida cotidiana aplicamos movimientos para obtener otras figuras iguales, pero también comprobamos si dos figuras son iguales, tratando de *mover* una figura hasta que coincida con la otra.

a) Por ejemplo, observa en la figura 2.117 cómo un artesano pudo, con la plantilla que se encuentra a la derecha, dibujar otras figuras iguales en una pieza de tela, es decir, *movió* la figura para obtener otras figuras iguales en la tela.

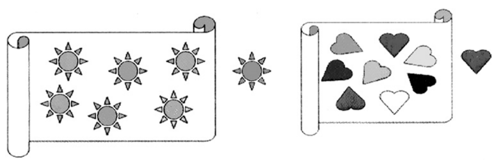


Figura 2.117

b) Si *movemos* la palma de la mano hasta hacerla coincidir con la otra, comprobamos que son iguales (fig. 2.118)


Figura 2.118

c) Construimos figuras iguales para los diagramas de bloque (fig. 2.119).

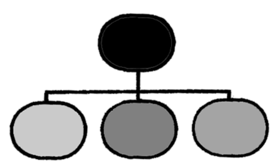


Figura 2.119

d) Los pasteles de la dulcería se confeccionan también a partir de moldes iguales (fig. 2.120).

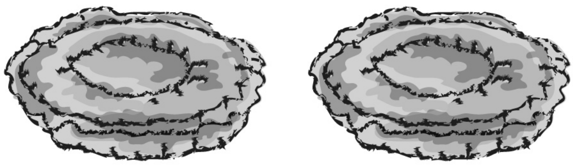


Figura 2.120

Cuando *movemos* una figura del plano utilizando una hoja de papel transparente, obtenemos una figura igual a la original y en ese caso se hace corresponder a cada punto de esta, un único punto en la figura imagen y viceversa, decimos entonces que ambas figuras son iguales.

**¡!** En los casos anteriores, dada una figura se obtuvo otra igual aplicando un movimiento. Ahora tenemos ante nosotros una problemática diferente, tenemos dos figuras y debemos determinar si son iguales.

**Recuerda** *la definición de figuras iguales:*

| Dos figuras son iguales si existe un movimiento que transforma una en la otra. |
|---|

Observa los dos polígonos dados en la figura 2.121

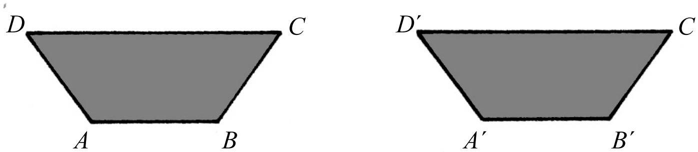



Figura 2.121

Parecen iguales, pero no se debe decir que lo son a partir de una simple apreciación visual, tampoco se tiene información acerca de algún movimiento que haga que estas figuras coincidan ni podemos recortar o doblar la página del libro para comprobarlo porque esto es inadmisible.

Al superponer dos polígonos iguales por un movimiento podemos apreciar que sus lados tienen respectivamente la misma longitud y sus ángulos tienen respectivamente la misma amplitud, porque los movimientos conservan la distancia entre dos puntos y las amplitudes de los ángulos. Esta idea conduce a definir en particular, la igualdad de polígonos.

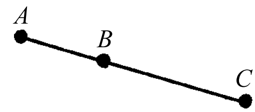
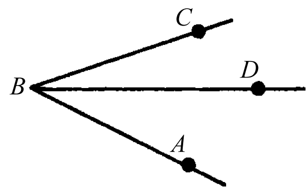
**Recuerda** *la definición de polígonos iguales:*

| Dos polígonos son iguales si sus ángulos interiores tienen respectivamente la misma amplitud y si los lados opuestos a estos ángulos tienen respectivamente la misma longitud. |
|---|

Resulta de interés para esta temática de la igualdad de figuras, cómo fundamentar si son diferentes dos segmentos o dos ángulos. Por supuesto, en el caso de los segmentos, sucede si sus longitudes son diferentes y en el caso de los ángulos, si sus amplitudes son diferentes.

¿Y si no conocemos sus longitudes o amplitudes cómo justificar si son diferentes dos segmentos o dos ángulos? Veamos:

**Recuerda** *la comparación de longitudes y amplitudes*

<table>
<tr>
<td>a) Si un punto B pertenece a un segmento $\overline{AC}$, determina el segmento $\overline{AB}$ en él (fig. 2.122); y para las longitudes de estos segmentos se cumple que: $\overline{AB} < \overline{AC}$.</td>
<td><br>Figura 2.122</td>
</tr>
<tr>
<td>b) Si una semirrecta BD está contenida en el interior de un ángulo ABC, determina en él al ángulo ABD (fig. 2.123); y para las amplitudes de estos ángulos se cumple que:<br>$$\angle ABD < \angle ABC$$<br>Una semirrecta está contenida en el interior de un ángulo si su origen coincide con el vértice del ángulo y existe un segmento que corta a los lados del ángulo que corta también a esa semirrecta.</td>
<td><br>Figura 2.123</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Para un ángulo llano basta con que el origen de la semirrecta coincida con el vértice del ángulo y que la semirrecta esté contenida en el semiplano que ese ángulo llano determina.</td>
</tr>
</table>

Esta propiedad se aplicará en la demostración de un criterio de igualdad de triángulos.

## *Ejercicios*

1. Cita ejemplos de figuras iguales a tu alrededor y cómo compruebas en la práctica que realmente lo son.
2. Confecciona un resumen:
   a) Con todas las propiedades geométricas que conozcas y te permitan asegurar que dos segmentos son iguales.
   b) Con todas las propiedades geométricas que conozcas y te permitan asegurar que dos ángulos son iguales.
   c) Todas las propiedades de los triángulos.

Estos resúmenes te permitirán consolidar tus conocimientos para el próximo epígrafe.

## 2.3.3 Igualdad de triángulos

Desde séptimo grado, te has percatado de la importancia de los triángulos para la vida práctica, pero lo son también para la matemática, por su aplicación en el cálculo de áreas y en la demostración de propiedades geométricas, por lo que vamos a definir como caso particular de los polígonos iguales a los triángulos iguales.

**Recuerda** *la definición de triángulos iguales:*

| |
|---|
| Dos triángulos son iguales si sus ángulos interiores tienen respectivamente la misma amplitud y si los lados opuestos a estos ángulos tienen respectivamente la misma longitud. |

**Recuerda** *los elementos homólogos de triángulos iguales:*

- Los **lados y ángulos homólogos** de dos triángulos iguales son los elementos que se corresponden por el movimiento que generó estos triángulos iguales y son siempre respectivamente iguales.
- Se cumple siempre que en triángulos iguales, a lados respectivamente iguales **(lados homólogos)** se oponen ángulos respectivamente iguales **(ángulos homólogos)** y recíprocamente, a ángulos respectivamente iguales **(ángulos homólogos)** se oponen lados respectivamente iguales **(lados homólogos).**

De la definición anterior se deduce que para fundamentar que dos triángulos son iguales deben justificarse seis igualdades geométricas: las tres igualdades referidas a sus lados y las tres igualdades referidas a sus ángulos. ¿Existirá una vía más racional para fundamentar que dos triángulos son iguales?

Esta vía se concreta en los denominados *criterios de igualdad de triángulos*, pero queremos que tú mismo llegues a encontrar las exigencias que ellos plantean, a partir de la búsqueda de relaciones entre sus elementos.

Confecciona plantillas de varios triángulos de diferentes tipos, agrúpalas según tengan iguales:

- Un lado, dos lados y tres lados
- Un ángulo, dos ángulos y tres ángulos
- Combinaciones de lados iguales con ángulos iguales

**¡!** Comprueba ahora que la exigencia declarada para formar cada grupo basta para asegurar que todos los triángulos del grupo son iguales, es decir, que al superponer los triángulos con tal exigencia coinciden, lo cual significa que el resto de sus lados y ángulos son también respectivamente iguales. Este análisis es el mismo que se plantea a continuación, en el cual los elementos iguales se señalaron en los triángulos dados con la misma marca.

**Caso 1:** *Exigencias respecto a igualdades de ángulos*

a) Triángulos con un ángulo respectivamente igual. ¿Es suficiente esta condición para plantear la igualdad de los triángulos dados en la figura 2.124?

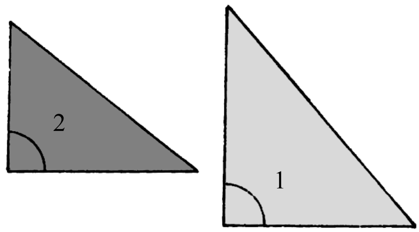



Figura 2.124

b) Triángulos con dos ángulos respectivamente iguales. ¿Es suficiente esta condición para que los triángulos dados en la figura 2.125 sean iguales?

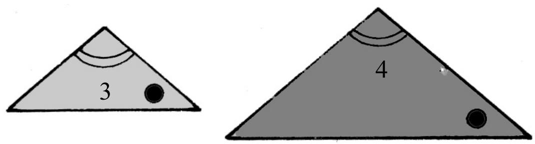



Figura 2.125

c) Triángulos con tres ángulos respectivamente iguales, es la misma situación que el caso anterior. ¿Por qué?

*Conclusión 1:* no es suficiente tener los ángulos respectivamente iguales para que los triángulos dados sean iguales.

**Caso 2:** *Exigencias respecto a igualdades de lados*

a) Triángulos con un lado respectivamente igual. ¿Es suficiente esta condición para plantear la igualdad de los triángulos dados en la figura 2.126?

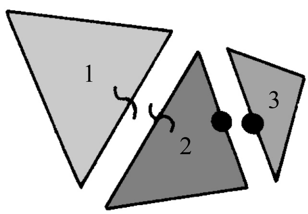



Figura 2.126

b) Triángulos con dos lados respectivamente iguales. ¿Es suficiente esta condición para plantear la igualdad de los triángulos dados en la figura 2.127?

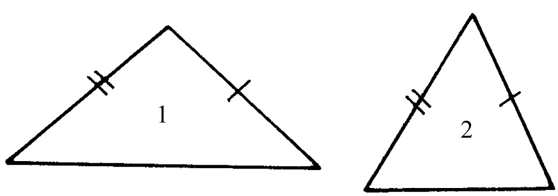



Figura 2.127

c) Triángulos con tres lados respectivamente iguales. ¿Es suficiente esta condición para plantear la igualdad de los triángulos dados en la figura 2.128?

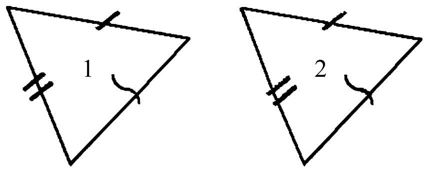



Figura 2.128

*Conclusión 2:* Parece que los triángulos dados son iguales cuando tienen respectivamente iguales sus tres lados.

**Caso 3:** *Exigencias respecto a igualdades de lados y ángulos*

a) Triángulos con un lado y un ángulo respectivamente iguales.
b) Triángulos con dos lados y un ángulo respectivamente iguales.
c) Triángulos con un lado y dos ángulos respectivamente iguales.

Combina plantillas de triángulos con las exigencias planteadas en el caso 3 y arriba tú mismo a la conclusión 3. Resume todas las conclusiones y responde:

*¿En qué casos se pudo afirmar que los dos triángulos dados son iguales?*

**¡IMPORTANTE!**

De las conclusiones a que arribamos en el análisis anterior se obtienen *los criterios de igualdad de triángulos,* conocidos también como *teoremas de igualdad de triángulos,* pero hasta el momento, para nosotros son solamente suposiciones porque fíjate que han sido planteadas sobre la base del análisis con dos o tres triángulos particulares y eso no es suficiente para afirmar que se cumplirán para todos los triángulos. Es necesario para hacer esta afirmación demostrar las suposiciones planteadas, lo cual veremos a continuación.

**Recuerda** *los criterios de igualdad de triángulos:*

*Axioma de igualdad de triángulos o criterio lal:*
Si dos triángulos tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, entonces son iguales.

*Teorema 14 o criterio ala:*
Si dos triángulos tienen respectivamente iguales un lado y los dos ángulos adyacentes a ese lado, entonces son iguales.

*Teorema 15 o criterio lll:*
Si dos triángulos tienen respectivamente iguales tres lados, entonces son iguales.

## Sobre la demostración de los criterios de igualdad de triángulos

En el recuadro anterior aparece un nuevo axioma: el axioma de igualdad de triángulos, que vamos a incluir en nuestro grupo de axiomas, que formulamos en séptimo grado.[28]

Esto significa que su veracidad se acepta en la teoría geométrica sin demostración. A partir de él se demuestran los dos teoremas restantes de igualdad de triángulos.

Aquí se presentará solamente la demostración del teorema 14 o *criterio ala*, pero de la misma forma se demuestra también el teorema 15 o *criterio lll.* Para la demostración emplearemos el método indirecto, que conoces de séptimo grado y el *axioma lal.*

*Criterio de igualdad de triángulos ala*

Demostración (del teorema 14):

Sean $\Delta ABC$ y $\Delta A'B'C'$, dos triángulos cualesquiera (fig. 2.129).

Premisa: $\overline{AB} = \overline{A'B'}$; $\angle CAB = \angle C'A'B'$ y $\angle ABC = \angle A'B'C'$

Tesis: $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$

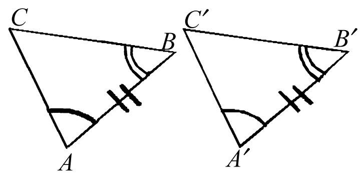



Figura 2.129

Para probar la igualdad de los dos triángulos a partir del *axioma lal,* son necesarias, de las premisas, las que se relacionan con una pareja de ángulos iguales y con los lados en que están comprendidos los ángulos, en ese caso están dos de las premisas dadas:

$\overline{AB} = \overline{A'B'}$ y $\angle CAB = \angle C'A'B'$

Por lo cual, bastaría probar que es igual la otra pareja de lados en que está comprendido respectivamente cada ángulo que es igual, o sea, bastaría probar solamente que: $\overline{CA} = \overline{C'A'}$.

Vamos a probarlo por el *método indirecto,* supongamos: $\overline{CA} \neq \overline{C'A'}$, entonces

$\overline{CA} > \overline{C'A'}$ o $\overline{CA} < \overline{C'A'}$. Supongamos que: $\overline{CA} > \overline{C'A'}$

Transportemos $\overline{C'A'}$ (supuesto como el menor de los dos lados considerados) sobre $\overline{CA}$ y así, queda determinado el punto $C''$ tal que:

$C'' \in \overline{CA}$ y $\overline{C'A'} = \overline{C''A}$

[28] En otras teorías este axioma se asume como teorema y se le reconoce como teorema lal. La decisión de seleccionar un determinado sistema de axiomas para desarrollar una teoría no es arbitraria, puesto que los sistemas de axiomas deben cumplir determinados requisitos. El sistema de axiomas aquí considerado es del texto *Geometría elemental* del autor A. V. Pogorelov, Editorial MIR.

Esto se ilustra en la figura de análisis 2.130. Unamos los puntos $C''$ y $B$, de esta forma queda determinado otro triángulo: $\Delta ABC''$, que vamos a comparar con el $\Delta A'B'C'$. En esos triángulos se cumple que:

$\overline{AB} = \overline{A'B'}$ y $\angle C'A'B' = \angle CAB$ (por premisa) y $\overline{C'A'} = \overline{C''A}$ (por el transporte del segmento realizado) entonces $\Delta ABC'' = \Delta A'B'C'$ por *axioma lal*

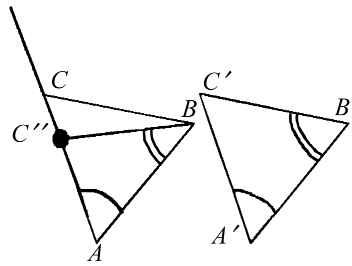



Figura 2.130

De esta igualdad de triángulos se obtiene que:
$\angle ABC'' = \angle A'B'C'$ por elementos homólogos y como $\angle A'B'C' = \angle ABC$ por premisa, se cumple que: $\angle ABC'' = \angle ABC$ por transitividad (1)

Pero también $\angle ABC'' < \angle ABC$ porque el primero de estos ángulos tiene un lado contenido en el interior del segundo ángulo. ¡Contradicción con (1)! De igual forma se prueba que es falsa la segunda desigualdad: $\overline{CA} > \overline{C'A'}$ por lo cual se cumple el teorema. l. q. q. d.
¿Cómo aplicamos los criterios de igualdad de triángulos?

*Ejemplo 37:*

En la figura 2.131: $R$ punto medio de $\overline{AB}$; $\angle ARP = \angle QRB$ y $\Delta PRQ$ isósceles de base $\overline{PQ}$. Si $P \in \overline{AC}$ y $Q \in \overline{BC}$. Demuestra que $\Delta ABC$ es isósceles.

*Solución:*

Si los triángulos $ARP$ y $RBQ$ fueran iguales sus ángulos $\angle A$ y $\angle B$ serían respectivamente iguales y con ello $\Delta ABC$ es isósceles. Probémoslo:
En los triángulos $ARP$ y $RBQ$ se cumple que:
(1) $\overline{AR} = \overline{RB}$ porque $R$ es punto medio de $AB$
(2) $\overline{PR} = \overline{RQ}$ porque $\Delta PRQ$ es isósceles de base $PQ$
(3) $\angle ARP = \angle QRB$ por datos
Por tanto: $\Delta ARP = \Delta RBQ$ (por axioma lal)
Luego por elementos homólogos $\angle A = \angle B$ y en consecuencia $\Delta ABC$ es isósceles. l. q. q. d.

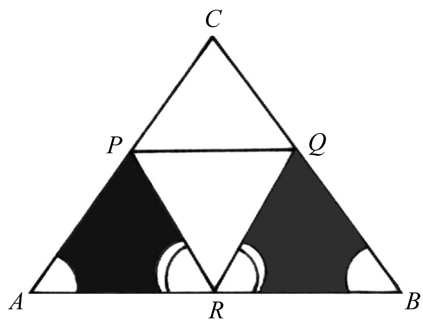



Figura 2.131

*Ejemplo 38:*

Dania y Maritza han dibujado cada una en el croquis de la figura 2.132 dos recorridos diferentes. El recorrido de Dania va desde el punto $B$ hasta el punto $P$ y está representado por la poligonal *BDCP,* en línea discontinua. El recorrido de Maritza va desde el punto *A* hasta el punto *C* y está representado por la poligonal *ABPC* con una línea continua fina. Ellas necesitan saber si estos recorridos están determinados por segmentos de la misma longitud y solamente conocen que: *O* es punto medio de $\overline{CP}$ y $\overline{DB}$ ; *D*, *P*, *A* alineados, y $\Delta DBA$ isósceles de base $\overline{DA}$ , trazado con una línea continua más oscura. ¿Puedes ayudarlas a resolver esta interrogante con los datos dados?

*Solución:*

Si comparas los segmentos que forman ambos recorridos puedes apreciar que tienen un segmento común: $\overline{CP}$ y un par de segmentos respectivamente iguales: $\overline{DB} = \overline{AB}$ porque constituyen los lados iguales del triángulo isósceles $\Delta DAB$ según los datos.
Descontando estas partes, la comparación de los recorridos depende de la relación entre los segmentos $\overline{DC}$ y $\overline{PB}$ . Vamos a probar que estos son elementos homólogos de los triángulos iguales *DOC* y *OPB* y, por tanto, son también iguales.

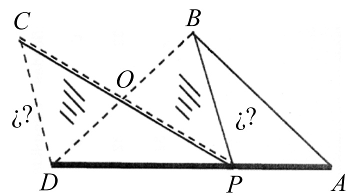


Figura 2.132

En $\Delta DOC$ y $\Delta OPB$ se cumple que:

(1) $\overline{CO} = \overline{OP}$ y (2) $\overline{DO} = \overline{OB}$ porque *O* es punto medio de $\overline{CP}$ y de $\overline{DB}$ por datos.
(3) $\angle DOC = \angle BOP$ por opuestos por el vértice.

Por tanto: $\Delta ARP = \Delta RBQ$ (por axioma lal) y por elementos homólogos $\overline{DC}$ y $\overline{PB}$ .

R/ Ambos recorridos son iguales porque el último tramo también es igual debido a la igualdad de los triángulos que contienen estos segmentos.

*Ejemplo 39:*

Para medir la distancia entre los puntos *F* y *G* entre los cuales hay un obstáculo que impide medirla, los pioneros exploradores del destacamento de 8º. A clavaron unas estacas en esos puntos y amarraron a estas unos cordeles dispuestos como se observa en la figura 2.133, de manera que: $\overline{CD} = \overline{FC}$ y $\overline{EC} = \overline{CG}$ Así, fijaron los extremos restantes a otras estacas en los puntos *E* y *D*, respectivamente. Alberto, el Jefe de Destacamento, asegura que la longitud de *FG* es la misma que la de *ED*.
¿Puedes explicar por qué Alberto hizo esta afirmación y en qué se fundamenta esta?

*Solución:*

Puede probarse con los datos dados que los triángulos *GFC* y *CD*E son iguales. De esta forma los segmentos *FG* y *ED* serían iguales por elementos homólogos y quedaría resuelta la problemática planteada.

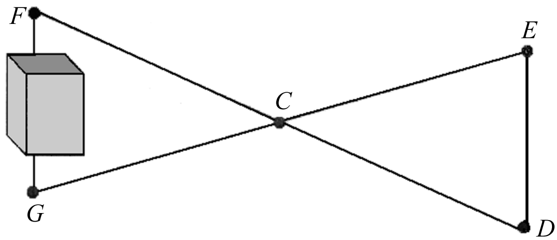



Figura 2.133

R/ La igualdad de los triángulos *GFC* y *CDE* es el fundamento de que las longitudes de los segmentos *FG* y *ED* sean iguales.

## *Ejercicios*

1. En la figura 2.134 los elementos iguales de los diferentes triángulos se han señalado con la misma marca.
   Identifica todas las parejas de triángulos que consideres iguales y fundamenta qué criterio de igualdad de triángulos te permite hacer esa afirmación.

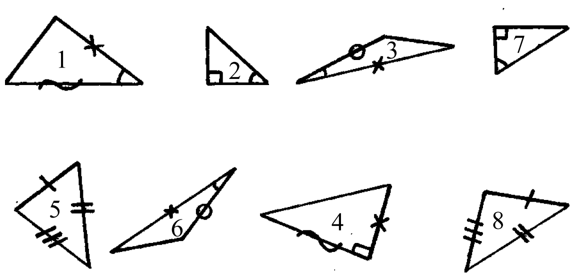



Figura 2.134

2. Considera en los triángulos dados en la figura 2.135 que los elementos iguales tienen la misma marca y señala las parejas de triángulos que no cumplen ninguno de los criterios de igualdad de triángulos. Fundamenta tu respuesta

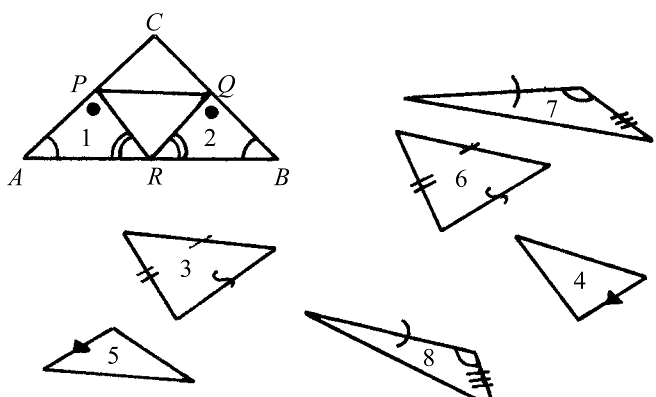



Figura 2.135

3. Selecciona entre las igualdades dadas a continuación, las que sean a tu juicio necesarias, para que los triángulos de la figura 2.136 sean iguales. Fundamenta qué criterio de igualdad de triángulos aplicaste en cada caso.

a) ☐ $\overline{PQ} = \overline{EM}$

b) ☐ $\overline{PR} = \overline{ET}$

c) ☐ $\angle Q = \angle M$

d) ☐ $\overline{RQ} = \overline{MT}$

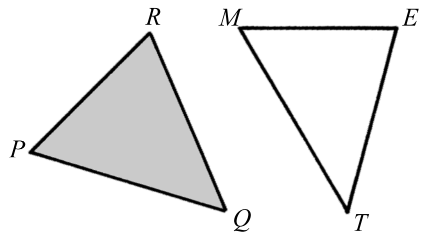


Figura 2.136

4. ¿Cuáles de las siguientes igualdades seleccionarías para probar que los triángulos $\Delta ADC$ y $\Delta DBC$ de la figura 2.137 sean iguales? Si $D \in \overline{AB}$.

a) ☐ $\overline{AD} = \overline{DB}$

b) ☐ $\angle ACD = \angle DCB$

c) ☐ $\overline{AD} = \overline{BC}$

d) ☐ $\angle CAD = \angle CBD$

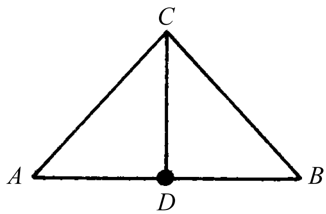


Figura 2.137

5. En la figura 2.138: $MNPQ$ es un trapecio isósceles, $RSPQ$ es un rectángulo y $\overline{MS} = \overline{RN}$. Completa los espacios en blanco para demostrar que: $\Delta MRQ = \Delta SNP$.

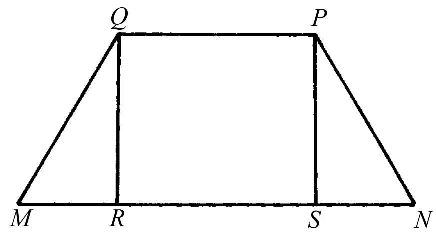


Figura 2.138

Demostración:

En los triángulos $MRQ$ y $SNP$ se tiene que:

| Igualdades | Fundamentación |
|---|---|
| (a) $\overline{MQ} = \overline{PN}$ | ________________________________ |
| (b) ______________ | por ser lados opuestos el rectángulo $RSPQ$. |
| (c) ______________ | porque son segmentos que tienen como longitud, la diferencia de las longitudes de segmentos respectivamente iguales. |
| (d) Por tanto: $\Delta MRQ = \Delta SNP$ | por el teorema: ______________________ |

6. El triángulo $EFG$ de la figura 2.139 es isósceles rectángulo de base $\overline{FG}$ y con ángulo recto en $E$, $\overline{EH}$ es la mediana relativa del lado $\overline{FG}$.
   Llena los espacios en blanco para completar las igualdades o fundamentaciones necesarias para demostrar que:
   $\Delta EFH = \Delta GEH$

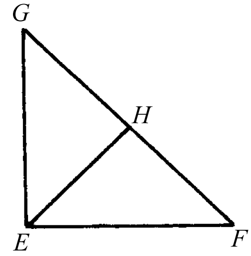


Figura 2.139

Demostración:

En los triángulos $EFH$ y $GEH$ se cumple que:

| Igualdades | Fundamentación |
|---|---|
| (a) $\angle HGE = \angle EFH$ | ________________________________. |
| $\overline{GH} = \overline{HF}$ | ________________________________ |
| __________ | porque son lados iguales del $\Delta EFG$ isósceles |
| (d) Por tanto: $\Delta EFH = \Delta GEH$ | por el teorema: ______________________ |

7. Gretel observó la figura 2.140, en la cual $ABCD$ es un rectángulo; $\overline{AE} \perp \overline{BD}$; $\overline{CF} \perp \overline{BD}$ y afirmó: “Hay tres parejas de triángulos iguales”.
   Nombra las tres parejas de triángulos iguales que vio Gretel y explica por qué son iguales.

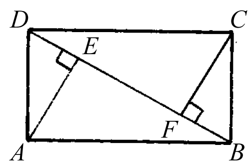


Figura 2.140

8. En la figura 2.141:
   $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{AD} = \overline{BC}$. $O$ punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$.
   a) Prueba que $\Delta AOD = \Delta COB$.
   b) ¿Qué otros criterios de igualdad de triángulos diferentes puedes aplicar para resolver este ejercicio?

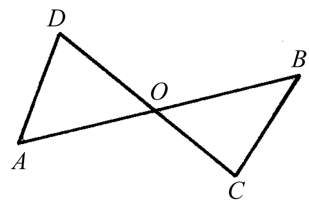


Figura 2.141

9. Completa los espacios en blanco convenientemente, según los elementos homólogos de las parejas de triángulos iguales que señaló en el ejercicio 7.
   a) El lado homólogo al lado $BC$ es el lado ___ en los triángulos ___ y ___
   b) El lado $AE$ es homólogo al lado ___ en los triángulos ____ y _____.

10. Formula un ejercicio de igualdad de triángulos en que se aplique la propiedad de la bisectriz y el *teorema ala.*

11. En la figura 2.142, $MNPQ$ rectángulo, $\Delta MNR$ isósceles de base $\overline{MN}$ y $R$ punto de $\overline{QP}$.
    a) Demuestra que $\Delta MQR = \Delta NPR$.

b) Demuestra que $R$ es punto medio de $\overline{QP}$.

c) Si el área del $\Delta MNR$ es de 12 $cm^2$ y $\overline{MN} = 60$ mm, calcula el perímetro del rectángulo $MNPQ$.

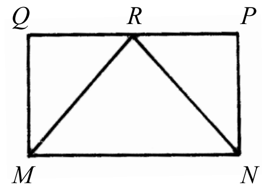



Figura 2.142

12. En la figura 2.143, $ABCD$ rectángulo, $E$ y $F$ puntos de $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ respectivamente, $\overline{EB} = \overline{DF}$ y $AECF$ paralelogramo.

    a) Demuestra que $\Delta ADF = \Delta BCE$.

    b) Clasifica el triángulo $ADF$ de acuerdo con la amplitud de sus ángulos.

    c) Si $\overline{AD} = 4{,}0$ cm, $\overline{AB} = 7{,}0$ cm y $\overline{AE} = 5{,}0$ cm, calcula el área del triángulo $ADF$.

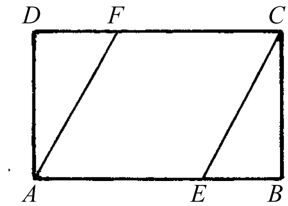



Figura 2.143

13. Investiga los criterios de igualdad de triángulos rectángulos.

## 2.4 Prisma y pirámide

En séptimo grado comenzaste el estudio de los cuerpos geométricos, en aquella oportunidad aprendiste a calcular el volumen del cubo y el ortoedro, ahora trabajaremos, además, con otros cuerpos geométricos.

Pero, ¿qué es un cuerpo geométrico?

**Recuerda** *la definición de cuerpo geométrico:*

| |
|---|
| Llamamos **cuerpo geométrico** a la región del espacio limitada por superficies planas o curvas o por la combinación de estas superficies. |

*Ejemplo 40:*

Desde la Antigüedad el hombre ha utilizado los cuerpos geométricos en sus construcciones. Observa las imágenes de la figura 2.144.

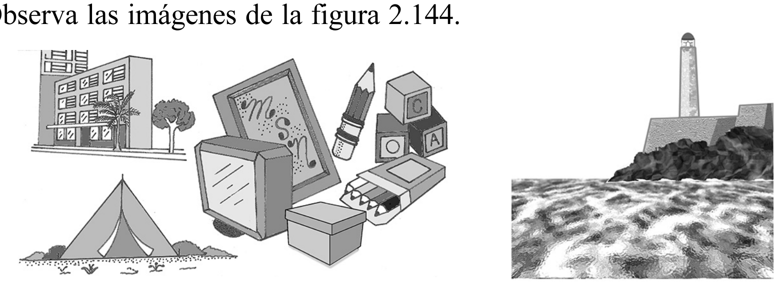


Figura 2.144

Otros ejemplos de cuerpos geométricos pudieran ser: tu lápiz, el libro de *Matemática,* la caja de tizas de tu profesor, los edificios y otros muchos que tú y tus compañeros pueden encontrar.

En este grado nos ocuparemos del estudio de dos cuerpos geométricos particulares: el prisma y la pirámide.

**Recuerda** *la definición de prisma:*

Llamamos **prisma** al cuerpo geométrico limitado por dos polígonos iguales de *n* lados situados en planos paralelos, llamados *bases,* y por *n* paralelogramos, llamados *caras laterales*.

De los cuerpos de la figura 2.144 del ejemplo 40, ¿cuáles, según la definición dada, representan prismas? Te darás cuenta que son: el libro de Matemática, la caja de tizas de tu profesora, la computadora, la caja de colores, los bloques de letras y el tipo de lápiz que aparece dibujado en la figura.

Los prismas se denominan por el número de lados de los polígonos de sus bases. Así si las bases son triángulos, se llama *triangular;* si son cuadriláteros, *cuadrangular;* si son pentágonos, *pentagonal,* etcétera.

*Elementos del prisma* (tabla 2.5)

Tabla 2.5

| | | Prisma *ABCDEF* | Prisma *MNOPQR* |
|---|---|---|---|
| Bases | | *ABC, DEF* | *MNO, PQR* |
| Caras laterales | | *ABED, BCFE, ACFD* | *MNQP, NORQ, MORP* |
| Aristas | de la base | $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FD}$ | $\overline{MN}, \overline{NO}, \overline{OM}, \overline{PQ}, \overline{QR}, \overline{RP}$ |
| | laterales | $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ | $\overline{MP}, \overline{NQ}, \overline{OR}$ |
| Vértices | | *A, B, C, D, E, F* | *M, N, O, P, Q, R* |
| Altura | | $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$ | $\overline{QS}$ |

Observa las alturas de los cuerpos de la figura 2.145, ¿notas alguna diferencia entre ellas?

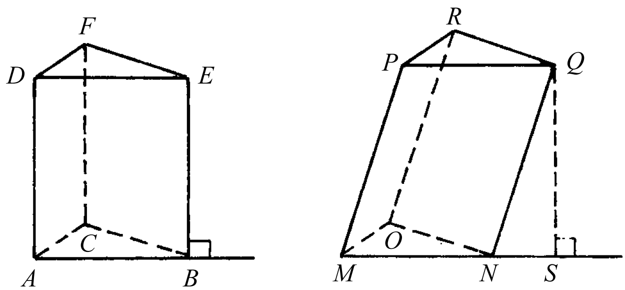



Figura 2.145

En efecto, en el prisma *ABCDEF* las alturas coinciden con las aristas laterales, mientras que no ocurre así en el prisma *MNOPQR*. ¿Por qué crees que pasa esto?

Recuerda que en un polígono la *altura* es el *segmento de perpendicular que parte de uno de los vértices y llega hasta el lado opuesto.*

Analicemos, ¿por qué en el prisma *MNOPQR* la altura no coincide con las aristas laterales? Claro que esto se debe a que en este prisma las aristas laterales no son perpendiculares a la base, en este caso decimos que es un *prisma oblicuo* y en caso contrario, *prisma recto.*

*Ejemplo 41:*

¿Qué tipo de paralelogramo serán las caras de un prisma recto? Analicemos la figura 2.146: por ejemplo, la arista lateral $\overline{AD}$ es perpendicular al plano de la base $ABC$ y, por tanto, es también perpendicular a la arista $\overline{AB}$, luego el ángulo $\angle DAB = 90°$. De aquí podemos afirmar que el paralelogramo *ABDE* es un rectángulo, pues es un paralelogramo con un ángulo recto.

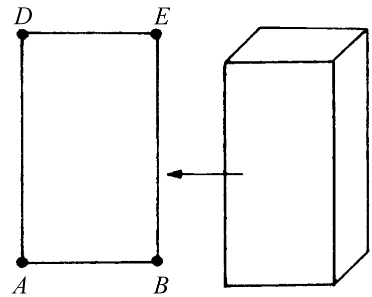



Figura 2.146

**Recuerda** *la definición de prisma regular:*

| |
|---|
| Un **prisma regular** es un prisma recto cuyas bases son polígonos regulares, es decir, un polígono que tiene todos sus lados de igual longitud y todos sus ángulos interiores de igual amplitud (por ejemplo: un triángulo equilátero, un cuadrado, un pentágono regular, entre otros. |

Las caras de un prisma regular son rectángulos iguales, pues todas las aristas de las bases son iguales y también lo son las aristas laterales.

**Recuerda** *la definición de ortoedro:*

| |
|---|
| Un prisma recto de base rectangular se denomina **ortoedro.** |

*Ejemplo 42:*

a) Observa en la figura 2.147 un ortoedro.
   Para nombrarlo primero planteas los vértices de la base inferior y después en ese mismo orden sus vértices correspondientes en la base superior.
   Así el ortoedro de la figura lo nombramos *MNOPQRST*.

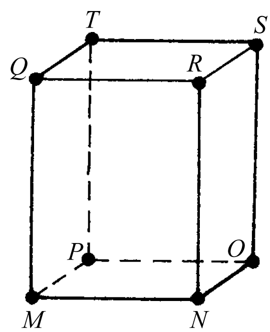



Figura 2.147

¿Conoces qué nombre recibe el prisma recto formado por seis cuadrados iguales?

Efectivamente, es el *cubo.*

El cubo de la figura 2.148 lo denotamos *MNOPQRST*.

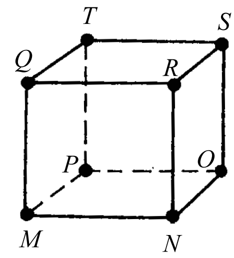



Figura 2.148

Veamos ahora la pirámide.

La Gran Pirámide de Keops en Gizéh, construida hace más de 5 000 años (fig. 2.149). En ella se empleó el trabajo de más de 100 000 hombres y su construcción duró treinta años.

Figura 2.149

**Recuerda** *la definición de pirámide:*

> Denominamos **pirámide** al cuerpo limitado por un polígono cualquiera de *n* lados contenido en un plano α y por *n* triángulos, uno por cada lado del polígono, los cuales concurren en un vértice común que no pertenece al plano α.

*Ejemplo 43:*

Observa en la figura 2.150 ejemplos de pirámides.

Para nombrarlas, primero planteas los vértices de la base y después el vértice en que concurren sus aristas laterales.

Así las pirámides de la figura las nombramos *ABCDE* y *HIJKN*.

*Elementos de la pirámide* (tabla 2.6)

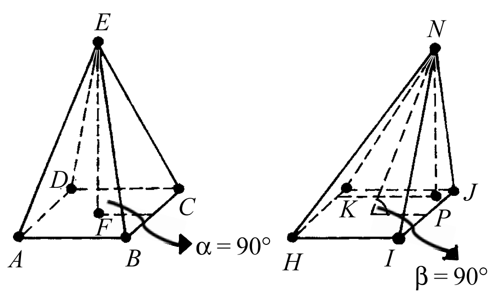



Figura 2.150

Tabla 2.6

| | | Pirámide *ABCDE* | Pirámide *HIJKN* |
|---|---|---|---|
| Base | | *ABCD* | *HIJK* |
| Caras laterales | | *ABE, BCE, CDE, DAE* | *HIN, IJN, JKN, KHN* |
| Aristas | de la base | $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ | $\overline{HI}$, $\overline{IJ}$, $\overline{JK}$, $\overline{KH}$ |
| | laterales | $\overline{AE}$, $\overline{BE}$, $\overline{CE}$, $\overline{DE}$ | $\overline{HN}$, $\overline{IN}$, $\overline{JN}$, $\overline{KN}$ |
| Vértice | | *E* | *N* |
| Altura | | $\overline{EF}$ | $\overline{NP}$ |

Analicemos, como en el caso del prisma, las diferentes posiciones que puede ocupar la altura. En la pirámide *ABCDE* su altura parte del vértice *E* y llega hasta el centro de la base *ABCD*, el punto *F*, que es su circuncentro. En este caso decimos que es una *pirámide recta.* No ocurre así, en la pirámide *HIJKN*, donde la altura corta a la base *HIJK* en un punto diferente al centro de la base; entonces decimos que se trata de una *pirámide oblicua.*

**Recuerda** *la definición de pirámide regular:*

Una **pirámide regular** es una pirámide recta cuyas bases son polígonos regulares, es decir, un polígono que tiene todos sus lados de igual longitud y todos sus ángulos interiores de igual amplitud (por ejemplo: un triángulo equilátero, un cuadrado, un pentágono regular, etcétera).

*Ejemplo 44:*

Las caras de una pirámide regular son triángulos isósceles iguales. La altura de estos triángulos recibe el nombre de *apotema* (fig. 2.151).

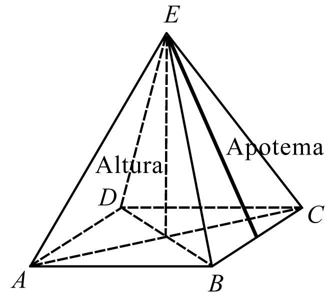



Figura 2.151

Se denomina *tetraedro* a una pirámide de cuatro triángulos, que puedes ver representada en la figura 2.152. El prefijo *tetra* significa cuatro, es decir, el nombre está relacionado con el número de caras del cuerpo.

Figura 2.152

### 2.4.1 Representación geométrica del prisma y la pirámide

Como te habrás dado cuenta, la representación de los cuerpos del espacio no refleja de forma exacta todas sus características, por ejemplo, en la figura 2.150 la cara *ABCD* es un rectángulo, pero en la figura se ha representado como un paralelogramo. Esto hace necesario precisar una forma para representar los cuerpos en el plano, una de las más usadas es la *perspectiva caballera.*

**Recuerda** *el procedimiento para representar cuerpos en perspectiva caballera*

Para representar un cuerpo en perspectiva caballera debes seguir las indicaciones siguientes:

1. Los segmentos en la dirección del ancho y la altura se representan con la misma dirección y longitud que tienen en el cuerpo que queremos representar.
2. Los segmentos en la dirección de la profundidad se trazan formando un ángulo de 45° con la horizontal y con la mitad de la longitud que tienen en el cuerpo (fig. 2.153).

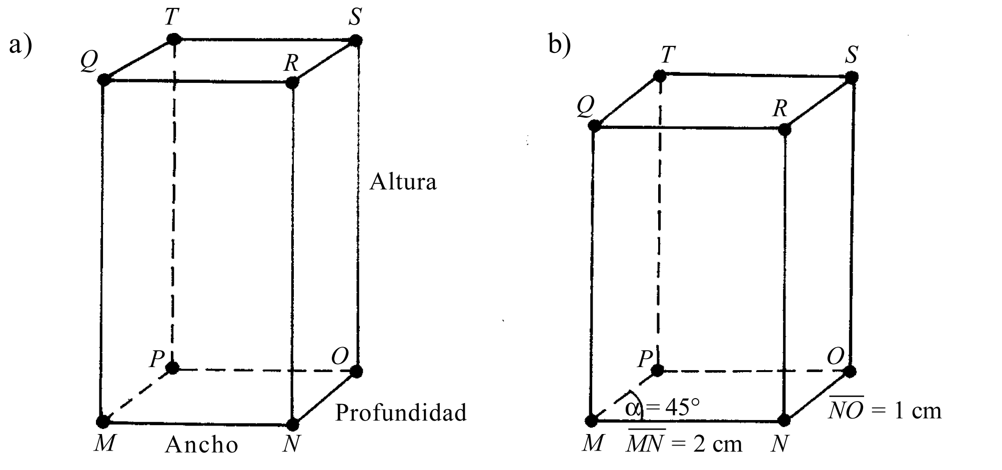



Figura 2.153

*Ejemplo 45:*

Representa en perspectiva caballera un ortoedro de base cuadrada si sabes que las aristas de las bases miden 2 u y la altura 4,5 u.

*Solución:*

Denotemos por *ABCD* y *EFGH* las bases del ortoedro (fig. 2.154).

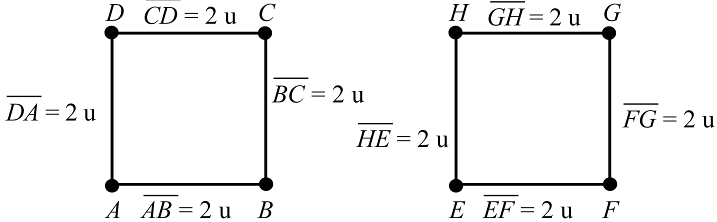



Figura 2.154

1. Representemos la arista $\overline{AB}$ (ancho) (fig. 2.155).

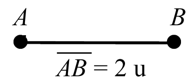



Figura 2.155

2. Construyamos a partir del segmento $AB$ un ángulo de 45° de vértice $A$ (fig. 2.156).

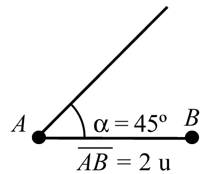



Figura 2.156

3. Determinemos en la semirrecta obtenida el punto $D$, tal que $\overline{AD} = 1$ u (fig. 2.157).

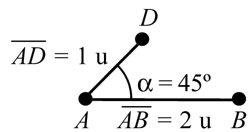



Figura 2.157

4. Tracemos la paralela a $\overline{AB}$ por el punto $D$ (fig. 2.158).

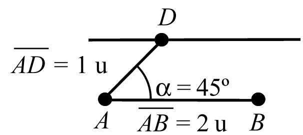



Figura 2.158

5. Tracemos la paralela a $\overline{AD}$ por el punto $B$ (fig. 2.159).

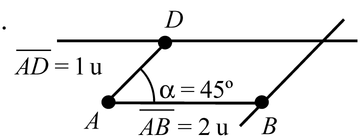



Figura 2.159

6. Denotemos por $C$ el punto de intersección de ambas paralelas (fig. 2.160).

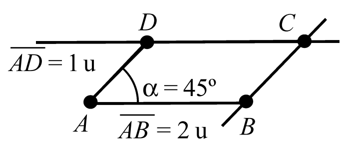



Figura 2.160

7. Tracemos la recta perpendicular a $\overline{AB}$ que pasa por $A$ (fig. 2.161).

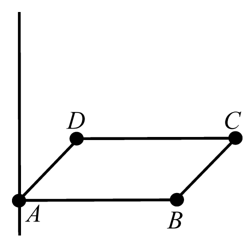



Figura 2.161

8. Determinemos en la recta obtenida el punto $E$, tal que $\overline{AE} = 4{,}5$ u (fig. 2.162).

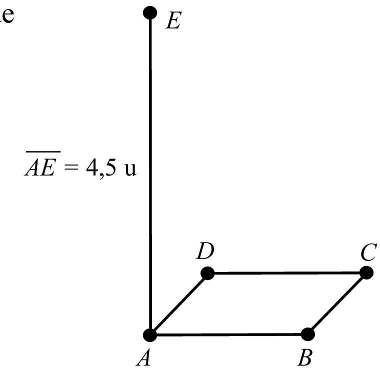



Figura 2.162

9. Tracemos la recta perpendicular a $\overline{AB}$ que pasa por $B$ (fig. 2.163).

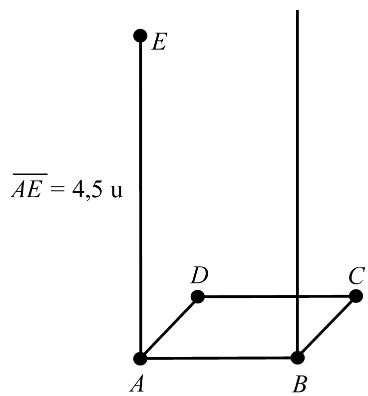



Figura 2.163

10. Determinemos en la recta obtenida el punto $F$, tal que $\overline{BF} = 4{,}5$ u (fig. 2.164).

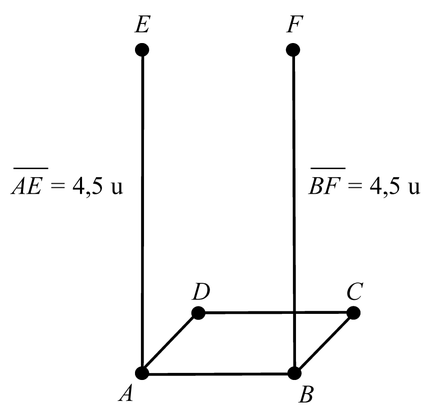



Figura 2.164

11. Tracemos la recta perpendicular a $\overline{DC}$ que pasa por $C$ (fig. 2.165).

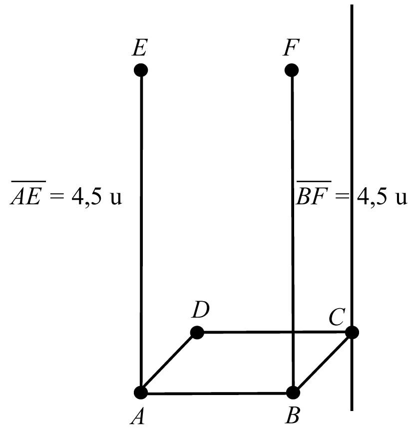



Figura 2.165

12. Determinemos en la recta obtenida el punto $G$, tal que $\overline{CG}$ = 4,5 u (fig. 2.166).

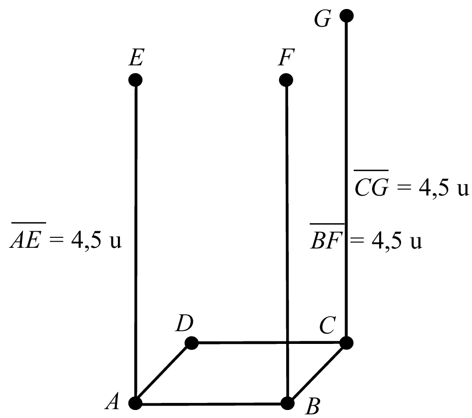



Figura 2.166

13. Tracemos la recta perpendicular a $\overline{CD}$ que pasa por $D$ (fig. 2.167).

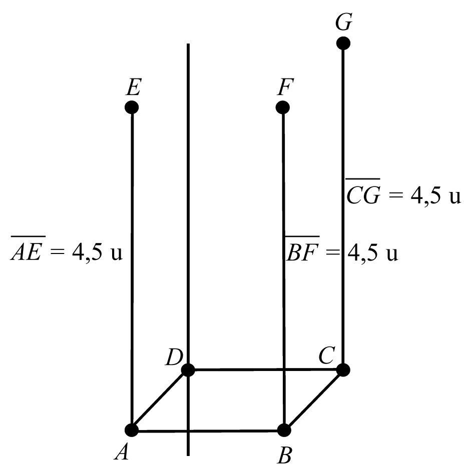



Figura 2.167

14. Determinemos en la recta obtenida el punto $H$, tal que $\overline{DH} = 4{,}5$ u (fig. 2.168).

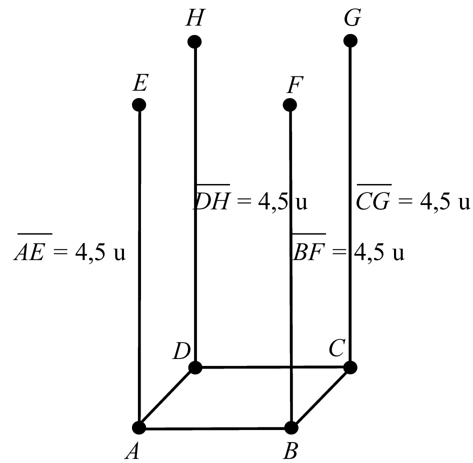



Figura 2.168

15. Unimos los puntos que determinan el cuadrilátero $EFGH$ (fig. 2.169).

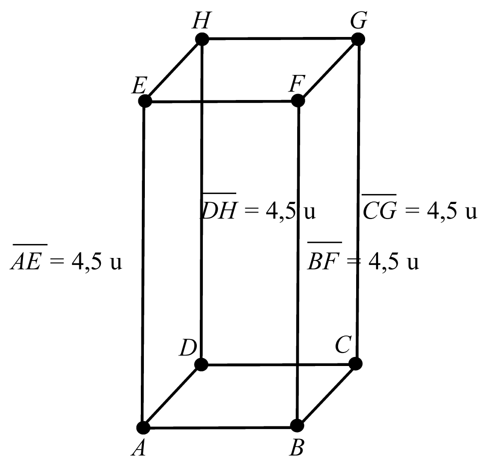



Figura 2.169

16. Como las aristas $\overline{AD}$, $\overline{DC}$ y $\overline{DH}$ no son visibles, se representan con líneas discontinuas (fig. 2.170).
Hemos representado el ortoedro *ABCDEFGH.*

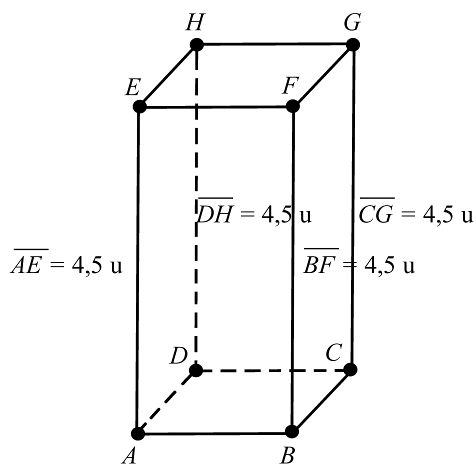



Figura 2.170

*Ejemplo 46:*

Representa en perspectiva caballera una pirámide recta de base rectangular de 6 u de ancho, 4 u de profundidad y 5 u de altura.

*Solución:*

Sea *MNOP* la base de la pirámide.

1. Representemos la arista $\overline{MN}$ (ancho) (fig. 2.171).


Figura 2.171

2. Construyamos a partir del segmento *MN* un ángulo de 45° de vértice *M* (fig. 2.172).

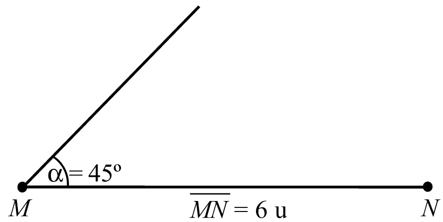



Figura 2.172

3. Determinemos en la semirrecta obtenida el punto *P*, tal que $\overline{MP}$ = 2 u (fig. 2.173).

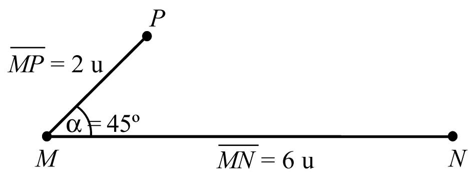



Figura 2.173

4. Tracemos la paralela a $\overline{MN}$ por el punto *P* (fig. 2.174).

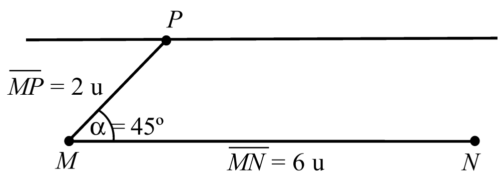



Figura 2.174

5. Tracemos la paralela a *MP* por el punto *N* (fig. 2.175).

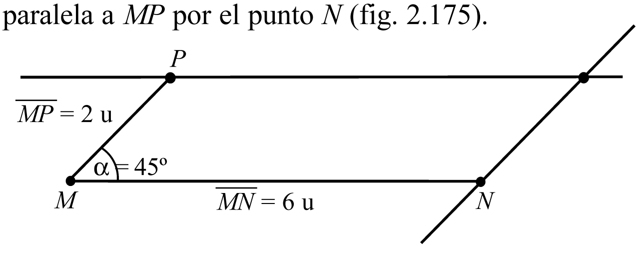



Figura 2.175

6. Denotemos por $O$ el punto de intersección de ambas paralelas (fig. 2.176).

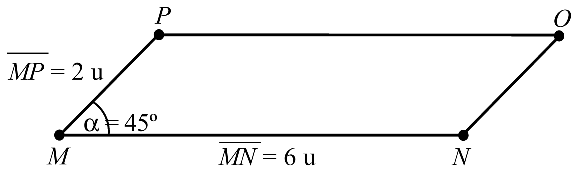



Figura 2.176

7. Tracemos las diagonales del rectángulo $MNOP$ (fig. 2.177).

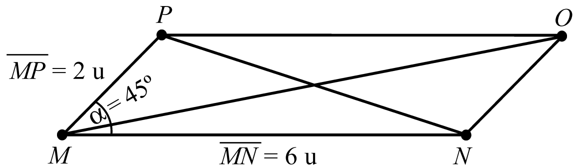



Figura 2.177

8. Determinemos el punto $S$ de intersección de las diagonales (fig. 2.178).

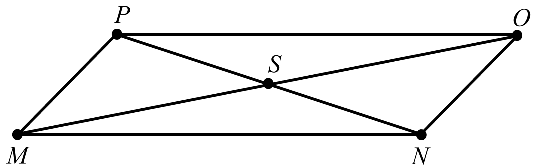



Figura 2.178

9. Tracemos la recta perpendicular a $MN$ que pasa por $S$ (fig. 2.179).

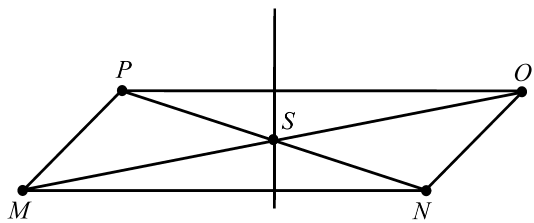



Figura 2.179

10. Determinemos en la perpendicular trazada el punto $Q$ tal que $\overline{SQ}$ = 5 u (fig. 2.180).

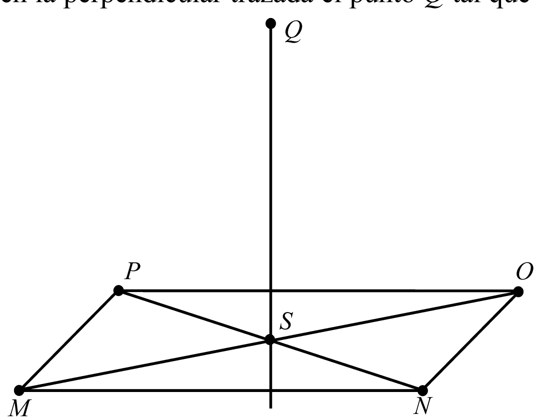



Figura 2.180

11. Tracemos las aristas laterales del prisma uniendo el punto *Q* con los puntos *M, N, O,* y *P* (fig. 2.181).

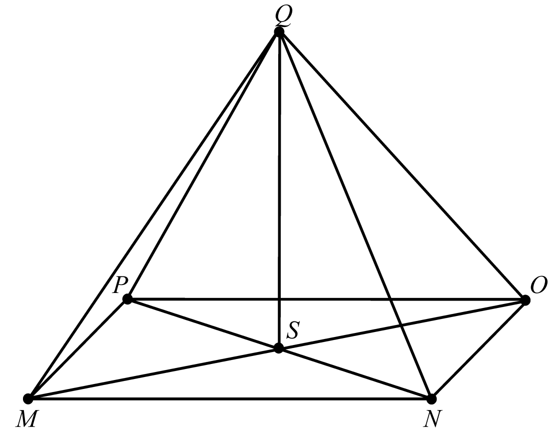



Figura 2.181

12. Representemos con líneas discontinuas los segmentos no visibles: $\overline{OP}$, $\overline{PM}$, $\overline{NP}$, $\overline{MO}$, $\overline{SQ}$, $\overline{MQ}$ (fig. 2.182).

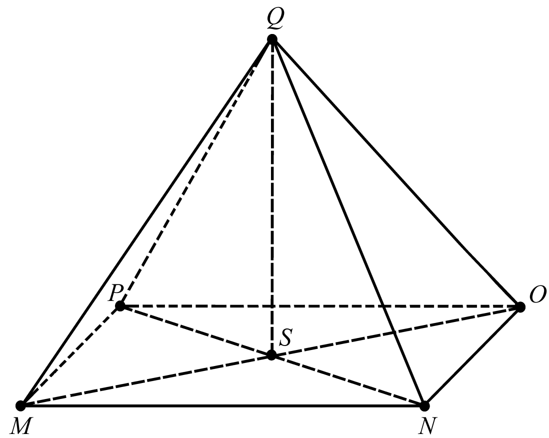



Figura 2.182

Hemos representado la pirámide *MNOPQ*.

Cuando la base del poliedro es un polígono que no contiene ángulos rectos, nos auxiliamos del trazado de su altura, por ejemplo, ¿cómo construir un prisma triangular regular?

*Ejemplo 47:*

Construye un prisma recto cuya base es un triángulo equilátero de 4 u de lado si su altura tiene una longitud de 3,5 u.

*Solución:*

Sean *HIJKLM* el prisma y *HIJ* la base inferior.

1. Representemos el triángulo *HIJ* (fig. 2.183).

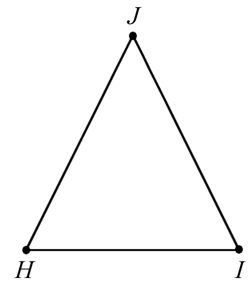


Figura 2.183

2. Tracemos la altura relativa al lado $\overline{HI}$, como el triángulo es equilátero, esta pasa por el punto medio del lado $\overline{HI}$. Denotemos este punto por *X* (fig. 2.184).

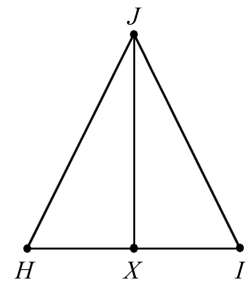


Figura 2.184

3. Representemos en perspectiva caballera el triángulo *HIJ*. Tracemos el segmento $\overline{HI} = 4$ u y determinemos su punto medio *X* (fig. 2.185).

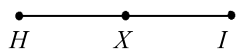


Figura 2.185

4. Representemos la altura del triángulo *HIJ*. Para esto comenzamos por construir el ángulo $\angle IXJ = 45°$ (fig. 2.186).

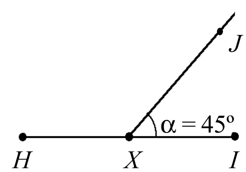


Figura 2.186

5. Determinemos el punto *J*. Para esto necesitamos medir la longitud del segmento *XJ* (fig. 2.187).

   - $\overline{XJ} = 3{,}46$ u
   - $\dfrac{1}{2} 3{,}46 \text{ u} = 1{,}73 \text{ u}$

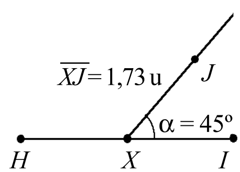


Figura 2.187

   Luego, la representación del segmento *XJ* en perspectiva caballera debe medir 1,73 u.

6. Tracemos los segmentos *IJ* y *HJ* (fig. 2.188).

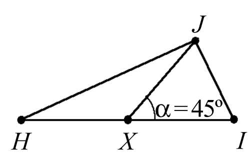


Figura 2.188

7. Tracemos las aristas laterales del prisma (fig. 2.189).

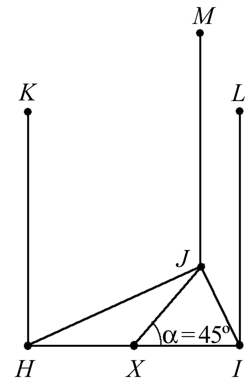



Figura 2.189

8. Tracemos la base superior *KLM* (fig. 2.190).

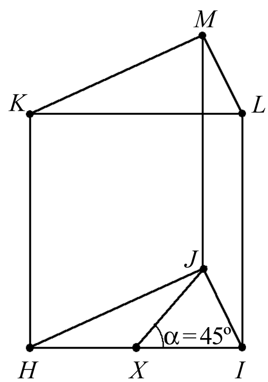



Figura 2.190

9. Representemos en líneas discontinuas los segmentos no visibles: $\overline{HJ}$, $\overline{XJ}$, $\overline{IJ}$, $\overline{MJ}$ (fig. 2.191).

   Hemos representado el prisma *HIJKLM*.

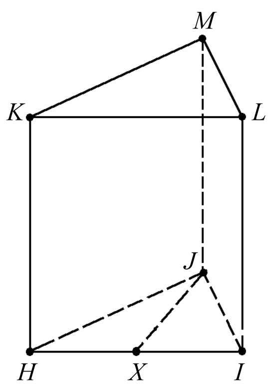



Figura 2.191

## *Ejercicios*

1. Determina cuáles de las siguientes proposiciones son falsas. Fundamenta tu respuesta.

a) Las caras laterales de una pirámide son cuadrados.
b) El número de caras de un prisma coincide con el número de lados de que tengan sus bases.
c) Los lados de las caras de un prisma se denominan aristas.
d) Las aristas de las caras laterales de una pirámide reciben el nombre de apotema.
e) En un prisma oblicuo la altura es menor que la arista lateral.

2. ¿Cuál es el menor número de caras laterales que puede tener una pirámide? ¿Por qué?
3. El número de caras que tiene una pirámide con siete vértices es:

a) Ocho caras b) Seis caras c) Siete caras

4. Dibuja en perspectiva caballera:

a) Un prisma de base cuadrada de 2,4 cm de lado, cuya altura mide 5,2 cm.
b) Una pirámide de 4 cm de altura, cuya base es un triángulo isósceles de lados $a$, $b$, $c$ ($a = b = 5$ cm; $c = 3$ cm).

## 2.4.2 Cálculo de áreas de prismas y pirámides

Pasaremos ahora a estudiar cómo calcular las áreas de estos cuerpos: el área lateral, el área de las bases y el área total.

**Recuerda** *la definición de área lateral de un cuerpo geométrico:*

| |
|---|
| El **área lateral de un cuerpo geométrico** es la suma de las áreas de cada una de sus caras laterales. |

Resulta muy útil el desarrollo de un cuerpo para calcular su área, esto no es más que el resultado de "abrir" el cuerpo y extenderlo en un plano, lo cual aplicaremos en el ejemplo siguiente.

*Ejemplo 48:*

Representa el desarrollo de la pirámide *MNOPQ* de base rectangular (fig. 2.192).

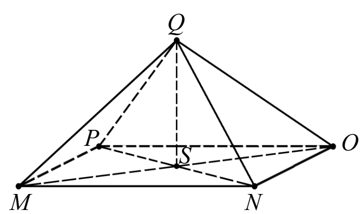


Figura 2.192

*Solución:*

$A_L = A_{MNQ} + A_{NOQ} + A_{OPQ} + A_{PMQ}$

Como la base es un rectángulo, las caras *MNQ* y *OPQ* son triángulos iguales, lo mismo ocurre con las caras *NOQ* y *PMQ* (fig. 2.193), luego:

$A_L = 2\,A_{MNQ} + 2\,A_{NOQ}$

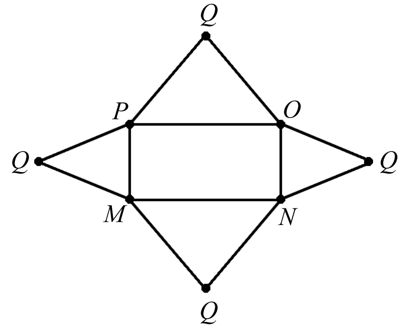



Figura 2.193

*Ejemplo 49:*

Representa el desarrollo del prisma *HIJKLM* donde la base es un triángulo equilátero (fig. 2.194).

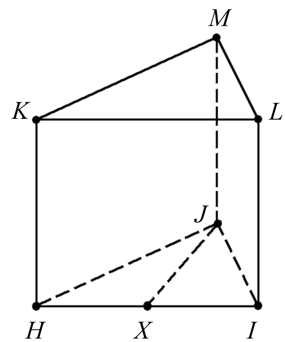



Figura 2.194

*Solución:*

$A_L = A_{HILK} + A_{IJML} + A_{JHKM}$

En este caso, como las bases son triángulos equiláteros, las caras laterales son rectángulos iguales.

$A_L = 3\,A_{HILK}$

El desarrollo del prisma *HIJKLM* queda como se muestra en la figura 2.195

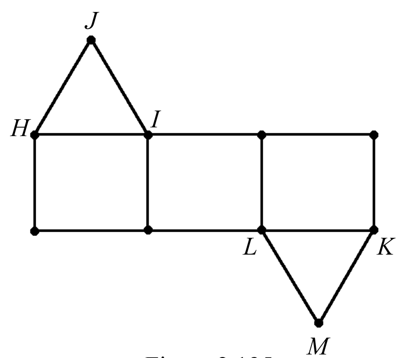



Figura 2.195

**Recuerda** *la definición de área total de un cuerpo geométrico:*

| |
|---|
| El **área total de un cuerpo geométrico** es igual a la suma del área lateral y el área de las bases. |

*Ejemplo 50:*

¿Mediante qué ecuación se puede calcular el área total de una pirámide?

*Solución:*

Se calcula mediante la ecuación:

$A_T = A_B + A_L$

En el caso de la pirámide *MNOPQ* (fig. 2.196), que la base es un paralelogramo sería:

$A_T = A_{MNOP} + A_L$
$A_T = A_{MNOP} + 2\ A_{MNQ} + 2\ A_{NOQ}$

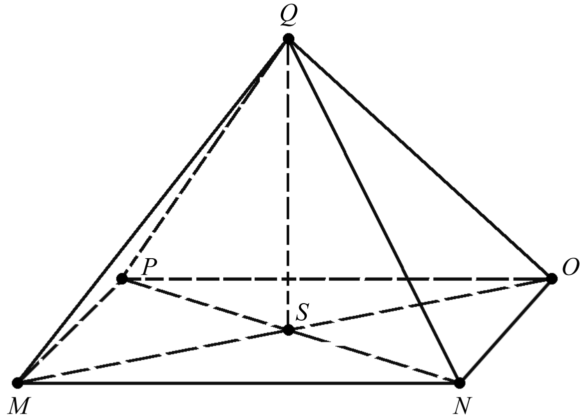



Figura 2.196

*Ejemplo 51:*

¿Mediante qué ecuación se puede calcular el área total de un prisma?*Solución:*Observa que los prismas tienen dos bases (fig. 2.194), que son polígonos iguales, por eso su área total se calcula mediante la ecuación:$A_T = 2\ A_B + A_L$En el caso del prisma *HIJKLM*, cuya base es un triángulo equilátero, sería:$A_T = 2\ A_{HIJ} + 3\ A_{HILK}$
Como puedes apreciar, el cálculo de las áreas de prismas y pirámides se reduce al cálculo del área de figuras planas, que ya conoces de grados anteriores.

*Ejemplo 52:*

Dado el prisma *ABCDEFGH*, si conoces que sus bases son rectángulos de lados iguales a 3,5 cm y 2,0 cm respectivamente y su altura tiene una longitud de 5,0 cm, represéntalo en perspectiva caballera y calcula su área lateral y su área total.

*Solución:*

(Ver figura 2.197)

$A_L = A_{ABFE} + A_{BCGF} + A_{CDHG} + A_{DAEH}$
$A_L = 2\ A_{ABFE} + 2\ A_{BCGF}$ (como la base es un rectángulo *ABFG* = *CDHG* y *BCGF* = *DAEH*)

$A_{ABFE} = \overline{AB} \cdot \overline{AE}$
$A_{ABFE} = 3{,}5\ \text{cm} \cdot 5\ \text{cm}$
$A_{ABFE} = 17{,}5\ \text{cm}^2$

$A_{BCGF} = \overline{BC} \cdot \overline{BF}$

$A_{BCGF} = 2\text{ cm} \cdot 5\text{ cm}$
$A_{BCGF} = 10\text{ cm}^2$

$A_L = 2\,A_{ABFE} + 2\,A_{BCGF}$
$A_L = 2 \cdot 17{,}5\text{ cm}^2 + 2 \cdot 10\text{ cm}^2$
$A_L = 35\text{ cm}^2 + 20\text{ cm}^2$
$A_L = 55\text{ cm}^2$

$A_B = A_{ABCD}$
$A_B = AB \cdot AD$
$A_B = 3{,}5\text{ cm} \cdot 2\text{ cm}$
$A_B = 7{,}0\text{ cm}^2$

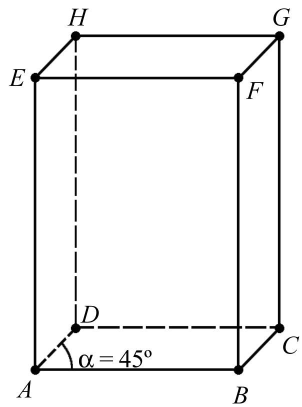


Figura 2.197

Como $A_{ABCD} = A_{EFGH}$, entonces:

$2\,A_B = 2\,A_{ABCD}$
$2\,A_B = 2 \cdot 7{,}0\text{ cm}^2$
$2\,A_B = 14\text{ cm}^2$

$A_T = 2\,A_B + A_L$
$A_T = 14\text{ cm}^2 + 55\text{ cm}^2$
$A_T = 69\text{ cm}^2$

*Ejemplo 53:*

Dada la pirámide cuadrangular regular *RSTUV*, cuya arista de la base tiene 2,0 cm de longitud y la altura de cada cara es de 5,1 cm, represéntala en perspectiva caballera y calcula su área lateral y su área total.

*Solución:*

$A_L = A_{RSV} + A_{STV} + A_{TUV} + A_{URV}$
$A_L = 4\,A_{RSV}$ (como la base es un cuadrado, todas sus caras son iguales) (fig. 2.198).

$$A_{RSV} = \frac{1}{2}\,\overline{RS} \cdot \overline{XV}$$

$$A_{RSV} = \frac{1}{2} \cdot 2\text{ cm} \cdot 5{,}1\text{ cm}$$

$A_{RSV} = 5{,}1\text{ cm}^2$

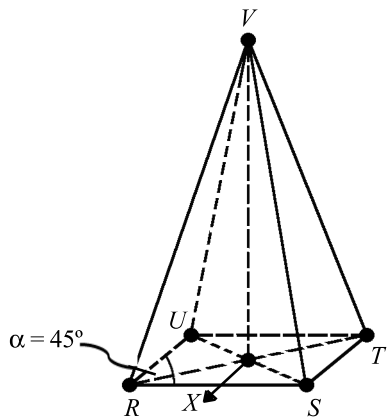


Figura 2.198

$A_L = 4\,A_{RSV}$
$A_L = 4 \cdot 5{,}1\text{ cm}^2$
$A_L = 20{,}4\text{ cm}^2$

$A_B = A_{RSTU}$
$A_B = \overline{RS}^{\,2}$
$A_B = (2\text{ cm})^2$
$A_B = 4\text{ cm}^2$

$A_T = A_B + A_L$
$A_T = 4\text{ cm}^2 + 20{,}4\text{ cm}^2$
$A_T = 24{,}4\text{ cm}^2$
$A_T \approx 24\text{ cm}^2$

*Ejemplo 54:*

Calcula el área total de los cuerpos representados en las figuras 2.199 y 2.200.

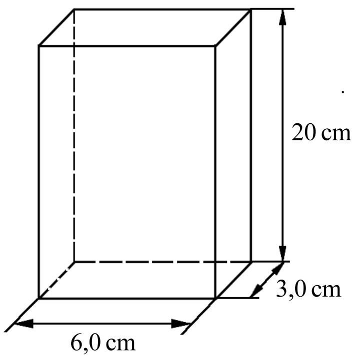



Figura 2.199

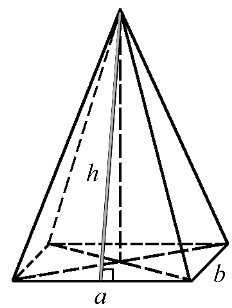



Figura 2.200

*Solución:*

La figura 2.199 representa un ortoedro cuyas dimensiones son: $a = 6{,}0$ cm; $b = 3{,}0$ cm y $c = 20$ cm, entonces:

$A_T = 2\,A_B + A_L$

Calculemos primero el área de la base. Como es un rectángulo utilizaremos la fórmula:

$A_B = a \cdot b = 6{,}0 \cdot 3{,}0$
$A_B = 18\text{ cm}^2$

Para calcular el área lateral debemos tener en cuenta que las caras son rectángulos y que las caras opuestas son iguales, por consiguiente:

$A_L = 2\,(\,a \cdot c\,) + 2\,(\,b \cdot c\,)$
$A_L = 2\,(\,a \cdot c + b \cdot c\,)$

*Solución:*

En este caso se trata de una pirámide recta de base cuadrada (fig. 2.200). Las aristas de la base miden 4,2 cm y la apotema de las caras mide 10,2 cm. Utilizaremos la fórmula:

$A_T = A_B + A_L$

La base es un cuadrado, luego:

$A_B = a^2$
$A_B = (4{,}2)^2$
$A_B = 17{,}64\text{ cm}^2$

Las caras laterales son triángulos isósceles iguales, entonces el área lateral será igual a cuatro veces el área de una de las caras.

$A_L = 4\,A_{cara}$

$A_L = 2\ (6{,}0 \cdot 20 + 3{,}0 \cdot 20)$
$A_L = 2\ (120 + 60)$
$A_L = 2 \cdot 180$
$A_L = 360\ \text{cm}^2$
$A_T = 2\ A_B + A_L$
$A_T = 2 \cdot 18 + 360$
$A_T = 36 + 360$
$A_T = 396\ \text{cm}^2$
$A_T \approx 4{,}0\ \text{dm}^2$

$$A_L = 4\left(\frac{1}{2}b \cdot h\right)$$

$$A_L = 4\left(\frac{1}{2} \cdot (4{,}2 \cdot 10{,}2)\right)$$

$$A_L = 4\left(\frac{1}{2} \cdot 42{,}84\right)$$

$A_L = 4(21{,}42)$
$A_L = 85{,}68\ \text{cm}^2$
$A_T = A_B + A_L$
$A_T = 17{,}64 + 85{,}68$
$A_T = 103{,}32\ \text{cm}^2$
$A_T \approx 1{,}0\ \text{dm}^2$

*Ejemplo 55:*

Halla el área lateral de un prisma recto cuya altura mide 5,4 m si la base es un rombo cuyas diagonales miden 6,0 m y 8,0 m.

*Solución:*

Para calcular el área lateral necesitamos conocer la longitud del lado del rombo (fig. 2.201).

Las diagonales $d_1$ y $d_2$ dividen la figura en cuatro triángulos rectángulos iguales, donde la hipotenusa es el lado $a$ del rombo y los catetos corresponden a la mitad de cada una de las diagonales.

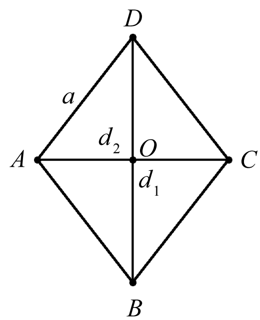


Figura 2.201

Entonces, aplicando el teorema de Pitágoras se tiene:

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$$

$$a^2 = \left(\frac{6{,}0}{2}\right)^2 + \left(\frac{8{,}0}{2}\right)^2$$

$a^2 = 3{,}0^2 + 4{,}0^2$
$a^2 = 9{,}0 + 16$
$a^2 = 25$
$a = 5{,}0\ \text{m}$

El área lateral será:

$A_L = 4 \cdot a \cdot h$
$A_L = 4 \cdot 5 \cdot 5{,}4 = 108\ \text{m}^2$
$A_L \approx 1{,}1\ \text{dam}^2$

## *Ejercicios*

1. El área lateral de un prisma recto de 2,5 dm de altura, cuya base es un rectángulo de 1,6 m por 90 cm es igual a:

   a) 125 $cm^2$ b) 1,2 $m^2$ c) $1,25 \cdot 10^{-3}$ $km^2$ d) Ninguno de los anteriores

2. Un prisma recto de base rectangular tiene una altura de 6,8 cm y las dimensiones de la base son 3,2 cm y 4,1 cm. Calcula su área lateral.
3. Calcula el área total de un prisma recto de 2,0 m de altura, cuya base es un cuadrado de 50 cm de lado.
4. Halla el área total de una pirámide cuadrangular regular si la altura de cada cara mide 8,15 dm y cada lado de la base mide 52,0 cm.
5. Halla el área total de un prisma recto cuya base tiene 90,0 m de perímetro y 450 $m^2$ de área y cuya altura mide 25,0 dm.
6. Las áreas total y lateral de un prisma son 3,629 $cm^2$ y 0,201 $dm^2$ respectivamente. ¿Cuál es el área de la base?
7. Las áreas total y lateral de una pirámide de base cuadrada miden 435 $cm^2$ y 2,91 $dm^2$ respectivamente. Calcula la longitud del lado de la base.
8. Calcula el área total de un prisma cuya altura es de 6,6 m y la base es un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 5,0 m y uno de sus catetos mide 3,0 m.
9. ¿Cuál es el área lateral de una pirámide triangular si cada lado de la base mide 10,0 m y la altura de cada cara es de 14,82 m?
10. Las aristas de un ortoedro miden 32, 54 y 8 cm. Calcula la diferencia entre el área total del ortoedro dado y la de un cubo que tenga el mismo volumen que el ortoedro.
11. Obtén una fórmula para calcular el área total de un cubo cuya arista es de longitud $a$.

## 2.4.3 Volumen del prisma

En séptimo grado estudiaste el volumen del cubo y del ortoedro. El volumen del cubo se calcula mediante la fórmula $V = a \cdot a \cdot a = a^3$, donde $a$ representa la longitud de una cualquiera de las aristas del cubo (fig. 2.202).

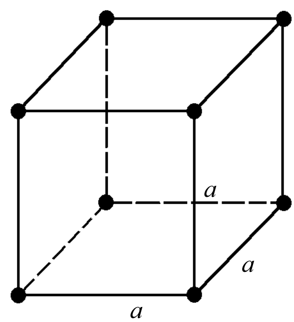


Figura 2.202

Para calcular el volumen del ortoedro se utiliza la fórmula $V = a \cdot b \cdot c$, donde $a$, $b$ y $c$ representan las longitudes del largo, el ancho y la altura del ortoedro (fig. 2.203).

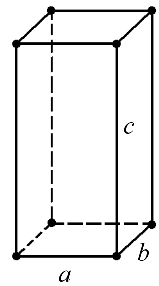


Figura 2.203

En ambos casos el producto de los dos primeros factores corresponde al área de la base de los cuerpos correspondientes; la base del cubo es un cuadrado y el producto $a \cdot a = a^2$ representa su área; análogamente el producto $a \cdot b$ es el área del rectángulo determinado por el largo y el ancho del ortoedro, es decir, su base.

El último factor de cada fórmula representa la longitud de la altura, para el cubo es $a$ y para el ortoedro es $c$.

Estos cuerpos son prismas rectos y, en general, podemos utilizar la misma fórmula para calcular el volumen de cualquier prisma. El área de la base se calcula en dependencia de cuál es el polígono de la base del prisma.[29] Por consiguiente en ambos casos la fórmula para calcular el volumen puede escribirse como:

**Recuerda** *la fórmula del volumen del prisma:*

$\boxed{V = A_B \cdot h}$

*Ejemplo 56:*

Halla el volumen de un cubo de 3,5 cm de arista.

*Solución:*

$V = a^3 = (3{,}5 \text{ cm})^3 \approx 42{,}88 \text{ cm}^3$
$V \approx 43 \text{ cm}^3$

*Ejemplo 57:*

Halla el volumen de un ortoedro que tiene 4,00 cm de ancho, 6,00 cm de profundidad y 8,00 cm de altura.

*Solución:*

$$\begin{aligned} V &= a \cdot b \cdot c \\ &= (4{,}0 \text{ cm}) \cdot (6{,}0 \text{ cm}) \cdot (8{,}0 \text{ cm}) \\ &= 192 \text{ cm}^3 \\ &= 0{,}19 \text{ dm}^3 \end{aligned}$$

[29] Colectivo de autores: *Matemática 7º. grado*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1989, p. 183.

*Ejemplo 58:*

El área total de un cubo es igual a 96 cm$^2$. Halla su volumen.

*Solución:*

| | |
|---|---|
| $A_T = 6\ a^2 = 96\ \text{cm}^2$ | $V = a^3$ |
| $a^2 = 96\ \text{cm}^2 : 6 = 16\ \text{cm}^2$ | $V = (4\ \text{cm})^3$ |
| $a = 4\ \text{cm}$ | $V = 64\ \text{cm}^3$ |

## *Ejercicios*

1. Halla el volumen de un prisma de 10,0 cm de altura, que tiene por base un cuadrado de 12,0 cm de lado.
2. ¿Cuánto mide la altura de un prisma cuyo volumen es de 6,75 dm$^3$ si el área de la base es de 15 dm$^2$?
3. La base de un prisma recto es un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6,0 cm y 8,0 cm respectivamente. Halla el volumen del prisma sabiendo que su arista lateral mide 20 cm.
4. ¿Qué volumen de aire hay en una habitación herméticamente cerrada de 7,50 m de largo, 5,40 m de ancho y 3,20 m de altura?
5. ¿Cuántos metros cúbicos de hormigón serán necesarios para construir una cisterna de forma cúbica con capacidad para 8 000 L de agua si las paredes han de tener 0,20 m de grueso y el fondo, 0,12 m?
6. ¿Qué cantidad de arena se necesita para cubrir un parque rectangular de 15 m de largo y 38 m de perímetro con una capa de 1,0 dm de altura?
7. Un ortoedro tiene 12 in[30] de largo y su ancho y altura están en la razón 4:3. Halla su área total si se conoce que su volumen es de 576 in.
8. Se quiere construir un estanque en forma de prisma cuya base tenga 6,0 m$^2$ de área. ¿Qué altura debe tener el estanque si este debe almacenar hasta 15 m$^3$ de agua?

9.* Un cubo de 5,0 cm de arista ha sido construido con una cierta cantidad de cubos blancos de 1,0 cm de arista. Luego se pinta de negro el cubo construido.

   a) ¿Cuántos cubos blancos forman el cuerpo?
   b) ¿Cuántos cubos hay totalmente blancos?
   c) ¿Cuántos cubos hay con una sola cara negra?
   d) ¿Cuántos cubos hay con dos caras negras?
   e) ¿Cuántos cubos hay con tres caras negras?

## 2.4.4 Volumen de la pirámide

Para obtener una relación entre el volumen de la pirámide y el del prisma podemos realizar el experimento siguiente:

[30] En el Sistema Internacional de Unidades la pulgada se representa por in, del inglés *inch.*

Construyamos un prisma y una pirámide de igual base y altura, de modo que podamos llenarlos de arena.

Llenamos de arena la pirámide y la vertemos en el prisma, así comprobaremos que será necesario hacer esta operación tres veces para que el prisma quede totalmente lleno.

Esto significa que el volumen del prisma es tres veces el volumen de la pirámide:

$V_{prisma} = 3 \cdot V_{pirámide}$, de donde:

$V_{pirámide} = \frac{1}{3} V_{prisma}$ [31]

Podemos obtener así una expresión para calcular el volumen de la pirámide.

**Recuerda** *la fórmula del volumen de la pirámide:*

$$\boxed{V = \frac{1}{3} A_B \cdot h}$$

Veamos ahora otra forma de obtener esta relación:

En el prisma recto *ABCDEF* de base triangular, tracemos la diagonal $\overline{AE}$ de la cara *ABED*, la diagonal $\overline{CE}$ de la cara *BCFE* y la diagonal $\overline{AF}$ de la cara *ACFD*. De esta manera el prisma se descompone en las pirámides oblicuas *AFDE*, *ABCE* y *ACFE* (fig. 2.204).

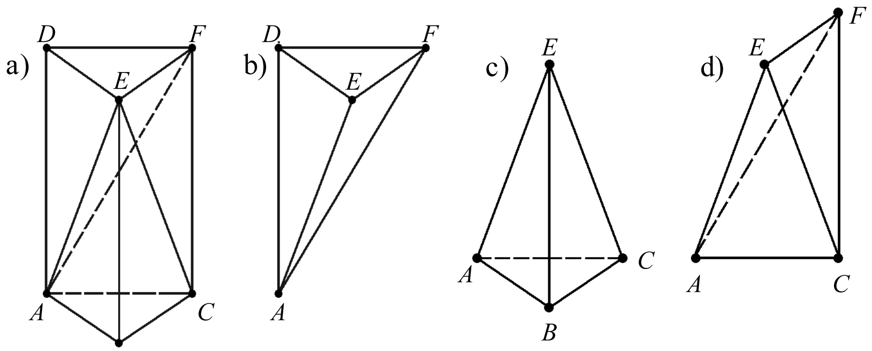



Figura 2.204

El volumen de la pirámide *AFDE* es igual al volumen de la pirámide *ABCE*, ya que sus caras *ABC* y *DEF* son iguales, según la definición de pirámide, y sus alturas $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$ también son iguales, por ser aristas laterales del prisma recto (fig. 2.205).

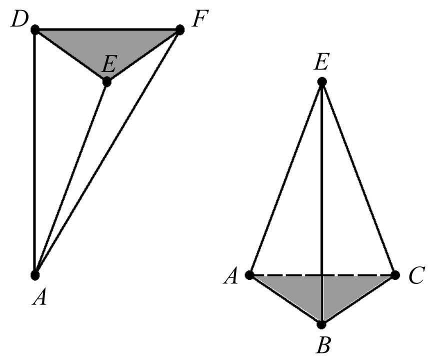



Figura 2.205

[31] Colectivo de autores: *Matemática 7o. grado*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1989, p. 184.

Además, el volumen de la pirámide $ABCE$ es igual al volumen de la pirámide $ACFE$, porque sus caras $BCE$ y $CFE$ son iguales, ya que la diagonal $\overline{CE}$ divide al rectángulo $BCFE$ en dos triángulos iguales, y la altura $\overline{AC}$ es común a ambas pirámides (fig. 2.206).

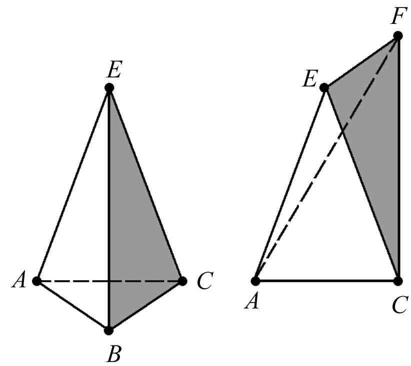



Figura 2.206

Por consiguiente, según la propiedad transitiva se cumple que el volumen de la pirámide $AFDE$ es igual al volumen de la pirámide $ACFE$, es decir, las tres pirámides tienen igual volumen.

El volumen del prisma $ABCDEF$ es igual a la suma de los volúmenes de las tres pirámides, o sea, es igual al triplo del volumen de cualquiera de ellas y por tanto, el volumen de una de estas pirámides es la tercera parte del volumen del prisma.

$$\boxed{V_{AFDE} = V_{ABCE} = V_{ACFE} = \frac{1}{3} V_{ABCDEF}}$$

Este resultado puede ser generalizado para pirámides cuya base sea cualquier polígono, lo cual podrás demostrar en grados posteriores, es decir:

$$\boxed{V_{pirámide} = \frac{1}{3} V_{prisma}} \qquad \boxed{V = \frac{1}{3} A_B \cdot h}$$

*Ejemplo 59:*

Halla el volumen de una pirámide regular cuya base es un cuadrado de 4,0 m de lado y cuya altura mide 12 m.

*Solución:*

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$$ (como la base es un cuadrado su área es igual a $a^2$)

$$V = \frac{1}{3} \cdot (4{,}0)^2 \cdot 12$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 12$$

$V = 64\ \text{m}^3$

*Ejemplo 60:*

Sobre dos caras opuestas de un cubo de 4,0 cm de arista se construyen dos pirámides regulares de 2,7 cm de altura. Halla el volumen del sólido formado (fig. 2.207).

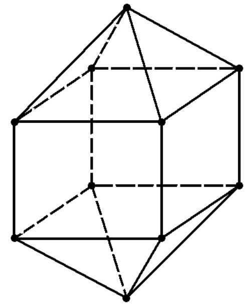


Figura 2.207

*Solución:*

El volumen del sólido formado es la suma de los volúmenes del cubo y de las dos pirámides; estas tienen igual volumen, pues sus bases son iguales (por ser caras del cubo) y sus alturas tienen igual longitud.

$V_{cubo} = a^3 = (4{,}0)^3 = 64\ \text{cm}^3$

$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 2{,}7 = 14{,}4\ \text{cm}^3$

$V_{sólido} = V_{cubo} + 2\ V_{pirámide}$

$V_{sólido} = 64 + 14{,}4 = 78{,}4\ \text{cm}^3$

$V_{sólido} \approx 78\ \text{cm}^3$

*Ejemplo 61:*

De un cubo de 6,0 cm de arista se corta la porción *ABCD*. Halla el volumen de la porción restante del cubo (fig. 2.208).

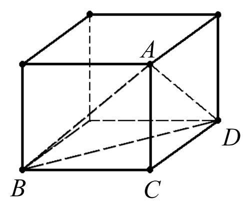



Figura 2.208

*Solución:*

El volumen del cuerpo restante es igual a la diferencia entre el volumen del cubo y el volumen de la pirámide *ABCD*. La base de esta pirámide es el triángulo *BCD*, rectángulo en *C*, ya que $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ son aristas consecutivas del cubo. Entonces:

$$A_B = \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2} \cdot 6{,}0 \cdot 6{,}0 = 18\ \text{cm}^2$$

Otra forma de calcular el área de la base es teniendo en cuenta que el triángulo *BCD* es la mitad de una cara del cubo, cuya área es igual a $a^2 = 36\ \text{m}^2$, con lo cual se tiene que $A_B = 18\ \text{cm}^2$.

$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h = \frac{1}{3} 18\ m^2 \cdot 6{,}0 = 36\ cm^3$$

$V_{cubo} = a^3 = (6{,}0)^3 = 216\ cm^3$

$V_{resultante} = 216 - 36 = 180\ m^3 = 1{,}80\ dm^3 \approx 1{,}8\ dam^3$

## *Ejercicios*

1. El volumen de una pirámide de 9,60 m de alto, siendo el área de su base de 5,0 $m^2$ es:

   a) 48,0 $m^3$   b) 16 $m^3$   c) 24 $m^3$   d) 1,6 $m^3$

2. Una pirámide de base triangular posee una altura de 2,10 m, si las dimensiones del triángulo son base 0,40 m y altura 0,36 m, calcula el volumen de la pirámide
3. Calcula el volumen de una pirámide hexagonal regular de arista lateral 26 dm y lado de la base, 10 dm.
4. La base de una pirámide es un trapecio cuyas bases miden 4,0 y 2,5 dm respectivamente, y la altura 30 cm. La altura de la pirámide es de 5,0 m. Halla su volumen.
5. A una pirámide de 72,2 $cm^3$ de volumen se le da un corte paralelo a su base, de forma tal que se obtienen dos cuerpos (fig. 2.209). Si uno de ellos es una pirámide de 4,3 cm de altura, cuya área de la base mide 12,6 $cm^2$, calcula el volumen del otro cuerpo.

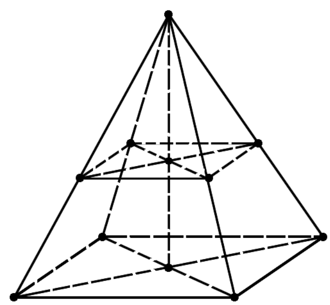


Figura 2.209

6. Al preparar una línea de ferrocarril se levantó un terraplén de 80 m de largo y 3,0 m de altura. Su ancho superior es de 5,0 m y el inferior mide 10 m (fig. 2.210). Halla el volumen de tierra acumulada en el terraplén.

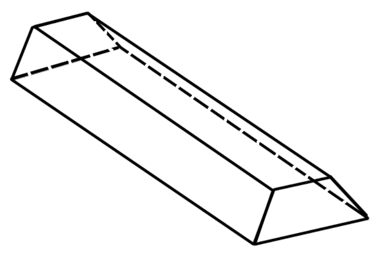


Figura 2.210

7. Un monumento está formado por un prisma de base cuadrada de 2,5 m de lado y 6,00 m de altura y por una pirámide apoyada sobre la base superior del prisma de modo

que ambas bases coinciden. Halla el volumen del monumento si su altura es de 15,5 m (fig. 2.211).

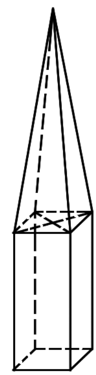


Figura 2.211

8. Una pieza en forma de pirámide tiene un agujero cúbico de 20 mm de arista. La base de la pirámide es un cuadrado de 5,3 cm de lado y la altura de la pieza es de 8,0 cm (fig. 2.212). ¿Cuál es el volumen de la pieza?

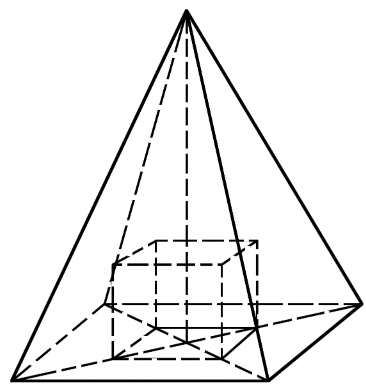


Figura 2.212

9. Una cisterna mide 15 dm de largo, 12 dm de ancho y 75 cm de altura. Si usamos un recipiente de 12 L para extraer el agua, ¿cuántas veces será posible llenar el recipiente?
10. Una de las famosas pirámides de Egipto tiene una altura de 1,38 hm y uno de los lados de su base cuadrada mide 2,24 hm. ¿Cuál es su volumen?

## EJERCICIOS DEL CAPÍTULO

1. El ojo humano abarca horizontalmente un ángulo de 120°. Imagina una persona situada en el vértice de un pentágono regular. Haz la construcción y responde:

   a) ¿Cuántos de los vértices restantes sería capaz de ver simultáneamente esa persona?
   b) ¿Y si se sitúa en el vértice de un exágono regular, cuántos vértices podría ver?

2. Construye las tres mediatrices de un triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia.

   a) ¿Dónde se cortan estas mediatrices?
   b) Observa detenidamente la construcción que realizaste y menciona todas las propiedades geométricas que se evidencian en ella.

3. Traza una circunferencia.

   a) Ubica en ella cinco puntos que formen cinco arcos iguales.
   b) Une cada punto para formar un polígono.
   c) Nombra el polígono obtenido y calcula la amplitud de sus ángulos y de los arcos que determinan las cuerdas que forman sus lados.

4. Selecciona la respuesta correcta.

4.1. Observa la esfera de un reloj, si el horario señala al número 12 y el minutero al número 5, la amplitud del ángulo comprendido entre las agujas del reloj es:

a) ___ 180°   b) ___ 120°   c) ___ 150°   d) ___ 210°

4.2. La amplitud del arco correspondiente al ángulo determinado anteriormente es de:

a) ___ 30°   b) ___ 210°   c) ___ 150°   d) ___ 300°

5. La figura 2.213 representa una instalación para practicar atletismo, los puntos *E* y *F* son cada uno los centros de dos semicircunferencias concéntricas con radios respectivamente iguales. El radio de las dos semicircunferencias exteriores es de 49,70 m.

   a) ¿Qué longitud recorre un deportista que se mueva de *C* a *D* sobre el borde de la semicircunferencia mayor?
   b) ¿Cuál es el área de superficie que ocupa la instalación?

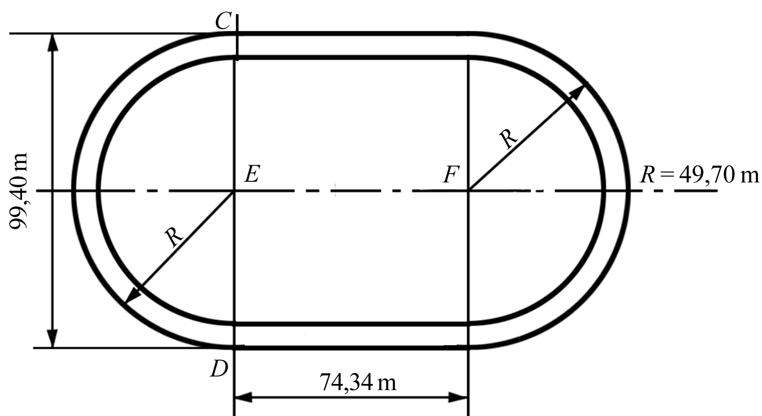



Figura 2.213

6. Sabiendo que el radio terrestre mide $6{,}378 \cdot 10^3$ km, calcula la longitud del Ecuador de la Tierra.

7. En un segmento *AB* con centro en *A* se traza una circunferencia de 5,0 cm de radio y con centro en *B* otra de 4,0 cm de radio. Completa este problema para que resulten dos problemas diferentes y resuélvelos.

8. Traza una circunferencia con un vaso. Determina el radio de esta circunferencia y elabora un problema.

9. Alberto no conoce la cantidad de cartulina que necesita para confeccionar un juego de fichas que tengan la misma superficie que las monedas de un peso. Completa los datos que le faltan a Alberto, elabora con ellos un problema y resuélvelo.

10. La rueda de un camión tiene 90 cm de radio. ¿Cuánto avanza el camión cuando la rueda ha dado 100 vueltas?

11. En la cocina de la casa de Mariana hay un estante de 2,0 m de longitud para colocar platos como muestra la figura 2.214. ¿Cuántos platos cuyo diámetro es de 62,8 cm se pueden colocar en el estante si la distancia entre dos platos es 0,17 cm?

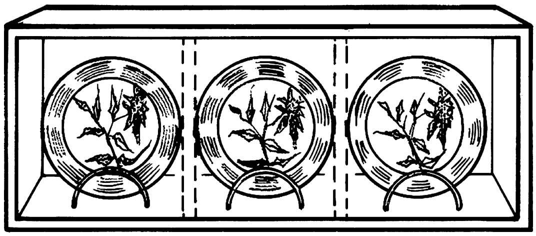



Figura 2.214

12.* Laura, Raúl y Alex están sentados en el borde de una piscina circular. Raúl y Alex se encuentran en puntos diametralmente opuestos. Ambos se lanzan a nadar en línea recta en dirección a Laura. Cuando ya han nadado 10 m, Raúl está junto a Laura y a Alex aún le faltan 14 m. ¿Qué longitud tiene el borde de la piscina?

13. Enuncie la propiedad verdadera en los casos que sean falsas.

a) ___ Dos triángulos cualesquiera son iguales si tienen respectivamente iguales sus tres ángulos.
b) ___ El diámetro es la mayor de todas las cuerdas de una circunferencia.
c) ___ El sector circular es la porción del círculo determinada por un ángulo inscrito.
d) ___ En una circunferencia las cuerdas que equidistan de su centro son diferentes.
e) ___ Desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos tangentes a la circunferencia y los segmentos determinados por el punto exterior y los puntos de tangencia son iguales.
f) ___ El volumen de un prisma de base rectangular es igual a la suma del doble del área de la base más el área lateral.
g) ___ Dos triángulos rectángulos son iguales si tienen respectivamente iguales los catetos.
h) ___ La amplitud de todo ángulo inscrito o seminscrito es igual a la del arco que determinan.
i) ___ La longitud de una circunferencia se determina por la ecuación $L = 2\pi d$.
j) ___ El centro de la circunferencia circunscrita a un polígono regular es el centro del polígono.

14. En la figura 2.215, aparecen representados diferentes elementos de una circunferencia.

    Define cada uno de los que se mencionan a continuación:

    Cuerda, diámetro, ángulo central, arco, ángulo inscrito, ángulo seminscrito, recta tangente.

    Nombra también algunos ejemplos de ellos.

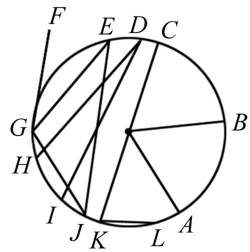



Figura 2.215

15. Para inscribir un círculo en un triángulo se trazan sus:

    a) ___ bisectrices b) ___ alturas c) ___ medianas
    d) ___ diagonales e) ___ mediatrices

16.1. Completa los espacios en blanco, analizando los datos de la figura en cada caso:

a) $R$ centro de la circunferencia (fig. 2.216).
$P$, $Q$ están en la circunferencia.
Si $\angle PRQ = 145°$, entonces $= \overset{\frown}{PQ}$ ____

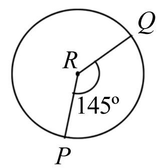



Figura 2.216

b) $A$, $B$, $C$ están en la circunferencia (fig. 2.217).
Si $\angle ABC = 60°$, entonces $= \overset{\frown}{AB}$ ____

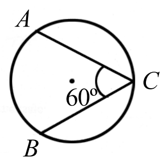



Figura 2.217

c) $P$, $R$ están en la circunferencia (fig. 2.218).
$R$ es también un punto de la recta $RQ$.
Si $\overset{\frown}{PR} = 50°$, entonces $\angle PRQ =$ ____

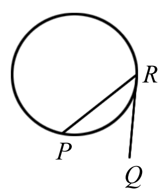



Figura 2.218

d) $A$, $B$, $C$ están en la circunferencia (fig. 2.219).

Si $\widehat{AB} = 42°$, entonces $\angle ACB =$ ____

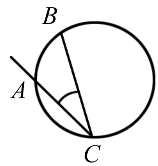



Figura 2.219

e) $R$ centro de la circunferencia (fig. 2.220).

$P$, $Q$ están en la circunferencia.

Si $\widehat{PQ} = 240°$, entonces $\angle PRQ =$ ____

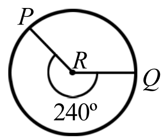



Figura 2.220

16.2. Nombra el tipo de ángulo representado en la figura de cada inciso.

17. En la circunferencia (fig. 2.221) de centro $O$ y diámetro $\overline{BC}$, $\overline{AH}$ altura relativa a $\overline{BC}$, $\Delta AMC$ isósceles de base $\overline{MC}$, $\angle ABC = 35º$.

Calcula la amplitud de los ángulos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

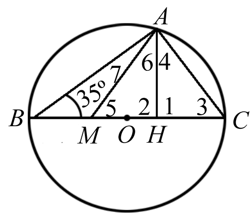



Figura 2.221

18. La $C(O;\overline{OC})$ (fig. 2.222), $\overline{AB}$ diámetro, $\overline{BC} = \overline{OC}$, $\overline{BD}$ tangente a la circunferencia en $B$.

Demuestra que: $\Delta ACO = \Delta BCD$.

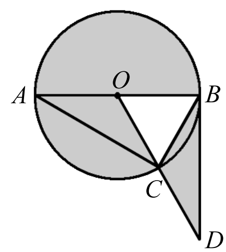



Figura 2.222

19. En la $C(O;\overline{OA})$ (fig. 2.223), $P, Q \in C$, $\overline{AB}$ : diámetro; $\overline{MN}$ : tangente en $A$ a la circunferencia dada y $\overline{PQ} \parallel \overline{MN}$.

Prueba que: $\Delta BPQ$ es isósceles.

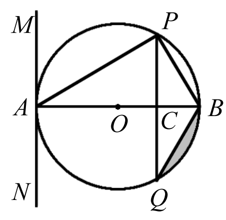



Figura 2.223

20. Demuestra que en todo paralelogramo los lados opuestos son iguales (fig 2.224).

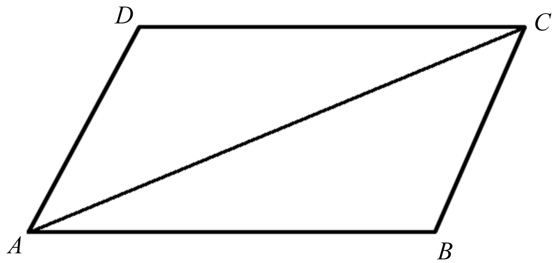



Figura 2.224

21. Demuestra que en todo paralelogramo los ángulos opuestos son iguales.

22. Demuestra que en todo paralelogramo las diagonales se bisecan.

23. Demuestra que si un triángulo *ABC* es isósceles de base $\overline{AB}$, entonces los ángulos de la base son iguales.

24. Demuestra que si un triángulo *ABC* es isósceles de base $\overline{AB}$, entonces la mediana de $\overline{AB}$ es bisectriz del ángulo *ACB* y también altura de dicho lado $\overline{AB}$.

25. Sea *ABCD* un rectángulo, *F* es el punto medio de $\overline{AD}$ y $r_{BF} \cap r_{CD} = \{E\}$ (fig. 2.225).

    a) Prueba que *F* es también el punto medio de $\overline{BE}$.

    b) Si $\overline{DF} = 4{,}4\text{ cm}$ y $\overline{DC} = 3{,}5\text{ cm}$,; calcula el área del trapecio *BCDF*.

    c) Clasifica el triángulo *BCE* según sus ángulos. Fundamenta tu respuesta.

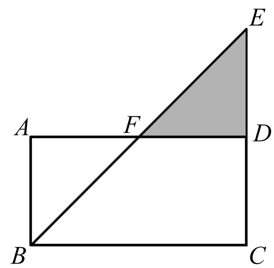



Figura 2.225

26. Una de las técnicas que comúnmente se usan para el tratamiento del cultivo del tabaco consiste en protegerlo con una tela que se coloca sobre el campo de modo semejante a un mosquitero en forma de prisma.

    Halla la cantidad de tela necesaria para cubrir un campo de 104 m de largo y 78 m de ancho si la tela debe alcanzar una altura uniforme de 2,5 m.

27. Un pionero explorador ha levantado una tienda de campaña cuya forma aparece representada en la figura 2.226. La tienda de campaña tiene dos caras triangulares iguales de 1,8 m de base y 1,2 m de altura. Las otras caras son rectangulares y miden ambas 2,4 m de largo y 1,5 m de ancho. Halla la cantidad de lona que se necesitó para confeccionar la tienda.

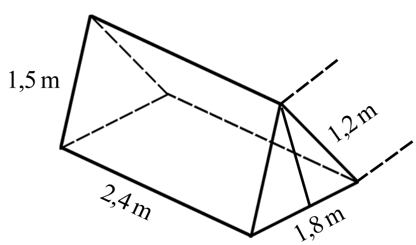



Figura 2.226

28. Halla el área total de un cubo equivalente a un ortoedro de 18,0 cm de largo, 16,0 cm de ancho y 6,00 cm de alto.

29. ¿Qué cantidad de tierra hay que extraer para abrir una cisterna en forma de ortoedro de 8,1 m de largo, 5,4 m de ancho y 1,8 m de profundidad?

30. Dos pirámides tienen igual altura. Sus bases son cuadradas, siendo el lado de uno de los cuadrados el doble que el lado del otro. ¿Qué relación existe entre sus volúmenes?

31. En La Habana hay una piscina llamada Complejo Baraguá que su base tiene forma rectangular, su perímetro es 150 m y uno de sus lados tiene un largo de 50 m. Di cuál de las siguientes respuestas corresponde al ancho de la base de la piscina.

    a) 100 m b) 25 m c) 50 m d) 150 m

32. Una piscina cuya forma es de prisma recto de base rectangular tiene 50 m de largo, 25 m de ancho y 400 cm de profundidad.

    a) ¿Cuál es, en litro, su capacidad?
    b) Si está hecha completamente con azulejos cuadrados de 0,04 $m^2$ de superficie, ¿cuántos azulejos se utilizaron?

33. Se quiere construir una columna de 20,0 m de altura y base hexagonal. Si los lados del exágono miden 1,00 m; calcula, en metro cúbico, el cemento necesario para construirla.

## PARA LA AUTOEVALUACIÓN

### Reflexiona sobre lo aprendido

1. ¿Cuáles son los tipos de ángulo que respecto a una circunferencia puedes trazar?
2. ¿Qué características tienen cada uno de los ángulos que trazaste?
3. ¿Qué fórmula se utiliza para calcular la longitud de una circunferencia?
4. ¿Qué fórmula se utiliza para calcular el área de un círculo?
5. ¿Qué expresión matemática empleamos para determinar la longitud de un arco de circunferencia?
6. ¿Qué expresión matemática empleamos para determinar el área de un sector circular?
7. ¿Cuáles son los criterios de igualdad de triángulos que estudiaste?
8. ¿Qué fórmula se utiliza para calcular el volumen de todo prisma? ¿Y cuál para su área total?
9. ¿Qué fórmula se utiliza para calcular el volumen de toda pirámide? ¿Y cuál para su área total?

### Autoexamen

1. La circunferencia de un círculo cuyo diámetro tiene el valor de 1 cm es de longitud:

    a) 1 cm b) 6,48 cm c) 3,14 cm

2. Se desea rodear de coníferas un jardín circular. El terreno ocupa una superficie de 314 $m^2$. ¿Cuántos pinos se pueden sembrar a una distancia de 6,28 m cada uno? Considere un punto el lugar que ocupará cada pino.

   a) 50 pinos  b) 20 pinos  c) 100 pinos  d) 10 pinos

3. Demuestra que los puntos medios de los lados de un triángulo isósceles *ABC* de base $\overline{AB}$ son vértices de otro triángulo isósceles.

4. Sea *O* el centro de una circunferencia *C* de radio $\overline{OQ}$. *Q*, *P* son puntos de *C*; *N* punto exterior de *C* donde se cortan las rectas *QP* y *MO* con *PN* = *OP*; $\angle N = 40°$ (fig. 2.227).

   a) Calcula la amplitud de $\angle PON$, $\angle OQP$.
   b) Determina la amplitud del arco *QP*.
   c) ¿Cuál es la amplitud del $\angle MQO$?

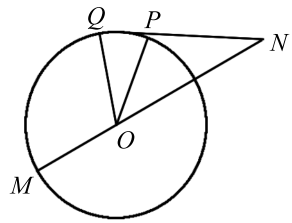


Figura 2.227

5. Una cisterna mide 15 dm de largo, 12 dm de ancho y 7,5 dm de altura. Si usamos un recipiente de 12 L para llenarla, ¿cuántas veces será necesario.

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS

**Epígrafe 2.1.1**

1. radio $(\overline{AO})$, arco $(\overset{\frown}{AB})$, diámetro $(\overline{AF})$, recta tangente (*ED*), recta secante (*AC*), cuerda $(\overline{AD})$, centro (*O*).
2. a) $\overline{AO}, \overline{OC}, \overline{OB}$  b) *AB, AC, BC*  c) *AC*  d) $\overset{\frown}{ABC}, \overset{\frown}{AC}$  e) $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}$
   f) recta tangente
3. a) 3,0 cm  b) 90°  c) recta exterior  d) recta secante
4. a) Falso, las circunferencias de igual centro son concéntricas y tienen diferentes radios  b) V  c) V  d) V
6. $\angle COA = \overset{\frown}{AC}$, $\angle DOB = \overset{\frown}{BD}$, $\angle DOC = \overset{\frown}{CBD}$
7. a) $\overset{\frown}{AD} = 82°$ y $\overset{\frown}{BC} = 38°$  b) $\overset{\frown}{AB} = 120°$, $CD = 120°$  c) $\angle AOB = 120°$, $\angle COD = 120°$
8. $\angle COD = 67{,}5°$ y $\overset{\frown}{AB} = 67{,}5°$.
9. a) $\angle COB = 60°$, $\angle DAB = 30°$, $\angle ABO = 30°$, $\angle ABC = 120°$  b) $\overset{\frown}{BDA} = 240°$
10. a) acutángulo  b) $\overset{\frown}{SR} = \overset{\frown}{RQ}$  c)145°
11. $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} = 70°$
12. $\overset{\frown}{AC} = 30°$, $\overset{\frown}{DC} = 150°$, $\overset{\frown}{ABC} = 330°$ y $\angle DOC = 150°$
13. a) $\overset{\frown}{AC} = 80°$  b) isósceles
14. 120°

15. 72°

16. $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ (I), $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC}$ y $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}$, al sustituir en (I), entonces $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}$ de donde $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

**Epígrafe 2.1.2**

1. c)
2. $\angle AOB = 70°$, $\angle ADB = 35°$, $\overset{\frown}{AB} = 70°$
3. b)
4. a) rectángulo b) 50°
5. c)
6. d) 30°
7. $\angle AOE = 160°$

8.1. a) $\angle AOC$ b) $\angle ABC$

8.2. $\overset{\frown}{250}°$

9. a) $NP = 90°$ b) isósceles
10. $\angle OAB = 30°$, $\angle ABC = 120°$
11. $\angle ABE = 40°$
12. $\overset{\frown}{PR} = 185°$
13. a) $\overset{\frown}{CD} = 60$ y $\overset{\frown}{DB} = 120°$ b) 6,3 cm
14. a) $\angle BAC = 60°$, $\overset{\frown}{BDC} = 120°$, $\overset{\frown}{ABD} = 160°$ b) No, $M \notin \overline{AD}$
15. a) $\angle B = 90°$ b) sugerencia: probar que $ABCD$ es un rectángulo.
16. b) $A_{MNP} = 6{,}0\text{cm}^2$ c) $P_{MNP} = 12$ cm
17. $\angle ODC = 65°$, $\angle BCD = 135°$
18. $\angle AOB = 100°$

**Epígrafe 2.1.3**

1. a) $\angle DEB = \angle DEM$ b) $\angle MCH = \angle FCH$, $\angle MBI = \angle EBI$
2. $\angle DAB = 50°$, $\angle AOB = 100$, $\angle CAB = 90°$
5. $\overset{\frown}{AB} = 140º$, $\angle AMB = 70º$
6. $\angle AMB = 115°$ $\angle AOB = 170°$
8. $\angle ABM = 46°$, $\angle BAT = 46°$, $\angle MAB = 88°$, $\angle AOB = 92°$
10. Pepe

**Epígrafe 2.2.1**

1. 1. APOTEMA

2. ROMBO
3. DIAGONAL
4. MEDIATRIZ
5. PENTÁGONO
6. INSCRITO
7. CIRCUNSCRITO
8. EXÁGONO

2. a) F (todo pentágono es un polígono convexo).
   d) F (todo polígono regular se puede inscribir a una circunferencia).
3. a) Ver figura 2.228. b) Ver figura 2.229.
   c) El lado del exágono es igual a 0,2 dm o 2,0 cm y $r = l = 2{,}0$ cm (fig. 2.230).

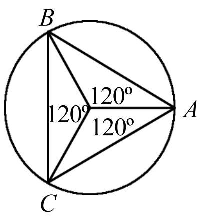


Figura 2.228

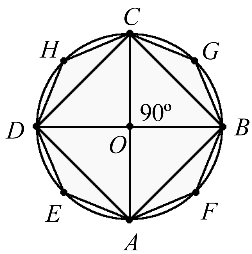


Figura 2.229

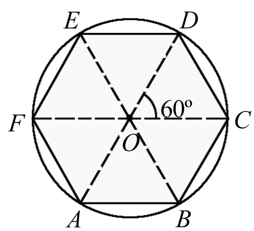


Figura 2.230

4. Ver figura 2.231.

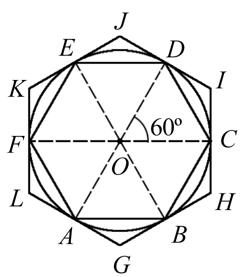


Figura 2.231

6. a) 1 620° b) Puede tener 3, 4, 5, 6, 9 o 10 lados c) $\alpha = 156°$
7. a) 3,0 cm b) 24 cm c) 36 $cm^2$
8. $A_{ABCD} = 50{,}0$ $cm^2$
9.* El centro $O$ de la circunferencia inscrita, es también el centro de la circunferencia circunscrita al cuadrado, por tanto, las diagonales $AC$ y $BD$ se cortan en $O$ (fig. 2.232).

El triángulo $AOB$ es rectángulo e isósceles de base $AB$, $\overline{AB} \perp \overline{OP}$, es altura y mediana a la vez, por tanto, $\overline{OP} = \frac{\overline{AB}}{2}$, pero $r = \overline{OP}$, luego

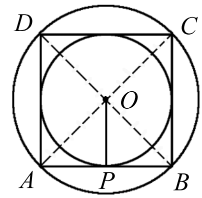



Figura 2.232

$$r = \frac{\overline{AB}}{2}$$
$$2r = \overline{AB}$$
$$d = \overline{AB} \quad \text{l. q. q. d.}$$

10. a) Isósceles de base $AE$ b) Rectángulo en $E$ c) $\widehat{AFD} = 120°$
 d) 240° e) $P_p = 6 \cdot 6 = 36$ cm

**Epígrafe 2.2.2**

1. a) $L = 11$ cm b) $L = 13$ dm c) $L = 188$ mm
2. a) $L = 6{,}3$ km b) $L = 38$ dm c) $L = 8{,}8$ m
3. a) $r = 1{,}00$ m b) $r = 3{,}5$ km c) $r = 20{,}00$ cm
4. Tendrá que caminar aproximadamente 40 003 km.
5. El tractor ha avanzado 1,5 km, cuando cada rueda ha dado 400 vueltas.
6. Cada rueda tiene que dar 50 vueltas para recorrer 78,5 m.
7. La suma de los arcos es aproximadamente de 25 cm.
8. Ver tabla 2.7.

Tabla 2.7

| ***L*** | ***d*** | ***r*** | ***b*** | α |
|---|---|---|---|---|
| 13,2 cm | 4,20 | 2,10 | 1,83 cm | 50° |
| 24 cm | 7,8 cm | 3,9 cm | 13 cm | 200° |
| 15,7 cm | 5,00 m | 2,50 cm | 3,93 m | 90° |
| 14,8 cm | 4,71 cm | 2,36 cm | 10,0 cm | 243° |
| 15 cm | 4,8 cm | 2,4 cm | 2,5 m | 60° |
| 2,70 cm | 0,86 cm | 0,43 cm | 0,45 cm | 30° |

9. $L \approx 97$ cm
10. b) ≈19 cm
11. c) La longitud del arco $BC$ es igual a 2,5 dm.
12. a) El triángulo $ABC$ es rectángulo, porque el ángulo $C$ está inscrito en un arco de circunferencia de amplitud igual a 180°.
 b) La cuerda $\overline{AB}$ es la mayor de las cuerdas, o sea, es el diámetro de la circunferencia.
 c) $L = 7{,}5$ cm.
13. El recorrido del asiento del columpio cuando el ángulo es máximo es de 3,8 cm.

14. El extremo libre del minutero, al avanzar 20 min recorre aproximadamente 13 cm.

**Epígrafe 2.2.3**

1. 1-F, 2-D, 3-A, 4-B, 5-C, 6-E

2. c) El área del círculo se puede calcular utilizando la relación $\pi \cdot \dfrac{d^2}{4}$.

3. a) $A_C \approx 154\ \text{cm}^2$ b) $A_C \approx 79\ \text{m}$ c) $A_C \approx 314\ \text{cm}$

4. a) $A_C \approx 707\ \text{cm}^2$ b) $A_C \approx 2{,}3\ \text{m}^2$ c) $A_C \approx 133\ \text{mm}^2$

5. a) $r \approx 2{,}8$ mm b) $d = 20{,}0$ cm c) $r \approx 2{,}50$ dm y $d \approx 5{,}00$ dm

6. a) $A_A \approx 1{,}4\ \text{dm}^2$ b) $A_A \approx 35\ \text{dm}^2$

7. a) $r = 6{,}0$ m; $d = 12$ m; $A_{SC} \approx 14\ \text{m}^2$

   b) $r \approx 4{,}71$ cm; $d \approx 9{,}42$ cm; $A_C \approx 69{,}7\ \text{cm}^2$; $\alpha \approx 292°$

   c) $L \approx 31$ cm; $A_C \approx 79\ \text{cm}^2$; $\alpha \approx 70°$; $A_{SC} \approx 15\ \text{cm}^2$

8. $A_S \approx 3{,}4\ \text{cm}^2$

9. $A_S \approx 1{,}3 \cdot 10^2\ \text{cm}^2$

10. $A_S \approx 1{,}8 \cdot 10^2\ \text{cm}^2$

11. $A_S \approx 11\ \text{m}^2$

12. $A_{SM} \approx 1{,}1\ \text{m}^2$

13. $b \approx 44$ mm

14. Los niños disponen para jugar de un área aproximada de $7{,}8 \cdot 10^3\ \text{m}^2$.

15. La razón entre sus superficies es 0,9.

16. Es mayor 2,25 veces.

17. a) La *pizza* se cortó en 8 pedazos.

    b) La longitud aproximada de la *pizza* es 94,2 cm.

18.* $A_S \approx 35\ \text{cm}^2$

19.* $A_S = 8{,}220\ \text{cm}^2$

20.* $A_S = 0{,}64\ \text{cm}^2$

21.* $r = 2{,}0$ cm

22. $A_S \approx 1{,}0\ \text{dm}^2$

## Epígrafe 2.2.4

1. a) Cuba obtuvo 5 medallas de oro.

   b) Oro: $\frac{5}{14}=0,36$; plata: $\frac{3}{14}=0,21$;

   bronce: $\frac{6}{14}=0,43$

   c) Amplitud del sector:

   $\alpha_1=\frac{5}{14}\cdot 360°=129°;\ \alpha_2=\frac{3}{14}\cdot 360°=77°;\ \alpha_3=\frac{6}{14}\cdot 360°=154°$

   (Ver figura 2.233)

Actuación de Cuba en Londres

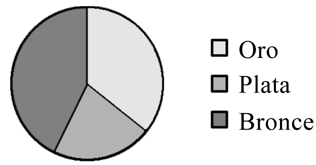



Figura 2.233

2. a) Están aún sin incorporarse el 20 %.
   b) Prefieren el círculo de interés de gastronomía 104 alumnos.
   c) Amplitud del sector:

$$\alpha_1=\frac{20}{100}\cdot 360°=72° \qquad \alpha_2=\frac{33}{100}\cdot 360°=119°$$

$$\alpha_3=\frac{27}{100}\cdot 360°=97° \qquad \alpha_4=360°-(72°+119°+97°)=72°$$

   (Ver figura 2.234).

Incorporados a círculos de interés

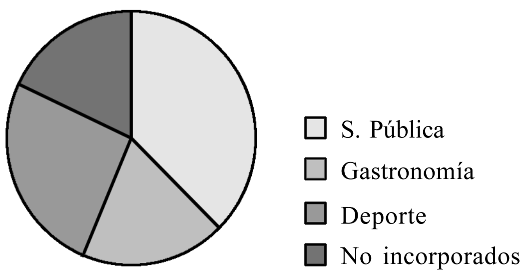



Figura 2.234

3. a) Mujeres; la cuarta parte son niños.
   b) Niños: 60; mujeres: 96 y hombres: 84

## Epígrafe 2.3.1

1. *Simetría axial de eje* m
   Son puntos fijos los que pertenecen al eje de simetría, en particular *P*.

Se aceptan las rectas: *MN, MP, MQ, NP, NQ, PQ*

Sus respectivas imágenes: *M'N', M'P', M'Q', N'P', N'Q', P'Q'*

Un segmento cualquiera: $\overline{MN}$

Su imagen: $\overline{M'N'}$

Ángulo: $\angle MNP$

Su imagen: $\angle M'N'P$

*Simetría central de centro* O

El centro *O* es el único punto fijo.

Se aceptan las rectas: *DE, EF, FG, GD*

Sus respectivas imágenes: *D'E', E'F', F'G', G'D'*

Un segmento cualquiera: $\overline{DE}$

Su imagen: $\overline{D'E'}$

Ángulo: $\angle DGF$

Su imagen: $\angle D'G'F'$

*Traslación*

No tiene puntos fijos.

Se aceptan las rectas: *AB, BC, AC*

Sus respectivas imágenes: *A'B' = CB', B'C', A'C' = CC'*

Un segmento cualquiera: $\overline{AB}$

Su imagen: $\overline{CB'} = \overline{A'B'}$

Ángulo: $\angle CAB$

Su imagen: $\angle C'A'B' = \angle C'CB'$

*Rotación de centro* O *y ángulo* $\alpha$

El centro *O* es el único punto fijo. De igual forma que en los casos anteriores las rectas y segmentos están determinados por dos puntos. Ver el segundo recuadro del epígrafe 2.3.1.

2. a) $\overline{CM}$ mediana de $\overline{AB}$; $\overline{C'M}$ imagen de $\overline{CM}$ (fig. 2.235).
   b) *M* ortocentro de $\Delta MNP$ por ser rectángulo; $\Delta MN'P'$ imagen de $\Delta MNP$ (fig. 2.236).

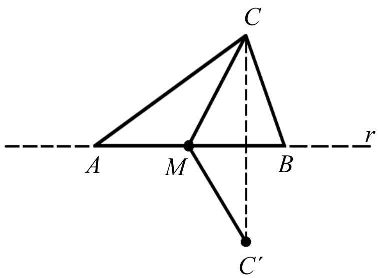


Figura 2.235

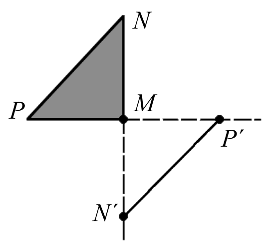


Figura 2.236

   c) *PS* bisectriz $\angle QPR$ y *PS = QS'* segmento y su imagen por la traslación que transforma *P* en *Q* (fig. 2.237).

3. Simetría axial de eje *s*, en la cual *s* es la mediatriz de los segmentos *NP* y *MQ* (fig. 2.238).

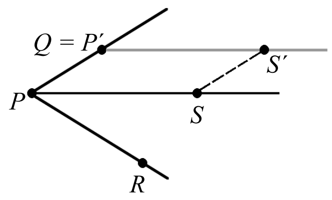



Figura 2.237

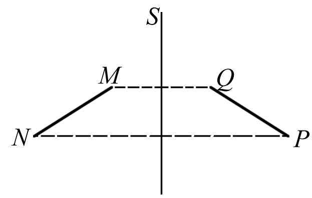
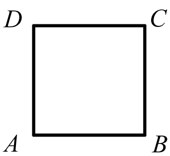



Figura 2.238

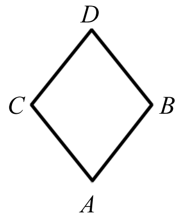
## Epígrafe 2.3.2

2. a) Se ejemplifica uno de los resúmenes que se piden (fig. 2.240).

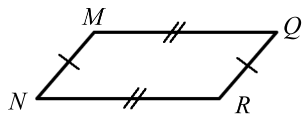
Diferentes casos de segmentos iguales[32]




Lados de un cuadrado



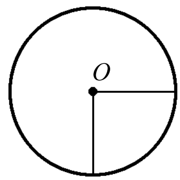

Lados de un rombo



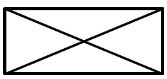

Lados opuesto de un paralelogramo

$\overline{MN} = \overline{QR}$

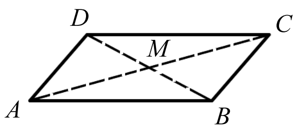
$\overline{MQ} = \overline{NR}$




Radios de la circunferencia



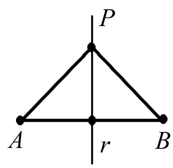
Diagonales de un rectángulo o trapecio isósceles




*M:* punto de intersección de las diagonales de un paralelogramo *ABCD*

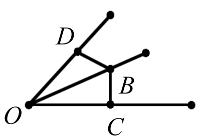
$\overline{AM} = \overline{MC}$; $\overline{BM} = \overline{MD}$


*M:* punto medio de $\overline{AB}$ : $\overline{AM} = \overline{MB}$



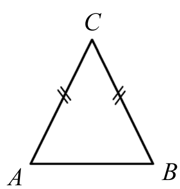

*P:* punto de la mediatriz *r* de $\overline{AB}$

$\overline{AP} = \overline{PB}$

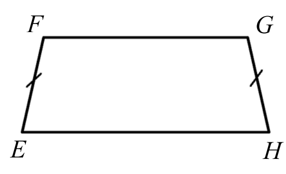



*B:* punto de la bisectriz de $\angle DOC$; $\overline{DB}$ y $\overline{CB}$ distancia del punto *B* a los lados del $\angle DOC$:

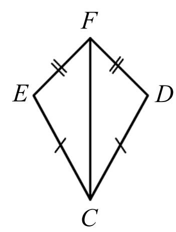
$\overline{DB} = \overline{CB}$




Laterales del triángulo isósceles *ABC* de base *AB*




Laterales del trapecio isósceles de bases *EH* y *FG*




Lados simétricos del trapezoide simétrico

Figura 2.239

[32] Tomado de la tesis del licenciado Heriberto Otaño Hernández, profesor de la Secundaria Básica Orestes Acosta del municipio Boyeros.

**Epígrafe 2.3.3**

1. Parejas de triángulos iguales: 1 y 4; 3 y 6 (criterio lal) 5 y 6 (criterio lll).
2. Triángulos que no cumplen ninguno de los criterios de igualdad de triángulos son: **1 y 2** porque no es suficiente que tengan respectivamente los ángulos iguales para que sean triángulos iguales. **5 y 4** que tengan solo un lado respectivamente igual no es un criterio para determinar que dos triángulos sean iguales.
3. Criterio lll: a, b y d     Criterio lal: a, c y d
4. Criterio lal: a, c y d     Criterio ala: b, c y d
5. a) Porque *MNPQ* trapecio isósceles.   b) $\overline{QR} = \overline{PS}$   c) $\overline{MR} = \overline{SN}$
   d) Por *teorema lll.*
6. a) Porque son ángulos base del $\Delta EFG$ isósceles.
   b) Porque $\overline{EH}$ es la mediana relativa al lado $\overline{FG}$.
   c) $\overline{GE} = \overline{EF}$   d) Por *teorema lal*
7. Pareja 1: $\Delta AED = \Delta FBC$ por *teorema ala,* ya que $\overline{AD} = \overline{BC}$ por ser lados opuestos el rectángulo *ABCD*; $\angle ADE = \angle CBF$ por alternos entre las paralelas *AD* y *BC*, con secante $\overline{DB}$; $\angle DAE = \angle FCB$ por *teorema de terceros ángulos*.

   Pareja 2: $\Delta ABD = \Delta BCD$ por *teorema lll,* ya que $\overline{AD} = \overline{BC}$ y $\overline{DC} = \overline{AB}$ por ser lados opuestos del rectángulo *ABCD* y $\overline{BD}$ lado común.

   Pareja 3: $\Delta ABE = \Delta FCD$ por *teorema ala,* ya que $\overline{DC} = \overline{AB}$ por ser lados opuestos el rectángulo *ABCD*; $\angle ABE = \angle FDC$ por alternos entre las paralelas *DC* y *AB*, con secante $\overline{DB}$; $\angle EAB = \angle FCD$ por *teorema de terceros ángulos*, ya que son iguales respectivamente los ángulos de la pareja de ángulos ya mencionada, se cumple también que $\angle AEB = \angle DFC = 90°$ porque $\overline{AE} \perp \overline{BD}$ y $\overline{CF} \perp \overline{BD}$ según datos.
8. $\Delta AOD = \Delta COB$ puede probarse por los tres criterios: teorema *ala,* teorema *lll y* teorema *lal.*
9. a) $\overline{AD}$ en $\Delta AED = \Delta FBC$ y también en $\Delta DAB = \Delta BCD$.
   b) $\overline{FC}$ en $\Delta BCF = \Delta AED$ y también en $\Delta FCD = \Delta ABE$.

11. a) $\Delta MQR = \Delta NPR$ se sigue por el *teorema lal,* al considerar: $\overline{NP} = \overline{QM}$ lados opuestos en el rectángulo *MNPQ*; $\overline{NR} = \overline{RM}$ por lados iguales de $\Delta MNR$ isósceles y $\angle QMR = \angle PNR$ con amplitud igual a la diferencia de dos parejas de ángulos de amplitudes respectivamente iguales ($\angle QMR = \angle PNR = 90°$) y ($\angle RMN = \angle RNM$) ángulos base del $\Delta MNR$ isósceles.

    b) Se sigue del inciso a) por elementos homólogos.

c) El perímetro de *MNPQ* es igual a 20 cm, ya que si $A = 12\ \text{cm}^2$, entonces $h = 4{,}0$ cm, pero como segmentos perpendiculares entre paralelas son iguales, se cumple para los lados $\overline{NP}$ y $\overline{QM}$ en el rectángulo *MNPQ* que $\overline{NP} = \overline{QM} = 4\ \text{cm}$ y con ello su perímetro es 20 cm, haciendo la conversión $\overline{MN} = 60\ \text{mm} = 6{,}0\ \text{cm}$.

12. a) $\Delta ADF = \Delta BCE$ se sigue por *teorema lll* de $\overline{EB} = \overline{DF}$ por datos, $\overline{AD} = \overline{BC}$: lados opuestos de *ABCD* rectángulo y $\overline{EC} = \overline{AF}$ : lados opuestos de *AECF* paralelogramo; pero también por *teorema lal*, pues, además de $\overline{AD} = \overline{BC}$ lados opuestos de *ABCD* rectángulo y $\overline{EC} = \overline{AF}$ : lados opuestos de *AECF* paralelogramo, se cumple $\angle D = \angle B$ por ser ángulos interiores del rectángulo *ABCD*.

    b) $\Delta ADF$ rectángulo en *D*, porque $\angle D$ es ángulo interior del rectángulo *ABCD*.

    c) Área de $\Delta ADF$ es igual a 4,0 cm², porque $\overline{EB} = \overline{AB} - \overline{AE} = 7 - 5 = 2\ \text{cm} = \overline{DF}$ ,

    luego $A = \dfrac{\overline{AD}}{2} \cdot \overline{DF} = \dfrac{4}{2} \cdot 2 = 4{,}0\ \text{cm}^2$.

## Epígrafe 2.4.1

1. a) F, las caras son paralelogramos. b) V c) V
   d) F, la apotema es la altura de las caras laterales. e) V
2. El menor número de caras posibles es tres.
3. b)

## Epígrafe 2.4.2

1. b)
2. $A_L = 97\ \text{cm}^2$
3. $A_T = 4{,}5\ \text{m}^2$
4. $A_T \approx 112\ \text{dm}^2$
5. $A_T = 725\ \text{cm}^2$
6. $A_B = 82{,}35\ \text{dm}^2$
7. Arista de la base: 12 cm
8. $A_T \approx 79{,}2\ \text{m}^2$
9. $A_L \approx 222\ \text{m}^2$
10. $A_{T(ortoedro)} = 7\ 424\ \text{cm}^2$; $V_{ortoedro} = 13\ 824\ \text{cm}^3$; $\text{Arista}_{\text{cubo}} \approx 51{,}7$ cm;
    $A_{T(cubo)} \approx 4\ 870\ \text{cm}^2$; $A_{T(ortoedro)} - A_{T(cubo)} = 13\ 824 - 4\ 870 = 8\ 954\ \text{cm}^3$

## Epígrafe 2.4.3

1. $V = 14{,}4\ \text{dm}^3$

2. $h = 4{,}5$ cm
3. $V = 9{,}6$ dm$^3$
4. $V \approx 130$ m$^3$
5. 320 m$^3$
6. Hay que extraer aproximadamente 140 m$^3$ de tierra.
7. $A_T = 432$ in$^2$
8. $h = 2{,}5$ m
9. a) 125  b) 27  c) 54  d) 36  e) 8

**Epígrafe 2.4.4**

1. b)
2. $V = 50{,}4$ dm$^3$
3. $V \approx 2{,}07 \cdot 10^3$
4. $V \approx 0{,}16$ m$^3$
5. $V \approx 53$ cm$^3$
6. $V \approx 1{,}8$ dam$^3$
7. $V \approx 0{,}14$ dam$^3$
8. $V \approx 67$ cm$^3$
9. Se podrá llenar 112 veces.
10. $V \approx 2{,}31$ hm$^3$

**Ejercicios del capítulo**

1. El análisis se debe centrar en el ángulo que se determina por el vértice de referencia ($B$) donde está situado el observador y los dos vértices a ambos lados de él, porque como la poligonal-borde del polígono va cerrando en el sentido de la flecha como muestra la figura 2.240 se supone que este ángulo de observación incluya al resto de los vértices.

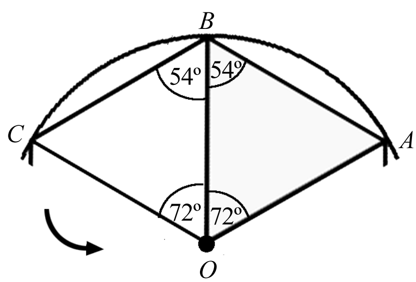



Figura 2.240

   a) En el caso del pentágono regular, el ángulo central es de 72° y determina triángulos isósceles con ángulos base de 54°, por lo cual el ángulo desde donde se observa es de 108° contenido en el ángulo de observación de 120°, luego sin incluir a $B$, se observan los cuatro vértices restantes.

b) En el caso del exágono regular, el ángulo central es de 60° y determina triángulos equiláteros con todos los ángulos de 60°, por lo cual el ángulo desde donde se hace la observación es de 120° que coincide con el ángulo de observación también de 120, luego sin incluir a $B$, se observan los cinco vértices restantes.

4. 4.1. c) 4.2. c)

5. Recorrido $\overset{\frown}{CD} = 156{,}0$ m; $A_{instalación} = 2\ 290$ m$^2$

6. $L \approx 40{,}053\ 84 \cdot 10^3$ km

10. El camión avanza 56,5 km.

11. Longitud de un plato: 19,7 cm; caben 31 platos (31 · 6,28 cm = 194,68 cm) que requieren de 30 espacios entre platos, o sea, 30 · 0,17 = 5,1 cm, lo cual totaliza una longitud de 199,78 cm.

12. $L_{piscina} = 81{,}6$ m

13. Son falsas: a), c), d), f), h), i)

15. a)

16.1. a) $\overset{\frown}{PQ} = 145°$ b) $\overset{\frown}{AB} = 120°$ c) $\angle PRQ = 25°$
d) $\angle ACB = 21°$; $\angle PRQ = 240°$

17. $\angle 1 = 90°$; $\angle 2 = 90°$; $\angle 3 = 55°$; $\angle 4 = 35°$; $\angle 5 = 55°$; $\angle 6 = 35°$; $\angle 7 = 20°$

18. La igualdad de los triángulos se sigue por el criterio *ala,* pues el lado igual se da en los datos; se comprueba la igualdad de los ángulos adyacentes a él, calculando sus amplitudes, aplicando propiedades del triángulo equilátero y de los ángulos adyacentes, centrales y seminscritos, el teorema de Tales y el teorema de la suma de amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo.

19. Demostración: $\overline{MN}$ perpendicular a $\overline{AB}$ por propiedad de la tangente en $B$, luego también es perpendicular a su paralela $\overline{PQ}$, $\overline{AB}$ es perpendicular a la cuerda $\overline{PQ}$, luego la biseca, y con ello $\overline{CB}$ está contenida en ella por lo que sería altura y mediana al mismo tiempo del lado $\overline{PQ}$ en el $\Delta PQB$ y así ese triángulo sería isósceles.

20. Sea $ABCD$ un paralelogramo cualquiera, para probar la igualdad de dos segmentos y también la igualdad de dos ángulos, por lo general, aplicamos la igualdad de triángulos. Como la figura es un cuadrilátero (fig. 2.241), se necesita una construcción auxiliar para "obtener triángulos", triángulos que se relacionen con los lados opuestos de $ABCD$. Tracemos por ello la diagonal $\overline{AC}$.

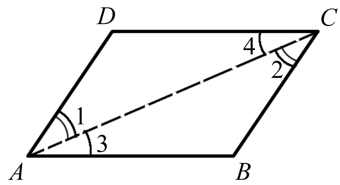


Figura 2.241

Demostración:

En los triángulos $ABC$ y $ACD$ se cumple:

(1) $\overline{AC}$: lado común

(2) $\angle 1 = \angle 2$ por alternos entre las paralelas $AD$ y $BC$, con secante $\overline{AC}$

(3) $\angle 3 = \angle 4$ por alternos entre las paralelas $AB$ y $CD$, con secante $\overline{AC}$

Por tanto: $\Delta ABC = \Delta ACD$ por *teorema ala.*

Se sigue por elementos homólogos que: $\overline{DC} = \overline{AB}$ y $\overline{AD} = \overline{BC}$ que son lados opuestos del paralelogramo $ABCD$ y, por tanto, se cumple la tesis**.**

21. Debe probarse la igualdad de dos parejas de ángulos: $\angle ADC = \angle ABC$ (I) y $\angle DAB = \angle BCA$ (II).

Demostración:

De la igualdad de triángulos probada en el ejericio 20 se sigue también que: $\angle ADC = \angle ABC$ (I). Por otro lado, por lo ya fundamentado:

$$\left.\begin{aligned}\angle 1 = \angle 2\\ \angle 3 = \angle 4\end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 \Rightarrow \angle DAB = \angle BCA \quad \text{(II)}$$

Se tiene por (I) y (II) la igualdad de los ángulos opuestos del paralelogramo $ABCD$ y, por tanto, se cumple la tesis.

22. Ahora la figura de análisis debe incluir las diagonales de un paralelogramo (fig. 2.242) y si las diagonales de $ABCD$ se cortan en $O$, entonces la tesis que debo probar es que: $\overline{AO} = \overline{OC}$ y $\overline{DO} = \overline{OB}$.

Demostración:

En los triángulos $ABO$ y $CDO$ se cumple que:

(1) $\overline{DC} = \overline{AB}$ por ser lados opuestos del paralelogramo $ABCD$

(2) $\angle 1 = \angle 2$ por alternos entre las paralelas $AB$ y $CD$, con secante $\overline{AC}$

(3) $\angle 3 = \angle 4$ por alternos entre las paralelas $AB$ y $CD$, con secante $\overline{BD}$

Por tanto: $\Delta ABO = \Delta CDO$ por teorema *ala.*

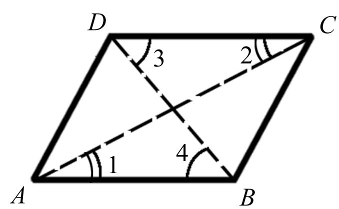


Figura 2.242

Se sigue por elementos homólogos que: $\overline{AO} = \overline{OC}$ y $\overline{OD} = \overline{OB}$. por lo cual las diagonales del paralelogramo $ABCD$ se bisecan y con ello se cumple la tesis.

23. Sea $\Delta ABC$ isósceles de base $\overline{AB}$, para probar la igualdad de dos ángulos, por lo general se aplica la igualdad de triángulos y se necesita para ello una construcción auxiliar.

    En este caso, para probar la igualdad de los ángulos base del $\Delta ABC$, se necesita obtener en la figura, triángulos relacionados a estos ángulos base (fig. 2.243). Tracemos la bisectriz del ángulo principal $\angle ACB$, denotémosla $CD$.

    Tesis: $\angle A = \angle B$

    Demostración:

    En $\Delta ADC$ y $\Delta CDB$ se cumple:

    (1) $\angle 1 = \angle 2$ porque $\overline{CD}$ bisectriz del $\angle ACB$

    (2) $\overline{AC} = \overline{CB}$ porque $\Delta ABC$ isósceles de base $\overline{AB}$

    (3) $\overline{CD}$ lado común de $\Delta ADC$ y $\Delta CDB$

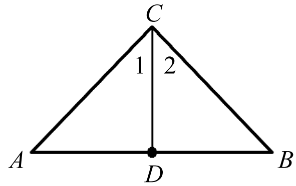


Figura 2.243

    Por tanto: $\Delta ADC = \Delta CDB$ por teorema *lal*
    Se sigue por elementos homólogos que: $\angle A = \angle B$, l. q. q. d.

24. Sea $\overline{CD}$ mediana de $\overline{AB}$ en $\Delta ABC$ isósceles de base $\overline{AB}$ por lo que $D \in \overline{AB}$ (fig. 2.244)

    Tesis 1: $\overline{CD}$ es bisectriz del $\angle ACB$, o sea: $\angle 1 = \angle 2$

    Tesis 2: $\overline{CD}$ es altura de $\overline{AB}$, o sea $\angle ADC = \angle CDB = 90°$

    La tesis 1 se sigue por elementos homólogos, a partir de probar la igualdad de $\Delta ADC$ y $\Delta CDB$, por teorema *lal,* por propiedad de la mediana $\overline{CD}$ y $D$ punto medio de $\overline{AB}$, $\overline{AD} = \overline{DB}$; se tiene también la igualdad de los ángulos base: $\angle A = \angle B$ y la igualdad de los lados laterales del triángulo isósceles.

    La tesis 2 se sigue de la misma igualdad de triángulos anterior, por elementos homólogos que: $\angle ADC = \angle CDB$ y como, además, son rectos por ser adyacentes iguales, entonces con ello $\overline{CD}$ es altura de $\overline{AB}$.

25. a) Se sigue por elementos homólogos a partir de probar la igualdad de $\Delta AFB$ y $\Delta FDE$, por teorema *lal,* ya que: $\overline{AF} = \overline{FD}$ ($F$ punto medio de $\overline{AD}$); $\angle BAF = \angle FDE$ (ángulo rectos porque $ABCD$ rectángulo) y $\angle AFB = \angle EFD$ por opuestos por el vértice.

    b) $A = h \cdot \dfrac{(B+b)}{2} = \overline{DC} \cdot \dfrac{\left[\overline{BC} + \overline{DF}\right]}{2} = \overline{DC} \cdot \dfrac{\left[(\overline{DF} + \overline{AF}) + \overline{DF}\right]}{2}$

    $$= 3{,}5 \cdot \frac{[(4{,}4 + 4{,}4) + 4{,}4]}{2}$$

    $$= 23{,}1 \approx 23 \text{ cm}$$

    R/ El área del trapecio $BCDF$ es aproximadamente 23 cm$^2$.

c) $\Delta BCE$ es rectángulo por ser $\angle BCD = 90°$, ya que es ángulo interior del rectángulo $ABCD$.

26. Cantidad de tela que se necesita: $T$
$T = A_{lateral} + A_{(una\ base)} = 9\ 022\ m^2 \approx 90{,}2\ hm^2$

27. Cantidad de lona que se necesitó: $9{,}36\ m^2 \approx 9{,}4\ m^2$

28. Dos cuerpos equivalentes tienen igual volumen, un cubo equivalente a ese ortoedro tendrá un volumen de $1\ 728\ cm^3$ y arista 25,9 cm, dada por la raíz cúbica de ese número y con ello $A_T = 4\ 025\ cm^2 = 40{,}2\ dm^2$

29. $V = 78{,}7\ m^3 \approx 79\ dm^3$

30. El volumen de una pirámide es cuatro veces el volumen de la otra.

31. b)

32. a) 5 000 000 L b) 46 250 azulejos

33. $A_B = p \cdot a$ con $p$: semiperímetro y $a$: apotema; $A_B = 3 \cdot 5\sqrt{3} = 25{,}95\ m^2$
$V = 25{,}95 \cdot 20 = 519\ m^3$

# CAPÍTULO 3

## *Variables, ecuaciones y funciones*

### 3.1 Traducción de situaciones de la vida al lenguaje algebraico

**¡!** Los Objetivos de Desarrollo del Milenio (ODM) se establecieron en el año 2000 en la llamada Cumbre del Milenio que organizó la Organización de las Naciones Unidas (ONU) y fueron ocho en total: *reducir* a la *mitad* la pobreza extrema y el hambre; lograr la *enseñanza primaria* universal, *igualdad* de géneros y la *autonomía* de la mujer; *disminuir* la mortalidad infantil en *dos tercios, mejorar* la salud materna y *combatir* efectivamente el sida, el paludismo y otras enfermedades.[33]

Nuevamente encuentras en textos de la prensa palabras que tienen un sentido matemático y que pueden expresarse utilizando el lenguaje propio de la Matemática.

Desde tus estudios en la escuela primaria has utilizado las variables y has realizado traducciones del lenguaje común al algebraico empleando para esto las palabras clave, que tienen un significado matemático y pueden ser expresadas en el código del lenguaje de las variables. Igualmente has traducido del lenguaje algebraico al común.

*Ejemplo 1:*

Escribe en el lenguaje algebraico las siguientes situaciones prácticas señalando en cada caso el significado de la variable utilizada:

a) Cuatro veces la cantidad de estudiantes que solicitan ingresar a las escuelas pedagógicas.

   En esta situación la palabra clave es *cuatro veces,* que significa que se multiplica la cantidad tantas veces como indica el número, en este caso, por cuatro. Si designas a la variable $x$ la cantidad de estudiantes que solicitan ingresar a las escuelas pedagógicas, entonces la traducción al lenguaje algebraico es $4x$.

b) La cuarta parte de los asistentes a una asamblea pioneril.

   En este caso la palabra clave es *cuarta parte,* que significa que la cantidad se divide en cuatro partes iguales y se toma una parte, es decir, un cuarto de la cantidad. Si la

[33] Tomado de *Cubadebate,* 13 de junio de 2013.

variable $a$ es la cantidad de asistentes a la asamblea pioneril, la traducción al lenguaje algebraico es $\frac{1}{4}a$ o $\frac{a}{4}$.

c) La cantidad de estudiantes de un grupo aumentado en 25.

Aquí la palabra clave es *aumentado en,* que tiene un significado matemático, pues significa que se amplía, añade, adiciona una cantidad determinada. Si designas a la variable $y$ la cantidad de estudiantes del grupo, entonces en el leguaje algebraico esta situación se escribe $y + 25$.

d) El 50 % de la potencia eólica instalada en el mundo.

Para poder realizar la traducción al lenguaje algebraico hay que tener en cuenta qué significa el 50 %, que como sabes es la mitad de la cantidad. Si asignas a la variable $e$ la cantidad de potencia eólica instalada en el mundo, entonces escribes $\frac{1}{2}e$ o $\frac{e}{2}$.

e) **R ¡!** Disminuir la mortalidad infantil en dos tercios.

En esta situación aparece la palabra clave *disminuir* que significa reducir o sustraer en una cantidad determinada, que en este caso es *dos tercios,* que como conoces quiere decir que la cantidad se dividió en tres partes iguales y se toman dos partes, es decir, dos tercios de la cantidad. Si la variable $m$ significa el índice de mortalidad infantil, entonces esta situación se representa en el lenguaje algebraico por $m - \frac{2}{3}m$.

Otros ejemplos de traducción del lenguaje común al algebraico se muestran en la tabla 3.1.

Tabla 3.1

| Lenguaje común | Lenguaje algebraico |
|---|---|
| El duplo de un número | $x$: un número<br>$2x$ |
| Un número disminuido en dos | $x$: un número<br>$x - 2$ |
| La mitad de un número | $x$: un número<br>$\frac{x}{2}$ o $\frac{1}{2}x$ |
| El triplo de un número | $y$: un número<br>$3y$ |
| La tercera parte de un número | $y$: un número<br>$\frac{y}{3}$ o $\frac{1}{3}y$ |

| | |
|---|---|
| El cuadrado de un número | *p:* un número<br>$p^2$ |
| El 75 % de un número | *m:* un número<br>$\frac{75}{100}m$ o $\frac{3}{4}m$ |
| La cantidad de hembras excede en 10 a la cantidad de varones | *x:* cantidad de hembras<br>*y:* cantidad de varones<br>$x - 10 = y$ |

*Ejemplo 2:*

Traduce al lenguaje común:

a) $x + 5$

Ya sabes que la traducción del lenguaje algebraico al común depende del significado que se le asigne a la variable. Si la variable $x$ es un número, entonces en el lenguaje común expresas: un número aumentado en cinco.

b) $2(a + b)$

- El perímetro de un rectángulo, si las variables $a$ y $b$ son las longitudes de los lados del rectángulo.
- El duplo de la suma de las edades de dos hermanos, si la variable $a$ es la edad de un hermano y la variable $b$ la edad del otro.

c) $\frac{w}{10}+5$

- El 10 % de un número aumentado en cinco, si la variable $w$ es un número.
- La décima parte de los árboles sembrados aumentada en cinco son frutales, si la variable $w$ significa la cantidad de árboles sembrados.

d) $3e$

- Tres veces el consumo de electricidad en el mes de febrero, si la variable $e$ representa el consumo de electricidad en el mes de febrero.
- El triplo de la cantidad de latas de mermelada de guayaba producidas por una fábrica de conservas en un mes, si la variable $e$ representa la cantidad de latas de mermelada de guayaba producidas por una fábrica de conservas en un mes.

## *Ejercicios*

1. Representa, utilizando variables, las situaciones siguientes:

   a) El cuádruplo de un número.
   b) Dos veces un número.
   c) Las tres quintas partes de un número.
   d) El antecesor de un número natural.
   e) Un número impar.
   f) El 25 % de un número.
   g) Dos números naturales consecutivos.
   h) Los múltiplos enteros de 8.
   i) Un número excede en 10 a otro número.
   j) El triplo de un número aumentado en el 40 % de otro.

2. Escribe en el lenguaje algebraico las siguientes situaciones prácticas señalando en cada caso el significado de la variable.

   a) La cantidad de piezas producidas por una fábrica.
   b) Reducir a la mitad la pobreza extrema y el hambre.
   c) La quinta parte del área de un terreno se dedica al cultivo de cebollas.
   d) La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo isósceles.
   e) El perímetro de un paralelogramo.
   f) La Empresa Provincial de Construcción y Mantenimiento (EPCOMA) de Guantánamo cerró el 2012 con una ganancia un 6 % superior a lo que había planificado.[34]
   g) El área de un triángulo rectángulo.
   h) El 80 % de los gastos de una empresa.
   i) Los índices de desocupación han crecido en Portugal en cinco años en un 10 %.[35]
   j) El incremento de la promoción de una escuela en un 20 %.
   k) El 90 % de los fumadores empiezan a fumar antes de los 19 años.[36]
   l) Las dos terceras partes de los estudiantes de una escuela secundaria saben jugar ajedrez.
   m) Al 60 % de los estudiantes de un grupo les gusta la asignatura Matemática.
   n) En el período de 1970-2012 la tasa de natalidad en Cuba disminuyó un 13 %, así como también se redujo en un 6 % la tasa de crecimiento poblacional.[37]

3. En cada uno de los siguientes incisos selecciona, marcando con una X, la expresión algebraica correcta que refleja la situación planteada:

[34] Órgano de prensa *Trabajadores,* 25 de marzo de 2013.

[35] Ibídem, 20 de mayo de 2013.

[36] Ibídem, 27 de mayo de 2013.

[37] Órgano de prensa *Granma,* 21 de junio de 2013.

3.1. Si $y$ es la longitud en centímetro de un segmento $\overline{MN}$, ¿cómo puedes representar la longitud de otro segmento que excede en 3 cm a la mitad de la longitud del segmento $\overline{MN}$?

a) ___ $2y + 3$  b) ___ $\frac{y}{2}+3$  c) ___ $2y - 3$  d) ___ $\frac{y}{2}-3$

3.2. Si $p$ es el perímetro en metro de un terreno rectangular, ¿cómo puedes representar el perímetro de otro terreno que es mayor en 2,5 m a la tercera parte del perímetro del terreno rectangular?

a) ___ $3p + 2{,}5$  b) ___ $3p - 2{,}5$  c) ___ $\frac{p}{3}-2{,}5$  d) ___ $\frac{p}{3}+2{,}5$

3.3. Si $x$ es la cantidad de lápices que tiene Daniel, ¿cómo puedes representar la cantidad de lápices que tiene Laura, si sabes que tiene cuatro lápices menos que el triplo de los que tiene Daniel?

a) ___ $x - 4$  b) ___ $3x + 4$  c) ___ $3x - 4$  d) ___ $4x - 3$

3.4. Tres paquetes de caramelos pesan 9 lb, el paquete ($y$) pesa el doble de lo que pesa el $x$ disminuido en media libra, y el paquete $z$ pesa 1,5 lb más de lo que pesa el $x$. Si asumes que $x, y, z$ son los pesos respectivos de los paquetes. La afirmación correcta es:

a) ___ $x = y = z$  b) ___ $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$  c) ___ $z=x+\frac{1}{5}$  d) ___ $y = 2x - 0{,}5$

3.5. La edad de Josefina es $x$ años, la edad de Pedro excede en 0,5 años al triplo de la edad de Josefina. La edad de Pedro puede expresarse:

a) ___ $3x + 0{,}5$  b) ___ $3x - 0{,}5$  c) ___ $x - 0{,}5$  d) ___ $x + 0{,}5$

3.6. Carlos necesita representar utilizando el lenguaje algebraico el quíntuplo de la cuarta parte de un número aumentada en 1. Si $n$ representa el número, ¿cuál de las expresiones siguientes debe utilizar?

a) ___ $\frac{5}{4}x+1$  b) ___ $5\left(\frac{x}{4}+1\right)$

c) ___ $5\left(\frac{x+1}{4}\right)$

d) ___ Ninguna de las anteriores

3.7. La expresión algebraica $\frac{3}{4}n-2n+5$, significa:

a) ___ El 75 % de un número $n$, disminuido en su duplo.
b) ___ El 75 % de un número $n$, disminuido en su mitad y aumentado en 5.
c) ___ El 75 % de un número $n$, disminuido en su duplo más 5.
d) ___ Las tres cuartas partes de un número $n$, disminuidas en su duplo.

3.8. La tercera parte de un número es 36. Esta afirmación puede expresarse como:

a) ___ $x = 36$ b) ___ $\frac{36}{3} = x$ c) ___ $\frac{1}{3}x = 36$ d) ___ $3x = 36$

3.9. El sucesor del cuádruplo de un número natural puede expresarse como:

a) ___ $4x - 1$ b) ___ $\frac{1}{4}x + 1$ c) ___ $4x + 1$ d) ___ $\frac{1}{4}x - 1$

4. Completa la tabla 3.2

Tabla 3.2

| **Situación matemática** | **Significado de la variable *m*** | **Expresión algebraica en función de la variable *m*** | **Valor numérico de la expresión para *m* = 5** |
|---|---|---|---|
| Área de un cuadrado | *m:* longitud del lado del cuadrado | $m^2$ | |
| El perímetro de un triángulo equilátero | | | |
| | | $\frac{3}{5}m$ | |
| El producto de un número natural y su sucesor | | | |
| | | $\frac{1}{2}m + 3$ | |

## 3.1.1 Término, valor numérico, monomio, polinomio y expresión algebraica

**¡!** Por el Día del amor y la amistad el grupo de octavo grado en el que estudia Susana, se propuso ubicar en el aula un buzón para que los estudiantes depositaran sus mensajes de felicitación a la persona deseada. Susana trajo de su casa una caja para forrarla con elementos alegóricos a la fecha y para ello necesitó conocer la cantidad de papel que tendría que utilizar.

Ya conoces del capítulo anterior que para eso Susana tiene que hallar el área total de la caja, que es un ortoedro (fig. 3.1) luego, necesita calcular el área de la base y el área lateral, es decir:

$A_T = 2A_B + A_L$
$A_T = 2ab + 2ah + 2bh$

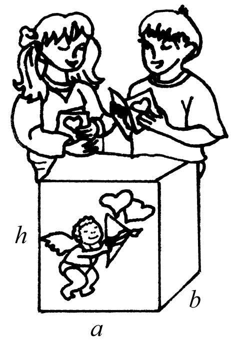


Figura 3.1

Fíjate que se expresó el área total del ortoedro utilizando las variables como la suma de tres monomios.

De séptimo grado ya tú conoces los términos, monomio, polinomio y expresiones algebraicas y realizaste operaciones con estos.

Ya sabes que los monomios tienen un coeficiente y una parte literal. Por ejemplo, en el monomio $2ab$, el coeficiente es 2 y la parte literal es $ab$, observa que las variables que aparecen en la parte literal tienen el mismo exponente, mientras que en el monomio $-3{,}75m^2n$ las variables que aparecen en la parte literal tienen diferente exponente, $m$ tiene exponente dos y $n$ exponente uno y la suma de estos exponentes es tres. En el monomio $2ab$ la suma de los exponentes de las variables es dos.

| |
|---|
| A la suma de los exponentes de las variables que aparecen en la parte literal de un monomio se le denomina grado del monomio. |

Entonces el monomio $-3{,}75m^2n$ tiene grado tres o es de tercer grado y el monomio $2ab$ es de grado dos o de segundo grado.

El monomio $-4$ no tiene parte literal, en este caso su grado es cero, pues la parte literal se considera que está elevada al exponente cero, recuerda que $x^0 = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$.

Cuando los monomios tienen más de una variable puede determinarse su grado con respecto a una variable, por ejemplo, para el monomio $\frac{2p^4r^3}{3}$ su grado es cuatro con respecto a la variable $p$ y tres con respecto a la variable $r$.

*Ejemplo 1:*

Determina el grado de los monomios siguientes.

a) $-5{,}8\,t$

Como la parte literal solo está conformada por la variable $t$ que está elevada al exponente uno, entonces el monomio es de grado uno o de primer grado.

b) $4\frac{2}{3}m^2$

El grado del monomio es dos o de segundo grado.

c) $xy^2z$

En este monomio como la parte literal tiene tres variables adicionamos sus exponentes. Luego, el monomio $xy^2z$ es de grado cuatro o de cuarto grado.

d) 17

El monomio 17 es de grado cero.

| |
|---|
| En general todos los números reales son monomios de grado cero. |

De séptimo grado conoces que la suma algebraica de varios monomios que no son semejantes es un polinomio.

| |
|---|
| El grado de un polinomio es el mayor grado de los monomios que lo componen**.** |

*Ejemplo 2:*

Determina el grado de los polinomios siguientes:

a) $5x + 2$

El primer término es un monomio de grado uno y el segundo término es un monomio de grado cero, luego, el término de mayor grado es $5x$, por lo tanto, el polinomio es de grado uno o de primer grado.

b) $2m^2 + m - 5$

En este caso el grado del primer término es dos, el del segundo es uno y el del tercero cero, entonces el grado del polinomio es dos o es un polinomio de segundo grado.

c) $6p - 3 + 11p^5 - p^3$

Aquí el monomio de mayor grado es el tercer término, luego el grado del polinomio es cinco o es un polinomio de quinto grado.

d) $7xy - x^2y^2 + 1 + 8xy^2 - 3x$

Observa que en este caso los monomios que conforman el polinomio tienen más de una variable, luego para determinar el grado de cada uno de ellos hay que adicionar los exponentes de las variables.

Grado de $7xy$: 2
Grado de $-x^2y^2$: 4
Grado de 1: 0
Grado de $8xy^2$: 3
Grado de $-3x$: 1

Luego, el polinomio es de cuarto grado.

*El álgebra simbólica es la fase moderna del desarrollo del álgebra que se inicia con los trabajos del matemático francés François Viéte (1540-1603) (fig. 3.2) al ser el primero en utilizar las letras para las incógnitas y desarrollar una notación que combinaba símbolos con abreviaturas y letras, llevando el álgebra a su fase simbólica tal y como hoy se emplea.*

Figura 3.2

En séptimo grado determinaste el valor numérico de una expresión algebraica para determinados valores de la variable.

*Ejemplo 3:*

Calcula el valor numérico de las expresiones algebraicas siguientes, para los valores de la variable que se indican.

a) $5mn^2$ para $m = 5$, $n = -1$

Recuerda que se sustituyen las variables por el valor asignado y se efectúan las operaciones indicadas.

$5mn^2$
$= 5 \cdot 5(-1)^2$
$= 25$

b) $\frac{3}{5}a - 5a$ para $a = -5$

$\frac{3}{5}a - 5a$

$= \frac{3}{5}(-5) - 5(-5)$ sustituyendo las variables por el valor asignado

$= -3 + 25$ efectuando las operaciones indicadas

$= 22$

c) $2xy^2 + x^2y - 11$ para $x = 2$, $y = -3$

$2xy^2 + x^2y - 11$

$= 2 \cdot 2(-3)^2 + 2^2(-3) - 11$ sustituyendo las variables por el valor asignado

$= 36 - 12 - 11$ efectuando las operaciones indicadas

$= 13$

d) $\frac{p}{3q} - \frac{r}{s}$ para $p = 4$, $q = -1$, $r = \frac{2}{3}$, $s = -2$

$\frac{p}{3q} - \frac{r}{s}$

$= \frac{4}{3(-1)} - \frac{\frac{2}{3}}{-2}$ sustituyendo las variables por el valor asignado

$= -\frac{4}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$ efectuando las operaciones indicadas

$= -\frac{4}{3} + \frac{1}{3}$

$= -1$

## *Ejercicios*

1. Determina el valor numérico de las expresiones algebraicas siguientes para los valores de las variables que se indican.

   a) $3{,}5xy$ para $x = 3$, $y = -1$

   b) $-2x + 3$ para $x = 8$

   c) $0{,}4a + \frac{1}{2}$ para $a = -\frac{1}{4}$

   d) $5a + b - 1$ para $a = -4$, $b = 2$

   e) $-2{,}5\,c^2 + 4b - 0{,}5$ para $c = 2$, $b = 2\frac{1}{4}$

   f) $3(x + 5) - x$ para $x = 2{,}7$

   g) $6s^3t^2 - 3ts^2 + s$ para $s = -1$, $t = 2$

   h) $5pq + r - 2$ para $p = \frac{2}{5}$, $q = -3$, $r = 1$

   i) $2m - n^2$ para m $= m = \frac{1}{4}$, $n = -2$

   j) $\frac{z^2 - 8z}{2}$ para $z = -4$

   k) $36a^2b^2 - \frac{1}{2}a^{-1}b$ para $a = \frac{1}{2}$, $b = -3$

2. Completa la tabla 3.3 calculando el valor numérico de las expresiones algebraicas para los valores dados.

Tabla 3.3

| **Expresión algebraica** | $m = 2$ | $m = -1$ | $m = \frac{1}{4}$ | $m = 1{,}5$ |
|---|---|---|---|---|
| $-3m$ | | | | |
| $2m - 7$ | | | | |
| $4m^2 - 1$ | | | | |
| $m^2 + 3m + 2$ | | | | |

3. Marca en cada uno de los incisos siguientes, con una X, la respuesta correcta.

a) El valor numérico del polinomio $4x + 5y^2z$ para $x = 4$, $y = -1$, $z = 2$ es:

___ 6 ___ 76 ___ 26 ___ 36

b) Si $m = 7$ y $n = -7$ , entonces el valor numérico de $\dfrac{m}{m-n}$ es:

___ 0 ___ 2 ___ $\dfrac{1}{2}$ ___ No se puede calcular

c) Para $p = -1$, $q = 2$ el valor numérico de $\dfrac{q-2}{pq}$ es:

___ 1 ___ 0 ___ $\dfrac{3}{2}$ ___ $-\dfrac{3}{2}$

d) Cuando $y = -\dfrac{1}{2}$ el valor numérico de $-6\,(y^2 - y)$ es:

___ $\dfrac{3}{2}$ ___ $\dfrac{9}{2}$ ___ $-\dfrac{3}{2}$ ___ $-\dfrac{9}{2}$

4. Determina el conjunto numérico más restringido al que pertenece el valor numérico de las expresiones algebraicas siguientes para los valores dados de las variables.

   a) $5mn^2 - 10$ para $m = -2{,}5$ y $n = 0{,}5$

   b) $\left(\dfrac{xy}{8}\right)^2 + 7{,}8$ para $x = 3$, $y = -4$

   c) $3(ab - 1) + a^2b - 0{,}136$ para $a = 1{,}2$; $b = 3{,}4$

   d) $8rs + t - 5$ para $r = \dfrac{1}{4}, s = \dfrac{1}{3}, t = -\dfrac{2}{3}$

5. ¿Qué valor numérico toma $8mn + 4m^2 + 4n^2$ si $m = 0{,}75$ y $n = -0{,}25$?

6. Comprueba que el valor numérico del polinomio $9x^2 + 6xy + y^2$ para $x = -\dfrac{1}{3}, y = -5$ es un múltiplo de cuatro.

7. Determina el grado de los monomios siguientes:

   a) $-5x^2$ b) $\dfrac{3}{5}a$ c) $8xy$ d) 2,7

   e) $2m^2n$ f) $a^3b^2c^4$ g) $11pq^3r^2$ h) $-2\dfrac{4}{7}w^3r^5$

8. Señala cuál es el monomio de mayor grado. Fundamenta tu respuesta.

a) ___ $7b^8$  b) ___ $-3{,}2x^2y^2z^3$  c) ___ $\frac{5}{11}m^2n^4$  d) ___ $4a^2b^4c^3$

9. Determina el grado de los polinomios siguientes:

a) $5p-1$  b) $p^2+3p-1$  c) $5m^2-7m+8$  d) $2{,}8a^3+1{,}5a+3$
e) $4x^2+4xy+y^2$  f) $-r^2t^2+6rt^2+9t^2$  g) $m^2n^2ñ^3-8mnñ^2+16ñ$

10. Escribe un polinomio y argumenta tu respuesta:

a) De primer grado  b) De segundo grado  c) De tercer grado

## 3.2 Operaciones con monomios y polinomios

**¡!** La profesora de Susana orientó a sus estudiantes que demostraran que al dividir el área lateral de un prisma recto de base rectangular por el perímetro de su base, se obtiene la longitud de la altura.

Para buscar la idea de la solución, Susana realizó un esbozo de la situación dada en el ejercicio (fig. 3.3) y al realizar la traducción del lenguaje común al algebraico comprendió que tenía que demostrar que $\frac{A_L}{2a+2b}=h.$

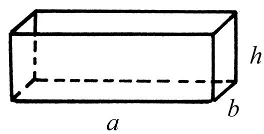


Figura 3.3

Ella recordó la ecuación que expresa la relación entre el área lateral y las áreas de las caras del prisma de base rectangular y, por lo tanto, que tenía que demostrar que $\frac{2ah+2bh}{2a+2b}=h.$

Susana para dar solución a la tarea tiene que efectuar la división de dos polinomios, pero en séptimo grado ella solo realizó divisiones de polinomios por un monomio, por lo que necesita aprender otras operaciones con polinomios. ¿Cuáles serán estas operaciones?

### 3.2.1 Adición y sustracción de polinomios

En séptimo grado estudiaste algunas operaciones con polinomios.

*Ejemplo 1:*

Reduce términos semejantes.

a) $2{,}4c+5-1{,}2c$

Para resolver este inciso primeramente debes identificar cuáles son los términos que son semejantes, es decir, los términos que tienen la misma parte literal. En este caso los términos semejantes son $2{,}4c$ y $-1{,}2c$, pues tienen la misma parte literal, después calculas la suma algebraica de sus coeficientes y por último, escribes el resultado.

$2{,}4c + 5 - 1{,}2c$
$= 1{,}2c + 5$

b) $5y - 4z + 0{,}7z - 8y + y$
$5y - 4z + 0{,}7z - 8y + y$ Aquí los términos semejantes son: $-4z$; $0{,}7z$
$= -2y - 3{,}3z$ $5y$; $-8y$; $y$

c) $4m^2n^3 + m^3n^3 - 4m^2n^3 + 3\frac{1}{2}n^3m^3$

$$4m^2n^3 + m^3n^3 - 4m^2n^3 + 3\frac{1}{2}n^3m^3$$

$$= 4\frac{1}{2}m^3n^3$$

d) $-5{,}3a + 3b - 7c + 2{,}5a + 1{,}7c - 8b + abc$
$-5{,}3a + 3b - 7c + 2{,}5a + 1{,}7c - 8b + abc$
$= -2{,}71a - 5b - 5{,}3c + abc$

*Ejemplo 2:*

Calcula el resultado de las operaciones siguientes:

a) $(3m + n) + (m - 2n)$
$= 3m + n + m - 2n$ Nota que $3m$ y $m$ son términos semejantes, al igual que son semejantes $n$ y $-2n$.
$= 4m - n$ reduciendo términos semejantes

b) $(2ab + c - 1) + (ab + 3c + 5)$
$= 2ab + c - 1 + ab + 3c + 5$
$= 3ab + 4c + 4$ reduciendo términos semejantes

c) $(5y^2 + 2y - 3) + (5y + 3)$
$= 5y^2 + 2y - 3 + 5y + 3$
$= 5y^2 + 7y$

d) $(zt - 3t) + (2zt + t - z) + (3zt + 5t + 2z - 3)$

Para facilitar el cálculo de la suma de polinomios puedes colocar los sumandos en columna, teniendo cuidado de ubicar en la misma columna los términos que son semejantes.

$$\begin{array}{l} zt - 3t \\ 2zt + t - z \\ 3zt + 5t + 2z - 3 \\ \hline 6zt + 3t + z - 3 \end{array}$$

Para adicionar dos polinomios se reducen los términos semejantes en el caso de que existan.

La adición de polinomios es asociativa y conmutativa, es decir, los paréntesis en la adición de tres polinomios se pueden colocar indistintamente y el orden en que se tomen los sumandos no altera el resultado, es decir, para $A$, $B$ y $C$ polinomios se cumple que $(A + B) + C = A + (B + C)$ y $A + B = B + A$.

*Ejemplo 3:*

Calcula:

a) $(2m + 3n) - (m + n)$

En este caso hay que efectuar la sustracción de dos polinomios. Para ello se procede de manera análoga a la sustracción de números racionales, es decir, al minuendo se le adiciona el sustraendo cambiándole el signo a cada uno de sus términos.

$(2m + 3n) - (m + n)$
$= 2m + 3n - m - n$ cambio del signo de los términos del sustraendo
$= m + 2n$ reduciendo términos semejantes

b) $(5x + 3) - (x - 6)$
$= 5x + 3 - x - (-6)$ cambio del signo de los términos del sustraendo
$= 4x + 9$ reduciendo términos semejantes

c) $(3x^3y^2 + 5x^2y - 2x) - (x^3y^2 + 2x^2y - x)$
$= 3x^3y^2 + 5x^2y - 2x - x^3y^2 - 2x^2y - (-x)$
$= 2x^3y^2 + 3x^2y - 2x + x$
$= 2x^3y^2 + 3x^2y - x$

Nota que lo que haces es cambiar el signo de los términos del sustraendo y después reducir términos semejantes.

d) $(abc - 3ab + bc - 8) - (-4abc + 2ab - 3bc + 3)$
$= abc - 3ab + bc - 8 + 4abc - 2ab + 3bc - 3$ cambio de signo de los términos del sustraendo
$= 5abc - 5ab + 4bc - 11$ reduciendo términos semejantes

Fíjate que al igual que ocurre con la sustracción de los números racionales, la sustracción de dos polinomios es una adición en la que al minuendo se le adiciona el opuesto del sustraendo.

Para sustraer dos polinomios se le cambia el signo a cada uno de los términos del polinomio del sustraendo y se reducen los términos semejantes.

*Ejemplo 4:*

Sean los polinomios $A = 3p^3q^2 - 7p^2q + 9p - 10$ y $B = p^3q^2 + 5p^2q - 2p - 7$.

Calcula:

a) $A - B$ b) $B - A$

*Solución:*

a) $A - B$

$= (3p^3q^2 - 7p^2q + 9p - 10) - (p^3q^2 + 5p^2q - 2p - 7)$ sustituyendo

$= 3p^3q^2 - 7p^2q + 9p - 10 - p^3q^2 - 5p^2q + 2p + 7$

$= 2p^3q^2 - 12p^2q + 11p - 3$ reduciendo términos semejantes

b) $B - A$

$= (p^3q^2 + 5p^2q - 2p - 7) - (3p^3q^2 - 7p^2q + 9p - 10)$ sustituyendo

$= p^3q^2 + 5p^2q - 2p - 7 - 3p^3q^2 + 7p^2q - 9p + 10$

$= -2p^3q^2 + 12p^2q - 11p + 3$ reduciendo términos semejantes

Observa que $A - B \neq B - A$, luego la sustracción de polinomios no es conmutativa.

Seguro notaste que para identificar los sumandos en la adición y el minuendo y el sustraendo en la sustracción, se utilizaron los paréntesis, que como conoces son signos de agrupación. En la adición al efectuar la operación cada uno de los términos de los sumandos conserva su signo, mientras que en la sustracción cada uno de los términos del sustraendo cambia el signo:

| | |
|---|---|
| $(3x + 5a) + (x - a)$ | $(3x + 5a) - (x - a)$ |
| $= 3x + 5a + x - a$ | $= 3x + 5a - x + a$ |
| $= 4x + 4a$ | $= 2x + 6a$ |

Observa que en el caso de la sustracción el paréntesis del sustraendo está precedido del signo – y al efectuar la sustracción cambia el signo de todos los términos del sustraendo.

En la práctica en estos casos se dice que se están eliminando los paréntesis, para lo que debes siempre tener en cuenta:

> Los paréntesis precedidos de signo + se eliminan dejando cada término del polinomio con el mismo signo.
>
> Los paréntesis precedidos de signo – se eliminan cambiando el signo de cada término del polinomio.

Por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
&8x^2-(7xy-x^2+3y^2)+(xy-2y^2)\\
&=8x^2\underbrace{-7xy+x^2-3y^2}_{\text{Cambia el signo de cada término}}+\underbrace{xy-2y^2}_{\text{No hay cambio de signo}}
\end{aligned}
$$

*El uso de los paréntesis en Matemática fue introducido por primera vez por el francés Albert Girard (1595-1632) en su libro* Invention Nouvelle en Algebre *(fig. 3.4), donde también enuncia el teorema fundamental del álgebra, y usa la raya colocada entre el numerador y el denominador.*

*Los paréntesis se utilizan en Matemática, entre otras cosas, para el cálculo numérico y con variables donde es importante el orden operacional. También se utilizan otros signos de agrupación como el corchete y la llave.*

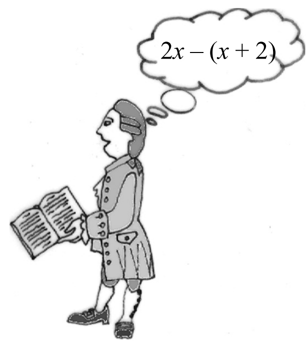



Figura 3.4

*Ejemplo 5:*

Elimina los paréntesis y reduce términos semejantes.

a) $x^2y+(3x^2y+xy^2)$
$= x^2y+3x^2y+xy^2$ como el paréntesis está precedido del signo + no hay cambio de signo en los términos que están dentro del paréntesis
$= 4x^2y+xy^2$ reduciendo términos semejantes

b) $2rt-(5+rt)$
$= 2rt-5-rt$ como el paréntesis está precedido del signo – hay cambio de signo en los términos que están dentro del paréntesis
$= rt-5$ reduciendo términos semejantes

c) $(7b-2)-(3b-5)$
$= 7b-2-3b+5$ el primer paréntesis como no tiene ningún signo está precedido del signo + y el segundo paréntesis está precedido por el signo –, por eso hay cambio de signo en todos los términos
$= 4b+3$ reduciendo términos semejantes

d) $3ab+(7-4ab)-5ab-(2ab+3)$
$= 3ab+7-4ab-5ab-2ab-3$ eliminando paréntesis
$= -8ab+4$ reduciendo términos semejantes

En ocasiones facilita la realización de operaciones con polinomios si se agrupan sus términos convenientemente, para eso se utilizan los paréntesis, que pueden estar precedidos de signo + o de signo –. En este caso se dice que se introducen paréntesis, que es el proceso inverso de la eliminación de paréntesis.

Por ejemplo,

Eliminación de paréntesis

$$8x^2-(7xy-x^2+3y^2)+(xy-2y^2)$$
$$=8x^2-\underbrace{7xy+x^2-3y^2}_{\text{Cambia el signo de cada término}}+\underbrace{xy-2y^2}_{\text{No hay cambio de signo}}$$

Introducción de paréntesis

$$8x^2-7xy+x^2-3y^2+xy-2y^2$$
$$=8x^2-\underbrace{(7xy-x^2+3y^2)}_{\text{Cambia el signo de cada término}}+\underbrace{(xy-2y^2)}_{\text{No hay cambio de signo}}$$

> Si se introduce un paréntesis que estará precedido por el signo +, los términos que se colocan dentro del paréntesis mantienen su signo.
>
> Si se introduce un paréntesis que estará precedido por el signo –, los términos que se colocan dentro del paréntesis cambian su signo.

*Ejemplo 6:*

En el polinomio $3x^3 + 5x^2 - x + 2$:

a) Introduce en un paréntesis, que esté precedido por el signo +, al segundo y tercer término del polinomio.

$3x^3 + 5x^2 - x + 2$
$= 3x^3 + (5x^2 - x) + 2$ introducción de paréntesis

Como el paréntesis está precedido del signo + no se cambian los signos de los términos que se colocan dentro del paréntesis.

b) Introduce en un paréntesis, que esté precedido por el signo –, al tercero y cuarto términos del polinomio.

$3x^3 + 5x^2 - x + 2$
$= 3x^3 + 5x^2 - (x - 2)$ introducción de paréntesis

Como el paréntesis está precedido del signo – se cambian los signos de los términos que se colocan dentro del paréntesis.

También hay expresiones algebraicas en las que, además de los paréntesis, aparecen otros signos de agrupación como son los corchetes [ ] y las llaves { }, incluidos unos dentro de otros, como, por ejemplo, la expresión $5x + [2x - (x - 1)]$. En este caso suele decirse que esta expresión algebraica tiene paréntesis superpuestos.

*Ejemplo 7:*

Elimina los signos de agrupación y simplifica.

a) $m - [2n + (5n + m)]$
$m - [2n + (5n + m)]$

$= m - [2n + 5n + m]$ eliminando paréntesis
$= m - [7n + m]$ reduciendo términos semejantes
$= m - 7n - m$ eliminando corchetes
$= -7n$ reduciendo términos semejantes

b) $3xy + [5 - (2xy + 3)]$
$3xy + [5 - (2xy + 3)]$
$= 3xy + [5 - 2xy - 3]$ eliminando paréntesis
$= 3xy + [2 - 2xy]$ reduciendo términos semejantes
$= 3xy + 2 - 2xy$ eliminando corchetes
$= xy + 2$ reduciendo términos semejantes

c) $5p + [2p - (p - 1)]$
$5p + [2p - (p - 1)]$
$= 5p + [2p - p + 1]$ eliminando paréntesis
$= 5p + [p + 1]$ reduciendo términos semejantes
$= 5p + p + 1$ eliminando corchetes
$= 6p + 1$ reduciendo términos semejantes

d) $7 - [2a - (3b - 5)] + 8a$
$= 7 - [2a - 3b + 5] + 8a$ eliminando paréntesis
$= 7 - 2a + 3b - 5 + 8a$ eliminando corchetes
$= 2 + 6a + 3b$ reduciendo términos semejantes

e) $5q + \{3p - [2q - (q + p)] - 11\}$
$= 5\mathrm{q} + \{3p - [2q - q - p] -11\}$ eliminando paréntesis
$= 5q + \{3p - [q - p] - 11\}$ reduciendo términos semejantes
$= 5q + \{3p - q + p - 11\}$ eliminando corchetes
$= 5q + \{4p - q - 11\}$ reduciendo términos semejantes
$= 5q + 4p - q - 11$ eliminando llaves
$= 4q + 4p - 11$ reduciendo términos semejantes

Nota que se eliminaron los signos de agrupación superpuestos sucesivamente de adentro hacia afuera. Igualmente puedes realizar la eliminación de los signos superpuestos de afuera hacia dentro, siempre fijándote en el signo que precede al signo de agrupación que vas a eliminar. También es conveniente que reduzcas los términos semejantes que aparecen dentro del signo de agrupación antes de eliminarlo, porque reduce el número de términos que hay que extraer y facilita el trabajo.

*Ejemplo 8:*

Elimina los signos de agrupación en la expresión algebraica:

$7uv^2 - [5 - (2uv^2 - 3u) - 7u]$.

Calcula el valor numérico de la expresión obtenida para $v = 0{,}5$ y $u = -2$.

$7uv^2 - [5 - (2uv^2 - 3u) - 7u]$

| | |
|---|---|
| $= 7uv^2 - [5 - 2uv^2 + 3u - 7u]$ | eliminando paréntesis |
| $= 7uv^2 - [5 - 2uv^2 - 4u]$ | reduciendo términos semejantes |
| $= 7uv^2 - 5 + 2uv^2 + 4u$ | eliminando corchetes |
| $= 9uv^2 - 5 + 4u$ | reduciendo términos semejantes |

Para hallar el valor numérico:

$9uv^2 - 5 + 4u$

| | |
|---|---|
| $= 9(-2)(0{,}5)^2 - 5 + 4(-2)$ | sustituyendo las variables por los valores dados |
| $= -18 \cdot 0{,}25 - 5 - 8$ | calculando las operaciones indicadas, respetando el orden operacional |
| $= -4{,}5 - 5 - 8$ | |
| $= -17{,}5$ | |

*Ejemplo 9:*

Sean $H = 11m^3n^2p + 7n^2p - 3$ y $K = 5m^3n^2p - 13$. Calcula $H - K$.

$H - K$

| | |
|---|---|
| $= (11m^3n^2p + 7n^2p - 3) - (5m^3n^2p - 13)$ | sustituyendo $H$ y $K$ por las expresiones dadas |
| $= 11m^3n^2p + 7n^2p - 3 - 5m^3n^2p + 13$ | eliminando paréntesis |
| $= 6m^3n^2p + 7n^2p + 10$ | reduciendo términos semejantes |

Observa que fue necesario introducir paréntesis para diferenciar el minuendo del sustraendo en esta sustracción.

## *Ejercicios*

1. Reduce términos semejantes en las expresiones algebraicas siguientes:

   a) $7p - 3p + 5p$  b) $\frac{2}{3}d - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}d - \frac{2}{3} + 3d$  c) $4jk + 8 + 2jk - 6 - 7jk$
   d) $q^3 + 2q^2 - 2q^3 + 7q - 5q^2 + 1$  e) $2w^2 - 6wv + wv - v^2$
   f) $a^2b - ab + a^2b + 3ab - 6ab^2$  g) $12x^3y^2 - 4x^2y + x^3y^3 - 3x^3$
   h) $5{,}6\ e^2g^2h + 0{,}3eg^2h + 1{,}2e^2g^2h - 7{,}8eg^2h$
   i) $-st + 8s^2t - 5st + 3st^2 + 2st - 10st$
   j) $\frac{2}{5}a^3bc^2 - 5 + 3a^3b^2c - \frac{1}{5}a^3bc^2 + 2a^3b^2c + 10 - a^3b^3c^3$

2. Elimina los signos de agrupación.

   a) $2st + [3st - (2 + 8st)]$  b) $3z - [4 + (7z - 3)]$
   c) $-5q - [2q + 8 - (p - 3)]$  d) $8x - [4xy - (x^2 - xy) + 2x^2]$
   e) $3mn^2 - \{mn + [mn^2 - (mn + 5) + 8mn^2]\}$

f) $7p^2q - \{2pq^3 + [3p^2q - (8p^2q + 5pq^3 - 5)] - p^2q\}$
g) $14 + \{[9{,}5z^2 - 8{,}3 - (5{,}75z^2 - 10)] - 7{,}25z^2 - (3 - z^2)\}$
h) $5{,}4a^2 - [-2ab - 3{,}8a(a - b) + 1{,}2a^2]$
i) $5p + 3[(p + 2) - (p - 2) + (2p + 1)]$

3. Simplifica las expresiones algebraicas siguientes y calcula su valor numérico para los valores indicados de las variables:

a) $11{,}8g - [-2{,}3g + (5{,}5g - 7)]$ para $g = -1$.
b) $4hkj + [5 - (9hkj + 3)]$ para $h = 2$, $k = -2$, $j = 3$.

4. Comprueba que se cumplen las igualdades siguientes:

a) $w + [5w - (v - w) + 2v\,] = 7w + v$
b) $8 + 15zt - [5 + (2 - 3zt) + 18zt] = 1$

5. Si $A = 2a - 7b + 5$; $B = 1{,}3a - 3b + 1{,}5$; $C = 11a - 3{,}2b + 2$; $D = 1{,}4a + b - 7$; calcula:

a) $A + B$ b) $C - D$ c) $B + D$
d) $D - A - B$ e) $A + C - D$ f) $A - B + C$

6. Dados los polinomios: $H = -\frac{3}{4}x^3 + x^2 - 3x + 3$, $K = x - 7$, $J = 4x^4 + x^3 + x^2 - x - 3$.

Calcula:

a) $H + (K - J)$ b) $H - (K - J)$

7. Sean $M = 5pq^2$, $N = pq^2 - 2$, $Q = -3pq^2 + 5$.

a) Calcula $M - (N + Q)$.

b) Halla el valor numérico de $M - (N + Q)$ para $p = \frac{1}{5}$, $q = -5$.

8. En la figura 3.5, $ABCD$ cuadrado de perímetro igual a $x$ cm, $A$, $B$, $G$ puntos alineados, $BEFG$ rectángulo con $E$ punto medio de $\overline{BC}$ y $B$ punto medio de $\overline{AG}$.

a) Expresa en el lenguaje algebraico el perímetro de la figura $AGFECD$.
b) Si $x = 48{,}0$ cm halla el perímetro y el área de la figura $AGFECD$.

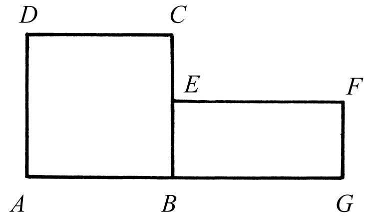



Figura 3.5

9. Sean $A = 2x^3 - 7x^2 + 2x - 1$ y $B = 4x^2 + 3$.

a) Halla un polinomio $C$ para que se cumpla que $A - C = B$.
b) ¿Qué grado tiene el polinomio resultante $C$?

10. Escribe dos polinomios $R$ y $S$ tales que:

   a) $R + S = x^2 - 2x + 1$
   b) $R + S = x^3$
   c) $R + S$ sea un polinomio de grado 1

11. Dados los polinomios $P = 2x^3 - 3x + 4$ y $Q = 5x - 7 + 2x^2$.

   a) Calcula $S = P - Q$.
   b) Indica el grado del polinomio resultante $S$.
   c) Halla el valor numérico de $S$ para $x = -3{,}5$

12. Sean $M = x^3 - 2x^2 + 7$ y $N = x^3 - 2x + 1$.

   a) Encuentra un polinomio $P$ tal que $P + M = N$.
   b) ¿Cuál es el grado de $P$?

## 3.2.2 Multiplicación y división de polinomios

Con las operaciones de adición y sustracción de polinomios que has estudiado en este grado todavía no se puede dar solución al problema planteado por la profesora de Susana, pues no es posible demostrar que $\frac{2ah + 2bh}{2a + 2b} = h$. Es necesario entonces continuar estudiando otras operaciones con polinomios.

**Multiplicación de polinomios**

En séptimo grado aprendiste a multiplicar monomios y polinomios por monomios.

*Ejemplo 1:*

Calcula:

a) $2(a + b)$
   $2(a + b)$
   $= 2a + 2b$ aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición

b) $5a(a + 2)$
   5a(a + 2)
   $= 5a^2 + 10a$ Aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición y efectuando la multiplicación de monomios

Análogamente a como se realiza la multiplicación de un polinomio por un monomio, multiplicaremos polinomios por polinomios.

*Ejemplo 2:*

Efectúa:

a) $(p + 2)(3 + 2p)$

$(p + 2)(3 + 2p)$ Fíjate que en este inciso debemos efectuar la multiplicación de dos binomios. Para ello aplicas la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición, como lo haces cuando multiplicas un monomio por un polinomio.

$= 3p + 2p^2 + 6 + 4p$ multiplicando el monomio $p$ por cada uno de los términos del binomio $3 + 2p$ y multiplicando el monomio 2 por cada uno de los términos del binomio $3 + 2p$

$= 7p + 2p^2 + 6$ reduciendo términos semejantes

$= 2p^2 + 7p + 6$ ordenando los términos por el exponente de la variable $p$ de forma descendente

b) $(4m – 7)(m + 2)$

$(4m – 7)(m + 2)$

$= 4m^2 + 8m – 7m – 14$ multiplicando el monomio $4m$ por cada uno de los términos del binomio $m + 2$ y multiplicando el monomio $–7$ por cada uno de los términos del binomio $m + 2$

$= 4m^2 + m – 14$ reduciendo términos semejantes

c) $(x – 2)^2$

$(x – 2)^2$

$= (x – 2)(x – 2)$ por definición de potencia

$= x^2 – 2x – 2x + 4$ multiplicando $x$ por cada uno de los términos del binomio $x – 2$ y multiplicando $–2$ por cada uno de los términos del binomio $x – 2$

$= x^2 – 4x + 4$ reduciendo términos semejantes

d) $(2q^2 + 3qt + t)\ (2q + 3)$

$(2q^2 + 3qt + t)\ (2q + 3)$

$= 2q^2 \cdot 2q + 2q^2 \cdot 3 + 3qt \cdot 2q + 3qt \cdot 3 + t \cdot 2q + t \cdot 3$ multiplicando cada término del polinomio por los términos del binomio

$= 4q^3+ 6q^2 + 6q^2t + 9qt + 2qt + 3t$ multiplicando los dos monomios

$= 4q^3 + 6q^2 + 6q^2t + 11qt + 3t$ reduciendo términos semejantes

e) $(x^2 + x^3)\ (x^2 – 5x + 1)$

$(x^2 + x^3)\ (x^2 – 5x + 1)$

$= x^2 \cdot x^2 + x^2\,(-5x) + x^2 + x^3 \cdot x^2 + x^3(-5x) + x^3$
$= x^4 - 5x^3 + x^2 + x^5 - 5x^4 + x^3$
$= x^5 - 4x^4 - 4x^3 + x^2$

f) $(w^2 + v^2 + wv)\,(w^2 - wv + v^2)$

Cuando los polinomios tienen muchos términos es más aconsejable al efectuar la multiplicación realizar la operación en columna. Colocas en cada fila los productos de los términos del primer polinomio por los términos del segundo polinomio de manera tal que en cada columna queden ubicados los términos que son semejantes.

$$\begin{array}{lllll}
w^2 + v^2 + wv & & & & \\
\underline{w^2 - wv + v^2} & & & & \\
w^4 + w^2v^2 & + w^3v & & & \\
\quad -w^2v^2 & - w^3v & - wv^3 & & \\
\quad\ w^2v^2 & & + wv^3 & + v^4 & \\
\hline
w^4 + w^2v^2 + & & & v^4 &
\end{array}$$

Luego, $(w^2 + v^2 + wv)\,(w^2 - wv + v^2) = w^4 + w^2v^2 + v^4$

g) $(x^2 - 9)(3x + 1)$

$$\begin{array}{llll}
x^2 - 9 & & & \\
\underline{3x + 1} & & & \\
3x^3 & & - 27x & \\
 & x^2 & & - 9 \\
\hline
3x^3 & + x^2 & - 27x & - 9
\end{array}$$

Por tanto, $(x^2 - 9)(3x + 1) = 3x^3 + x^2 - 27x - 9$

> Al multiplicar dos polinomios efectuamos la multiplicación de cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio.

La multiplicación de polinomios también es asociativa y conmutativa, es decir, para $A$, $B$ y $C$ polinomios se cumple que $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ y $A \cdot B = B \cdot A$.

Fíjate que como la multiplicación de polinomios es conmutativa lo mismo puedes multiplicar cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio que cada término del segundo por todos los términos del primer polinomio.

## *Ejercicios*

1. Efectúa:

a) $3hk^2 \cdot 5hk$ b) $2{,}8g^3 \cdot (-1{,}7g^4s^2)$ c) $5k\,(k + 2)$ d) $3v^5\,(x^2 - 9)$

e) $-2zp\ (z + zp)$ f) $8{,}3n(n^2 - 3n + 2)$ g) $3w(w^3 + 2w^2 - 4)$
h) $h^2k^2(h^2k + hk^2 - 3hk)$ i) $(h + 9)\ (5 + h)$ j) $(a - 7)\ (a + b)$
k) $(8m + 2n)\ (m + n)$ l) $(2q - r)\ (q^2r - 2r^3)$ m) $(xy + 3z)\ (xy + 3z)$
n) $(k + 5)\ (k^2 + k + 1)$ ñ) $(v - 1)\ (v^2 + 3v + 2)$ o) $(5m + 2)\ (m^2 - 2m + 4)$
p) $(3ab + 5)(a^2 + 2ab + b^2)$ q) $(2d^2c + 1)\ (c^2d^2 - 2cd + 5)$
r) $(1{,}4x^2 - 0{,}2)(5x^2 + 2x - 5)$ s) $(4p^2 + 3p - 2)(2p^3 - p + 2)$
t) $(2q^3 - q + 2p)\ (q - p)$ u) $(4z - 2t)(z^2 - t^2 - 3)$
v) $(3x + 4)(x - 2y + 1)$ w) $(2x^3 - x + 2)(4x^2 - 1)$

2. Completa la tabla 3.4.

Tabla 3.4

| ***A*** | ***B*** | ***C*** | ***A* – (*B* + *C*)** | **(*A* + *B*)*C*** | ***A* + *B* : *C*** | ***A* : *C* + *B*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 + 7x + 10$ | $x^2 + 10x + 25$ | $x + 5$ | | | | |
| $x^2 - 6x - 7$ | $x^2 - 9x + 14$ | $x - 7$ | | | | |
| $2x^2 + 3x - 2$ | $2x^3 - x^2 - 8x + 4$ | $2x - 1$ | | | | |
| $5x^2 + 23x + 12$ | $10x^2 + 11x + 3$ | $5x + 3$ | | | | |
| $-x^2 + 12x - 11$ | $-x^2 - x + 2$ | $1 - x$ | | | | |

3. Sean las expresiones algebraicas:

$N = 7a(2 - b + 3ab)$, $T = 5ab$, $Q = 32a^2b + b - 12$.

a) Calcula $N + T$.
b) Efectúa $T \cdot Q$.

c) Halla el valor numérico de la expresión $Q$ para $a = -\dfrac{1}{4}$, $b = 0{,}5$.

4. Si $P = x - 2y$, $W = x^2 - 2xy + y^2$, $R = x + 3y$, calcula:

a) $P \cdot R$ b) $W \cdot R$ c) $P \cdot W$ d) $P \cdot W + R$ e) $(P - R)W$

5. Sean $A = 7k^2 - 1$, $B = 3k + 7$, $C = 2k^2 + 3k - 7$. Halla:

a) $B - C$ b) $3A + C$ c) $C - 2A$ d) $(A + B) - C$ e) $C + A \cdot B$

6. Prueba que:

a) $(p - q)(p + q) = p^2 - q^2$ b) $(p - 1)(p + 2) = p^2 + p - 2$
c) $(p + q)(p + q) = p^2 + 2pq + q^2$ d) $(3p + 1)(p + 2) = 3p^2 + 7p + 2$

7. Fundamenta que $\dfrac{t}{3}(3t + 9) + (t + 2)(t - 7) - 2(t^2 - t - 7) = 0$.

8. Demuestra que $A + 2a \cdot A = A \cdot B$ si $A = a - 3b$ y $B = 2a + 1$.

9. Determina el polinomio que adicionado a $3x^2y^2 + 5xy^2 - x^2y$ da como resultado $2x^2y^2 + 7xy^2 - 4x^2y$.

**División de polinomios**

En séptimo grado aprendiste a calcular el cociente de dos monomios y de un polinomio por un monomio.

*Ejemplo 3:*

Halla el resultado de las divisiones siguientes:

a) $\dfrac{21m}{7m}$

$\dfrac{21m}{7m}$

$= 3$ se dividen los coeficientes y se divide la parte literal, aplicando la propiedad del cociente de potencias de igual base

b) $\dfrac{11d^5c^3}{44d^5c^5}$

$\dfrac{11d^5c^3}{44d^5c^5}$

$= \dfrac{1}{4c^2}$

Recuerda que $\dfrac{c^3}{c^5} = c^{3-5} = c^{-2} = \dfrac{1}{c^2}$ y $\dfrac{d^5}{d^5} = d^0 = 1$, para $d \neq 0$.

c) $\dfrac{2bh + 2ah}{h}$

$\dfrac{2bh + 2ah}{h}$

$= \dfrac{2bh}{h} + \dfrac{2ah}{h}$

$= 2b + 2a$

$= 2(a + b)$

d) $\dfrac{7{,}5w^3k^6 - 3{,}5w^2k^4}{0{,}5w^2k^4}$

$$\frac{7{,}5w^3k^6 - 3{,}5w^2k^4}{0{,}5w^2k^4}$$

$= \dfrac{7{,}5w^3k^6}{0{,}5w^2k^4} - \dfrac{3{,}5w^2k^4}{0{,}5w^2k^4}$ dividiendo cada término del polinomio por el monomio $0{,}5w^2k^4$

$= 15\ wk^2 - 7$

e) $(24p^5q^3r^2 - 56p^3q^2r + 72p^2q) : (8pq)$

$(24p^5q^3r^2 - 56p^3q^2r + 72p^2q) : (8pq)$

$= 3p^4q^2r^2 - 7p^2qr + 9p$ dividiendo cada término del polinomio por $8pq$

**¡!** Un grupo de estudiantes pertenecientes al círculo de interés Amigos del medio ambiente se propusieron hacer una recogida de botellas vacías para reciclarlas y devolverlas a la industria. En total recogieron 519 botellas y disponen de cajas en las que se pueden envasar 24 botellas solamente y quieren saber cuántas cajas se podrán llenar con las botellas recogidas. Para ello se auxiliaron de la matemática y calcularon:

$$\begin{array}{l}
\text{dividendo} \\
\downarrow \\
\begin{array}{r|l}
519 & \underline{24} \leftarrow \text{divisor} \\
\underline{-48} & 21 \leftarrow \text{cociente} \\
39 & \\
\underline{-24} & \\
15 \leftarrow \text{resto} &
\end{array}
\end{array}$$

En esta división, 519 es el *dividendo,* 24 es el *divisor,* 21 es el *cociente* y 15 el *resto* o residuo.

De la escuela primaria conoces la relación entre estos componentes de la división:

Dividendo es igual a la suma del producto del cociente por el divisor más el resto, donde el resto es menor que el divisor.

En este caso $519 = 21 \cdot 24 + 15$.

**R ¡!** Luego, pueden llenar 21 cajas y quedarían 15 botellas. Fíjate que la relación entre dividendo, divisor, cociente y resto nos permite comprobar que el resultado de la división es correcto.

Análogamente a como se realiza esta división para los números naturales se efectúa la división de polinomios por binomios.

Por ejemplo, la división de $(x^2 + 5x + 8)$ por $(x + 3)$

$$\begin{array}{r|l}
x^2 + 5x + 8 & \underline{x + 3} \\
\underline{-x^2 + 3x\phantom{{}+8}} & x \\
2x\phantom{{}+8} &
\end{array}$$

1. Se divide $x^2$ por $x$ y el resultado es $x$.
2. Se coloca el resultado $x$ en el cociente.
3. Se multiplica $x$ por todo el divisor $(x + 3)$ y se obtiene $x^2 + 3x$.
4. Se realiza la sustracción $(x^2 + 5x) - (x^2 + 3x)$ y se obtiene $2x$.
5. Se considera como dividendo a $2x + 8$.
6. Se divide $2x$ por $x$ y se obtiene 2.
7. Se coloca el resultado de esta división en el cociente.
8. Se multiplica 2 por todo el divisor $(x + 3)$ y se obtiene $2x + 6$.

$$\begin{array}{r|l}
x^2 + 5x + 8 & \underline{x + 3} \leftarrow \text{divisor} \\
\underline{-x^2 + 3x \quad\downarrow} & x + 2 \leftarrow \text{cociente} \\
2x + 8 \leftarrow \text{dividendo} & \\
-\underline{2x + 6} & \\
2 \leftarrow \text{resto} &
\end{array}$$

9. Se realiza la sustracción $(2x + 8) - (2x+6)$ y se obtiene 2.
10. Como el resultado de la sustracción, es decir, el resto, es un polinomio constante su grado es cero, por lo tanto, es de un grado menor que el divisor y se termina la división.

Observa que el polinomio $x^2 + 5x + 8$ y el binomio $x + 3$ están ordenados de forma descendente con respecto a las potencias de la variable $x$. En esta división el dividendo es el polinomio $(x^2 + 5x + 8)$, el divisor es $(x + 3)$, el cociente es $(x + 2)$ y el resto es 2. Fíjate que el procedimiento finalizó cuando se obtuvo un resto con grado menor que el grado del polinomio divisor.

Para comprobar utilizamos la relación entre el dividendo, el divisor, el cociente y el resto: $D = dc + r$:

$$(x + 3)(x + 2) + 2 = x^2 + 2x + 3x + 6 + 2 = x^2 + 5x + 8$$

Nota que ya puedes resolver la situación presentada al inicio del epígrafe 3.2 Operaciones con monomios y polinomios. Susana ya sabe dividir un polinomio por un binomio, luego puede demostrar que $\dfrac{2ah+2bh}{2a+2b} = h$.

*Ejemplo 4:*

Calcula:

a) $(5x^2 + 4x - 3) : (x + 2)$

$$\begin{array}{rl}
5x^2 + 4x - 3 & \underline{|\,x + 2} \\
\underline{-5x^2 - 10x\phantom{{}-3}} & \phantom{|}\,5x \\
-\,6x\phantom{{}-3} &
\end{array}$$

Observa que al dividir el primer término del dividendo por el primer término del divisor se obtiene $5x$ y al multiplicar $5x$ por el divisor se obtiene $5x^2 + 10x$. Este producto se sustrae del dividendo, por eso se coloca $-5x^2 - 10x$. Como el resto que se obtiene es $-6x$ y el grado de este monomio es igual al grado del divisor hay que continuar el procedimiento, repitiendo los mismos pasos.

$$\begin{array}{rl}
5x^2 + 4x - 3 & \underline{|\,x + 2} \\
\underline{-5x^2 - 10x\phantom{{}-3}}\!\downarrow & \phantom{|}\,5x \\
-\,6x - 3 &
\end{array}$$

Se coloca el término siguiente del dividendo al lado del resto.

$$\begin{array}{rl}
5x^2 + 4x - 3 & \underline{|\,x + 2} \\
\underline{-5x^2 - 10x\phantom{{}-3}}\!\downarrow & \phantom{|}\,5x - 6 \\
-\,6x - 3 & \\
\underline{6x + 12} & \\
9 &
\end{array}$$

Al dividir $-6x$ por el primer término del divisor, se obtiene $-6$, y al multiplicar $-6$ por el divisor se obtiene $-6x - 12$ y para sustraerlo de $-6x - 3$ se le cambia el signo. Como el resto es un monomio de grado 0 terminó la división.

Comprobación:

$$\begin{aligned}(x + 2)(5x - 6) + 9 &= 5x^2 - 6x + 10x - 12 + 9 \\ &= 5x^2 + 4x - 3\end{aligned}$$

b) $(3x^2 + x - 10) : (x + 2)$

$$\begin{array}{l|l} 3x^2 + x - 10 & x + 2 \\ \cline{2-2} -3x^2 - 6x & 3x \\ \hline \quad -5x & \end{array}$$

Al igual que en la división de números naturales cuando el resto es cero significa que el dividendo es un múltiplo del divisor y se dice que el polinomio del dividendo es divisible por el polinomio del divisor. En este caso el polinomio $3x^2 + x - 10$ es divisible por $x + 2$.

$$\begin{array}{l|l} 3x^2 + x - 10 & x + 2 \\ \cline{2-2} -3x^2 - 6x \quad\downarrow & 3x - 5x \\ \cline{1-1} \quad -5x - 10 & \\ \quad\ \ 5x - 10 & \\ \cline{1-1} \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Comprobación: $(x + 2)(3x - 5) = 3x^2 - 5x + 6x - 10$
$= 3x^2 + x - 10$

c) $(8a^2 + 14a + 10) : (2a + 3)$

$$\begin{array}{l|l} 8a^2 + 14a + 10 & 2a + 3 \\ \cline{2-2} -8a^2 + 12a \quad\downarrow & 4a + 1 \\ \cline{1-1} \qquad 2a + 10 & \\ \quad\ -2a - 3 & \\ \cline{1-1} \qquad\quad 7 & \end{array}$$

Comprobación:
$(2a + 3)(4a + 1) + 7 = 8a^2 + 2a + 12a + 3 + 7$
$= 8a^2 + 14a + 10$

d) $(2b^3 - 5b^2 - 2b + 12) : (b - 3)$

$$\begin{array}{l|l} 2b^3 - 5b^2 - 8b + 12 & b - 3 \\ \cline{2-2} -2b^3 + 6b^2 \quad\downarrow \quad\downarrow & 2b^2 + b - 5 \\ \cline{1-1} \qquad b^2 - 8b & \\ \quad\ -b^2 + 3b & \\ \cline{1-1} \qquad\quad -5b + 12 & \\ \qquad\qquad 5b - 15 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad\quad -3 & \end{array}$$

Comprobación:
$(b - 3)(2b^2 + b - 5) - 3$
$= 2b^3 + b^2 - 5b - 6b^2 - 3b + 15 - 3$
$= 2b^3 - 5b^2 - 8b + 12$

e) $(5b^4 + 11b^2 - 8) : (b + 1)$

$$\begin{array}{l|l} 5b^4 \qquad\quad + 11b^2 \qquad - 8 & b + 1 \\ \cline{2-2} -5b^4 - 5b^3 \quad\downarrow \qquad\ \downarrow & 5b^3 - 5b^2 + 16b - 16 \\ \cline{1-1} \qquad -5b^3 + 11b^2 & \\ \qquad\ \ 5b^3 + 5b^2 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad 16b^2 & \\ \qquad\quad -16b^2 - 16b & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad\quad -16b - 8 & \\ \qquad\qquad\qquad 16b + 16 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad\qquad\qquad 8 & \end{array}$$

Cuando no aparecen en el dividendo todas las potencias consecutivas de la variable debe dejarse el espacio en el lugar que le corresponda.

Comprobación:
$(b + 1)(5b^3 - 5b^2 + 16b - 16) + 8$
$= 5b^4 - 5b^3 + 16b^2 - 16b +$
$+ 5b^3 - 5b^2 + 16b - 16 + 8$
$= 5b^4 + 11b^2 - 8$

f) $(2ah + 2bh) : (2a + 2b)$

$$\begin{array}{l|l} 2ah + 2bh & 2a + 2b \\ \hline -2ah + 2bh & h \\ \hline 0 & \end{array}$$

Comprobación:
$(2a + 2b)h = 2ah + 2bh$

**R ¡!** Fíjate que has probado que $\dfrac{2bh + 2ah}{2a + 2b} = h.$

Nota que en la división de polinomios el grado del dividendo es mayor o igual que el grado del divisor, ya que, de lo contrario, el cociente tendría exponentes negativos y entonces no sería un polinomio.

Al dividir un polinomio por un binomio debes:

1. Ordenar el dividendo y el divisor en potencias decrecientes de la misma variable.
2. Dividir el primer término del dividendo por el primer término del divisor. Poner el resultado en el lugar del cociente.
3. Multiplicar el divisor por el resultado obtenido en el paso previo (el primer término del cociente). Escribir el resultado debajo de los primeros dos términos del dividendo.
4. Sustraer a los términos correspondientes del dividendo original el producto obtenido en el paso anterior, y escribir el resultado.
5. Agregar al resto obtenido el próximo término del dividendo.
6. Repetir los pasos 2, 3 y 4, utilizando como dividendo el resultado obtenido en el paso anterior, hasta obtener un resto cuyo grado sea menor que el grado del divisor.

*La división por galera (o por el método de la galera) es un antiguo algoritmo de división, utilizado de manera corriente por lo menos hasta el siglo XVII, y que fue sustituido progresivamente por el método actual de la división larga.*

*El nombre deriva del parecido gráfico que se genera con este método y una galera (fig. 3.6).*

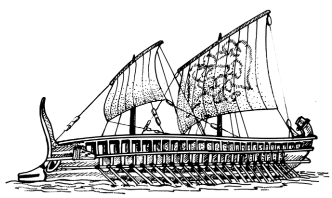


Figura 3.6

*Una versión primitiva de este método fue utilizada en el año 825 por Al-Khwarizmi, por lo que se cree que su origen puede ser árabe o hindú; sin embargo, las investigaciones de Lam Lay Yong señalan que el método de división por galera se originó en la antigua China. El matemático italiano Tartaglia (siglo XVI) lo describe en su* Trattato di numeri et misure.

Al igual que con la adición, la sustracción, la multiplicación y la división de números racionales, con los polinomios se efectúan operaciones combinadas en las que debes tener en cuenta el orden en que se realizan las operaciones.

**Recuerda que:**

| |
|---|
| Al resolver ejercicios en los que aparecen operaciones combinadas con polinomios, primero calculas las operaciones dentro de los paréntesis, después realizas la potenciación, luego, la multiplicación y la división en el orden en que aparecen y por último la adición y la sustracción. |

*Ejemplo 5:*

Sean $H = -2\,w^3t^2$, $K = 5wt^3 - 4w^2t$, $L = 9w^4t^5 - 4w^5t^3 + 3w^2$. Calcula $L + H \cdot K$.

$L + H \cdot K$

$= (9w^4t^5 - 4w^5t^3 + 3w^2) + (-2w^3t^2)(5wt^3 - 4w^2t)$ sustituyendo por orden de operaciones se efectúa primero la multiplicación del monomio por el binomio.

$= (9w^4t^5 - 4w^5t^3 + 3w^2) + (-10w^4t^5 + 8w^5t^3)$

$= 9w^4t^5 - 4w^5t^3 + 3w^2 - 10w^4t^5 + 8w^5t^3$ eliminando paréntesis

$= -w^4t^5 + 4w^5t^3 + 3w^2$ reduciendo términos semejantes

Nota que al sustituir $L$, $H$ y $K$ por las expresiones dadas se colocaron paréntesis y que el resultado de la multiplicación está entre paréntesis.

*Ejemplo 6:*

Prueba que $3m(m + 2) - (m + 2)(2m - 1) - m^2 = 3m + 2$.

Hay que probar esta igualdad, por lo tanto, se trata de fundamentar que el miembro izquierdo es igual al miembro derecho de la igualdad.

$3m(m + 2) - (m + 2)(2m - 1) - m^2$

$= 3m^2 + 6m - (2m^2 - m + 4m - 2) - m^2$ multiplicando los polinomios

$= 3m^2 + 6m - (2m^2 + 3m - 2) - m^2$ reduciendo términos semejantes

$= 3m^2 + 6m - 2m^2 - 3m + 2 - m^2$ eliminando paréntesis

$= 3m + 2$ reduciendo términos semejantes

Fíjate que fue necesario introducir un paréntesis, pues por orden de operaciones antes de la sustracción se realiza la multiplicación.

*Ejemplo 7:*

Simplifica la expresión algebraica $\dfrac{12x^3y^2 - 6x^2y}{3xy} + 5x^2y - 3x(xy - 1)$ y calcula su valor numérico para los valores de las variables $x = \dfrac{1}{3}$; $y = -2$.

$$\frac{12x^3y^2 - 6x^2y}{3xy} + 5x^2y - 3x(xy - 1)$$

$= \dfrac{12x^3y^2}{3xy} - \dfrac{6x^2y}{3xy} + 5x^2y - 3x^2y + 3x$ multiplicando el monomio por el binomio

$= 4x^2y - 2x + 2x^2y + 3x$ dividiendo el polinomio por un monomio

$= 6x^2y + x$ reduciendo términos semejantes

Para calcular el valor numérico:

$$6\left(\frac{1}{3}\right)^2(-2) + \frac{1}{3} = 6 \cdot \frac{1}{9} \cdot (-2) + \frac{1}{3} = -\frac{4}{3} + \frac{1}{3} = -1$$

*Ejemplo 8:*

Sean los polinomios $A = 4x^2 + 19x - 10$; $B = 4x - 2$; $C = 2x^2 + 3x + 8$.

Calcula $A : B - B \cdot C$.

$A : B - B \cdot C$

$= (4x^2 + 19x - 10) : (4x - 2) - (4x - 2)\,(2x^2 + 3x + 8)$ sustituyendo

$= (x^2 + \frac{1}{2}x + 5) - (8x^3 + 8x^2 + 26x - 16)$ efectuando las operaciones indicadas

$= x^2 + \frac{1}{2}x + 5 - 8x^3 - 8x^2 - 26x + 16$ eliminando paréntesis

$= -8x^3 - 7x^2 - 25{,}5x + 21$ reduciendo términos semejantes

Cálculo auxiliar:

$$\begin{array}{rrr|l}
4x^3 & + & 19x - 10 & 4x - 2 \\ \cline{4-4}
-4x^3 & + 2x^2 & & x^2 + \frac{1}{2}x + 5 \\ \cline{1-3}
 & 2x^2 & + 19x & \\
 & -2x^2 & + \quad x & \\ \cline{2-3}
 & & 20x - 10 & \\
 & & -20x + 10 & \\ \cline{3-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

$(4x - 2)(2x^2 + 3x + 8)$

$= 8x^3 + 12x^2 + 32x - 4x^2 - 6x - 16$

$= 8x^3 + 8x^2 + 26x - 16$

Observa que después de sustituir $A$, $B$ y $C$ por las expresiones dadas, realizas la división y la multiplicación teniendo en cuenta el orden de las operaciones e introduces paréntesis para delimitar los resultados de cada una de estas operaciones.

## *Ejercicios*

1. Calcula:

   a) $14p^2 : 2p$ b) $32m^3n^2 : (-8mn)$ c) $10{,}58w^5v^3 : 2{,}3w^2v^3$

d) $(8p^2 + 12p) : 4p$ e) $(9x^3 + 6x) : 3x$ f) $(a^2 + a^4 + a^3) : a^2$
g) $(c - 3d^2) : 2c$ h) $(2a^3b - 2ab^3) : 3ab$ i) $(10z^2 - 5z) : 5z$
j) $(2h^3k^2 - h^5k - h^2k^3) : (-h^3k^2)$ k) $(10q^4p^5 - 5q^3p^6 - q^4p^5) : 5q^4$
l) $(6x^3y^3 + 12x^2y^3 - 4x^4y^2 + 3x^2y^2) : 12xy$

2. Halla el cociente y el resto de las divisiones siguientes:

a) $(m^2 + 5m - 14) : (m + 7)$ b) $(w^2 + w - 2w^3 + 5) : (w - 2)$
c) $(t^2 - t + 9) : (t + 2)$ d) $(2d^2 + 7d + 13) : (d - 3)$
e) $(2q^2 + 11q + 5) : (2q + 1)$ f) $(a^3 + 5a^2 + 10a + 14) : (a + 3)$
g) $(2x^3 + x^2 - 2x - 8) : (x - 1)$ h) $(6p^2 - 7p - 6) : (2p - 1)$
i) $(k^3 - 2k - 4) : (k - 2)$ j) $(8y^2 + 3y^3 + 13y + 7) : (3y + 2)$

k) $\left(\frac{4}{5}x^3 - \frac{8}{5}x^2 - \frac{9}{5}x - 6\right) : \left(\frac{2}{5}x + 1\right)$

3. Completa los cuadrados en blanco según convenga:

a) $4(\square + \square) = 4x^2 + 4x$ b) $x(\square + \square) = 6x^2 + 2x$

c) $2y(\square + \square) = 6xy + 4y$ d) $(x + 3)(\square - \square) = x^2 - 2x - 15$

e) $(2x + 1)(\square - \square + \square) = 4x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x + 2$

f) $(\square - \square)(3x + 2) = 3x^4 + 2x^3 - 15x - 10$

4. Halla la expresión algebraica que multiplicada por $2ab^2c^3$ dé como resultado:

$14a^3b^3c^5 - 6a^3b^4c^4 + 18ab^2c^3$.

5. Encuentra el polinomio que multiplicado por $m - 5$ da como resultado $m^2 - m - 20$.

6. Halla el cociente y el resto de la división del polinomio $2x^2 + 3x - 11$ por $x - 2$.

7. Si se sabe que el dividendo en una división es $10x^2 + 11x - 1$, el cociente es $5x - 2$ y el resto es 5, cuál es el divisor.

8. Sean $A = x^3 - 2x^2 + x - 2$ y $B = x - 2$.

Halla el polinomio $C$ tal que $C \cdot B = A$.

9. Completa la tabla 3.5

Tabla 3.5

| **Dividendo** | **Divisor** | **Cociente** | **Resto** |
|---|---|---|---|
| $x^2 - x + 8$ | $x - 2$ | | |
| $2x^2 + 7x + 3$ | | $2x + 1$ | 0 |
| $x^3 + 1$ | $x + 2$ | | |
| | $x - 1$ | $x + 3$ | 2 |

10. Sean los polinomios $M = 2x^3 + 3x^2 - 32x + 15$, $P = 3x^2 - 7x + 8$, $N = 2x - 1$. Halla:

a) $M : N + P$ b) $(M - N) - P$ c) $NP - M$ d) $N^2 - P$ e) $M - NP$

11. Halla el polinomio $A$ si $\dfrac{A}{x-3} = 2x + 1$.

a) Indica el grado del polinomio $A$.

12. Sean $M = \dfrac{x^2 - 7x - 8}{x - 8}$ y $N = (x + 2)(x - 2)$

a) Calcula $M - N + 3$.
b) Indica el grado del polinomio resultante.
c) Halla el valor numérico del resultado obtenido para $x = -1{,}5$.

13. Prueba que en un prisma recto de base rectangular el producto del perímetro de una de las bases por su altura es igual al área lateral.

## 3.3 Ecuaciones lineales

**¡!** En un triángulo isósceles, la longitud del lado base es igual al triplo de la longitud de los lados no base disminuido en 15 cm, si el perímetro del triángulo es de 40 cm, halla la longitud de cada lado.

Ya conoces que para resolver un problema debes primeramente leer el texto detenidamente para conocer de qué trata y lo que hay que determinar, buscar la información que brinda el texto para identificar las relaciones que se establecen y las palabras clave que aparecen. Después, determinar la variable que utilizarás y su significado y traducir al lenguaje algebraico las relaciones que aparecen en el texto.

En este caso el problema trata sobre un triángulo isósceles y tienes que hallar las longitudes de sus lados. En el texto del problema se plantea la relación existente entre la longitud de la base del triángulo isósceles y la longitud de los lados no base, así como el perímetro del triángulo, siendo las palabras clave triángulo, isósceles, triplo y disminuido en.

Si designas por $x$ la longitud de los lados no base del triángulo isósceles (fig. 3.7), entonces al traducir del lenguaje común al algebraico la relación “la longitud del lado base es igual al triplo de la longitud de los lados iguales disminuido en 15 cm”, se obtiene que la longitud de lado base es $3x - 15$. Como el perímetro de un triángulo es igual a la suma de las longitudes de sus tres lados y el de este triángulo es 40 cm, entonces obtienes la ecuación $x + x + 3x - 15 = 40$.

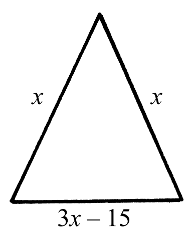


Figura 3.7

En séptimo grado estudiaste las *transformaciones equivalentes:* intercambiar los miembros de la ecuación, adicionar (sustraer) el mismo término a ambos miembros de una ecuación y multiplicar (dividir) ambos miembros de la ecuación por un número distinto de cero, que se realizan a una ecuación y que conducen a la obtención de ecuaciones equivalentes a la dada, es decir, ecuaciones con el mismo dominio de la variable que tienen igual conjunto solución.

Además de estas transformaciones equivalentes que se realizan en ambos miembros de la ecuación, son también transformaciones equivalentes aquellas que se realizan en un solo miembro de la ecuación, como son la eliminación de paréntesis, la reducción de términos semejantes, que, por lo tanto, también conducen a ecuaciones equivalentes.

*Definición:*

> Una ecuación se denomina **ecuación lineal en una variable** si y solo si puede reducirse mediante las transformaciones equivalentes a la forma $ax + b = 0$ con $a$, $b$ números racionales y $a \neq 0$.

*Ejemplo 1:*

Determina cuáles de las siguientes ecuaciones son lineales en una variable.

a) $x + x + 3x - 15 = 40$

$5x - 15 = 40$ reduciendo términos semejantes en el miembro izquierdo

$5x - 55 = 0$ adicionando – 40, a ambos miembros de la ecuación

Luego, $x + x + 3x - 15 = 40$ es una ecuación lineal en una variable.

b) $3m + 5 = 2m - 7$

$3m + 5 - 2m + 7 = 0$ adicionando $-2m$ y 7, a ambos miembros de la ecuación

$m + 12 = 0$ reduciendo términos semejantes en el miembro izquierdo

Por tanto, $3m + 5 = 2m - 7$ es una ecuación lineal en una variable.

c) $x^2 + 3x - 4 = x(x - 2)$

$x^2 + 3x - 4 = x^2 - 2x$ eliminando paréntesis en el miembro derecho

$x^2 + 3x - 4 - x^2 + 2x = 0$ adicionando $-x^2$ y $2x$ a ambos miembros de la ecuación

$5x - 4 = 0$ reduciendo términos semejantes en el miembro izquierdo

Entonces, $x^2 + 3x - 4 = x(x - 2)$ es una ecuación lineal en una variable.

d) $8x + 2(x - 1) = 3x(x + 1)$

$8x + 2(x - 1) = 3x(x + 1)$

$8x + 2x - 2 = 3x^2 + 3x$ eliminando paréntesis

$10x - 2 = 3x^2 + 3x$ reduciendo términos semejantes en el miembro izquierdo

$10x - 2 - 3x^2 - 3x = 0$ adicionando $-3x^2$ y $-3x$, a ambos miembros de la ecuación

$-3x^2 - 7x - 2 = 0$ reduciendo términos semejantes

Luego, la ecuación $8x + 2(x - 1) = 3x(x + 1)$ no es una ecuación lineal en una variable.

e) $(2y - 3)(y + 2) + 5y = 12 + y(2y + 1)$

$2y^2 + 4y - 3y - 6 + 5y = 12 + 2y^2 + y$ efectuando las operaciones indicadas
$2y^2 + 6y - 6 = 12 + 2y^2 + y$ reduciendo términos semejantes
$2y^2 + 6y - 6 - 12 - 2y^2 - y = 0$ adicionando $-12$, $-2y^2$, $-y$, a ambos miembros de la ecuación
$5y - 18 = 0$ reduciendo términos semejantes

Por tanto, la ecuación $(2y - 3)(y + 2) + 5y = 12 + y(2y + 1)$ es una ecuación lineal en una variable.

También conoces que estas ecuaciones pueden no tener solución, ya que la solución de una ecuación depende del dominio de la variable, pues hay ecuaciones que tienen solución en un conjunto numérico y en otros no.

*Ejemplo 2:*

Determina el conjunto solución de las siguientes ecuaciones para el dominio de la variable que se indica (tabla 3.6).

Tabla 3.6

| **Ecuación** | **Dominio de la variable** | |
|---|---|---|
| a) $5x + 7 = 3(x + 1)$ | $\mathbb{N}$ | $\mathbb{Z}$ |
| b) $4(x + 1) - x = 2x + 3 - x$ | $\mathbb{Q}_+$ | $\mathbb{Q}$ |
| c) $\frac{5}{3} + \frac{1}{3}(m + 2) = -\frac{2}{3}$ | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Q}_+$ |
| d) $2a - (a + 2)(a + 5) = 6 - a(a - 3)$ | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Q}$ |

a) $5x + 7 = 3(x + 1)$
$5x + 7 = 3x + 3$ eliminando paréntesis
$5x - 3x = 3 - 7$ adicionando $-3x$ y $-7$, a ambos miembros de la ecuación
$2x = -4$ reduciendo términos semejantes
$x = \frac{-4}{2}$ dividiendo ambos miembros por 2
$x = -2$

Luego, la ecuación no tiene solución en el conjunto de los números naturales, porque $-2 \notin \mathbb{N}$, por tanto, en este caso el conjunto solución es $S = \phi$. Sin embargo, como $-2 \in \mathbb{Z}$, entonces para el conjunto de los números enteros la ecuación tiene como conjunto solución a $S = \{-2\}$.

b) $4(x + 1) - x = 2x + 3 - x$
$4x + 4 - x = 2x + 3 - x$ eliminando paréntesis
$3x + 4 = x + 3$ reduciendo términos semejantes

$3x - x = 3 - 4$ adicionando $-x$ y $-4$ a ambos miembros de la ecuación

$2x = -1$ reduciendo términos semejantes

$x = -\frac{1}{2}$ dividiendo ambos miembros por 2

Como $-\frac{1}{2} \notin \mathbb{Q}_+$, entonces el conjunto solución cuando el dominio de la variable es el conjunto de los números fraccionarios es $S = \phi$. Pero como $-\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, entonces en el conjunto de los números racionales el conjunto solución de la ecuación es $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

c) $\frac{5}{3} + \frac{1}{3}(m + 2) = -\frac{2}{3}$

$\frac{5}{3} + \frac{1}{3}m + \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$ eliminando paréntesis

$\frac{7}{3} + \frac{1}{3}m = -\frac{2}{3}$ reduciendo términos semejantes

$\frac{1}{3}m = -\frac{2}{3} - \frac{7}{3}$ adicionando $-\frac{7}{3}$ a ambos miembros de la ecuación

$\frac{1}{3}m = -\frac{9}{3}$ reduciendo términos semejantes

$m = -\frac{9}{3} \cdot 3$ multiplicando ambos miembros por 3

$m = -9$

Entonces el conjunto solución cuando el dominio de la variable es el conjunto de los números enteros es $S = \{-9\}$ y cuando el dominio de la variable es el conjunto de los números fraccionarios es $S = \phi$.

d) $2a - (a + 2)(a + 5) = 6 - a(a - 3)$

$2a - (a^2 + 7a + 10) = 6 - a^2 + 3a$ efectuando las operaciones indicadas

$2a - a^2 - 7a - 10 = 6 - a^2 + 3a$ eliminando paréntesis

$-a^2 - 5a - 10 = 6 - a^2 + 3a$ reduciendo términos semejantes

$-a^2 - 5a + a^2 - 3a = 6 + 10$ adicionando $a^2 - 3a$ y 10, a ambos miembros de la ecuación

$-8a = 16$ reduciendo términos semejantes

$a = -2$

Entonces el conjunto solución cuando el dominio de la variable es el conjunto de los números enteros es el mismo que cuando el dominio de la variable es conjunto de los números racionales $S = \{-2\}$.

Siempre que no se indique cuál es el dominio básico de la variable en el enunciado del ejercicio se tomará el conjunto de los números reales.

En séptimo grado estudiaste el procedimiento para resolver este tipo de ecuaciones.

*Ejemplo 3:*

Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $4 - 5z = 10 - 15z$

$4 - 5z = 10 - 15z$

$4 - 5z + 15z = 10$ adicionando $15z$ a ambos miembros de la ecuación

$4 + 10z = 10$ reduciendo términos semejantes

$10z = 10 - 4$ adicionando – 4 a ambos miembros de la ecuación

$10z = 6$

$z = \frac{6}{10}$ dividiendo ambos miembros de la ecuación por 10

$z = \frac{3}{5}$

Comprobación: miembro izquierdo $4 - 5 \cdot \frac{3}{5} = 4 - 3 = 1$

miembro derecho: $10 - 15 \cdot \frac{3}{5} = 10 - 9 = 1$

Comparación: $1 = 1$

b) $d + 5 - 2d - 2 = 2d + 3 - 7d$

$d + 5 - 2d - 2 = 2d + 3 - 7d$

$-d + 3 = 3 - 5d$ reduciendo términos semejantes

$5d - d + 3 = 3$ adicionando $5d$ a ambos miembros de la ecuación

$4d + 3 = 3$ reduciendo términos semejantes

$4d = 0$ adicionando –3 a ambos miembros de la ecuación

$d = 0$ dividiendo ambos miembros de la ecuación por 4

Comprobación: miembro izquierdo $0 + 5 - 2 \cdot 0 - 2 = 5 - 2 = 3$

miembro derecho: $2 \cdot 0 + 3 - 7 \cdot 0 = 3$

Comparación: $3 = 3$

c) $7 + 3(x - 4) = 2x - 5(x + 7)$

$7 + 3(x - 4) = 2x - 5(x + 7)$

$7 + 3x - 12 = 2x - 5x - 35$ eliminando paréntesis

$3x - 5 = -3x - 35$ reduciendo términos semejantes

$3x + 3x = 5 - 35$ adicionando $3x$ y 5, a ambos miembros de la ecuación

$6x = -30$ reduciendo términos semejantes

$x = \frac{-30}{6}$ dividiendo ambos miembros de la ecuación por 6

$x = -5$

Comprobación: miembro izquierdo $7 + 3(-5 - 4) = 7 + 3 \cdot (-9) = 7 - 27 = -20$

miembro derecho: $2 \cdot (-5) - 5(-5 + 7) = -10 - 10 = -20$

Comparación: $-20 = -20$

d) $5y^2 - (y + 2)(y - 6) - 4y^2 = 4 - 7(y - 2)$

$5y^2 - (y + 2)(y - 6) - 4y^2 = 4 - 7(y - 2)$

$5y^2 - (y^2 - 6y + 2y - 12) - 4y^2 = 4 + 7y - 14$ multiplicando los polinomios

$5y^2 - (y^2 - 4y - 12) - 4y^2 = 18 - 7y$ reduciendo términos semejantes

$5y^2 - y^2 + 4y + 12 - 4y^2 = 18 - 7y$ eliminando paréntesis

$4y + 12 = 18 - 7y$ reduciendo términos semejantes

$4y + 7y = 18 - 12$ adicionando $7y$ y $-12$, a ambos miembros de la ecuación

$11y = 6$ reduciendo términos semejantes

$y = \frac{6}{11}$ dividiendo ambos miembros de la ecuación por 11

Toda ecuación lineal en una variable tiene solución única o no tiene solución en dependencia del dominio de la variable. Fíjate que toda ecuación lineal se reduce a la forma $ax + b = 0$ con $a$, $b$ números racionales y $a \neq 0$, luego, su solución es $x = -\frac{b}{a}$, que puede pertenecer o no al dominio de la variable. Está claro que cuando el dominio de la variable es el conjunto de los números racionales o el conjunto de los números reales toda ecuación lineal tiene solución única, pues $-\frac{b}{a}$ es un número racional y, por tanto, real, para todo $a$ y $b$ números racionales con $a \neq 0$.

*Ejemplo 4:*

Sea la ecuación $2(a - 1)x + 2 = ax - 1$ con $a \in \mathbb{Q}$ y $a \neq 0$. Halla el valor de $a$ para que la solución de la ecuación sea $x_0 = \frac{1}{2}$.

$2(a-1)\frac{1}{2} + 2 = a \cdot \frac{1}{2} - 1$ como hay que hallar el valor de $a$, para $x_0 = \frac{1}{2}$ solución de la ecuación sustituimos la variable $x$ por $\frac{1}{2}$ y resolvemos la ecuación resultante para la variable $a$.

$a - 1 + 2 = \frac{a}{2} - 1$ eliminando paréntesis

$a+1=\frac{a}{2}-1$ reduciendo términos semejantes

$a-\frac{a}{2}=-1-1$ adicionando $-1$ y $-\frac{a}{2}$ a ambos miembros de la ecuación

$\frac{2a-a}{2}=-2$

$\frac{a}{2}=-2$

$a=-4$ dividiendo ambos miembros de la ecuación por 2.

## *Ejercicios*

1. Lee detenidamente la pregunta y responde:

1.1 Clasifica las proposiciones siguientes en verdaderas o falsas. Escribe (V o F) en la línea dada. Justifica las que sean falsas.

a) ___ Toda ecuación lineal admite solo una solución.

b) ___ La ecuación $4x + 2 = 0$ tiene solución en el conjunto de los números naturales.

c) ___ La ecuación $\frac{1}{2}x=0,5x$ tiene solución.

d) ___ La ecuación $0 \cdot x = 2$ tiene infinitas soluciones.

e) ___ La solución de la ecuación $\frac{1}{3}x-4=0$ es $x = 12$.

f) ___ Existen ecuaciones lineales en una variable que no tienen solución en el conjunto de los números reales.

g) ___ La ecuación $-2x + 5 = 8$ tiene solución en el conjunto de los números fraccionarios.

h) ___ La ecuación $x^2 - 3x = 2 + (x^2 - 4)$ es una ecuación lineal en una variable.

i) ___ Toda ecuación de la forma $ax + b = 0$ con $a, b \in \mathbb{Q}$ y $a \neq 0$ tiene solución única en el conjunto de los números racionales.

j) ___ El conjunto solución de la ecuación $5-\frac{1}{3}x=2\frac{1}{2}$ es $S=\left\{-\frac{15}{2}\right\}$.

2. ¿Para qué valores de la variable, la ecuación $-\frac{1}{2}x+3=x+1$ se transforma en una proposición verdadera?

3. ¿Para qué valores de la variable, la ecuación $3x - \{2(x + 1) + (4 - 3x)\} = x$ se transforma en una proposición falsa?

4. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $4m + 1 - 8m = 5$ b) $0{,}4p + 0{,}2p = -1{,}2$ c) $5x + 3 - 7x = 4 - 5x$

d) $2a - (a + 1) = 3a - 5$ e) $2x + 2(x - 3) = 14$ f) $\frac{5}{2}x - \frac{1}{2} = 2{,}5$

g) $2q + 3(3 + q) = 24$ h) $5 - (x + 3) = 10 - 2x$ i) $5x - (3x - 8) = 15 - 2x$

j) $1 - (t + 6) = 6t - (15 + t)$ k) $b - (3b - 8) = 2b + 5(b - 2)$

l) $p + 2(p - 8) + 14 = 5(p + 2) - 17p$ m) $n - 5(n + 2) = 3(n + 5) - 2n$

n) $7(1{,}4y - 2) - 6 = 4y - (-2{,}4y + 3)$

ñ) $4(17m + 8) + 9(3 - 2m) = 5m - 12(2m - 3)$

o) $d(d - 3) + 2d - 15 = 8d + (d - 7)(d - 1)$

p) $(w + 5)(w + 1) + 2w - 3 = w(w - 2) + 4$

5. Halla el conjunto solución de las ecuaciones siguientes.

a) $14 - (3p + 6) = 0$ b) $3(x + 5) - 8x = 5 - 8(2 - x)$

c) $y(y + 2) + 5 = (y + 1)(y - 3)$ d) $8(b - 1) + 5 = 3(2b + 1)$

e) $1 - (5s + 6) = 6s - (15 + s)$ f) $4b - (9 + 12b) = 2 - (10b - 1)$

g) $6a + [2 - (a - 1) - 3] = a$ h) $6(n + 10) + 3(n - 1) = 60$

i) $2t + 2(t - 1) = -1 - 3(2t + 9)$ j) $8 + (5x - 1)(x - 2) + 9x = x(5x + 3) - 2x + 1$

k) $-5w + (w - 3)^2 + 6 = 2w(2 - w) + 3w^2$

6. Encuentra los valores de la variable que satisfacen las ecuaciones lineales siguientes:

a) $5{,}86\,p - 2{,}11\,p = 1{,}5$ b) $4(x - 5) + 2x = 100$

c) $8(b + 1) = 7(b + 2) + 2$ d) $4a - [a - (a + 5)] = 3$

e) $0 = 6q + 11 - q + 2(q - 2)$ f) $3x + 2(x - 1) = x + 2$

g) $(3x + 1)(x - 2) = 3x(x + 1) - (x + 2)$ h) $3n + [-2 - 2(n - 4) + n] = n + 1$

i) $2p - \{3 + [4p - (5 - 5p) + 2p]\} = 11$ j) $2y^2 + (8 - y) = (2y + 3)(y - 4)$

k) $7d - (2d + 1)(3d - 2) + 12 = 3d(5 - 2d) - 9d$

l) $4m^2 + m - (2m + 1)^2 = 2(m + 2) + 5m$

7. Enlaza la ecuación de la columna A con su solución correspondiente en la columna B.

| A | B |
|---|---|
| $\frac{3}{4}x - 5 = 4$ | $S = \{1\}$ |
| $4(x + 1) + 10 = 8 + 5(x + 1)$ | $S = \{12\}$ |
| $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5$ | $S = \{3\}$ |
| $3(x - 3) = 5(x - 3)$ | $S = \{6\}$ |
| $3x - (x - 3)(x + 2) = 5(x - 1) - x^2$ | $S = \{6{,}75\}$ |
| | $S = \{11\}$ |

8. Escribe una ecuación que se pueda transformar a la forma $ax + b = 0$ con $a$, $b$ números reales y $a \neq 0$, que su solución sea $x = -\frac{1}{4}$.

9. Construye una ecuación que se pueda transformar a la forma $ax + b = 0$ con $a$, $b$ números reales y $a \neq 0$ y que su conjunto solución sea:

   a) $S = \{8\}$   b) $S = \{-2\}$   c) $S = \left\{-3\frac{1}{3}\right\}$   d) $S = \{1{,}5\}$

10. Encuentra una ecuación que se transforme en la forma $ax + b = c$ con $a$, $b$, $c$ números racionales y $a \neq 0$, tal que:

   a) Su solución sea $x = -\frac{2}{3}$.
   b) El conjunto solución sea $S = \{-4\}$.
   c) No tenga solución en $\mathbb{Z}$.
   d) El conjunto solución sea $S = \phi$.

11. ¿Qué valor debe tomar $a$ para que la solución de la ecuación $ax + \frac{1}{3} = 8$ sea $x = \frac{2}{3}$?

12. ¿Para qué valor de $b$, con $b$ un número racional, la ecuación $2(x - 2) - b = x$ tiene la solución $x = -\frac{3}{2}$?

13. Selecciona la respuesta correcta, marcándola con una X.

13.1. La solución de la ecuación $5(x + 2) = 5 + 4x$ es:

   a) ___ $-3{,}5$   b) ___ $-5$   c) ___ $-2$   d) ___ $1$

13.2. El conjunto solución de la ecuación $2(3 - x) + 7 = 5 - x$ es:

   a) ___ $S = \{-18\}$   b) ___ $S = \{-8\}$   c) ___ $S = \{8\}$   d) ___ $S = \{6\}$

13.3. De las ecuaciones siguientes cuál es la que tiene como solución al número 47,4:

   a) ___ $1 - x = 3{,}74$   b) ___ $2(x + 0{,}005) = 9{,}45$

   c) ___ $4(x + 1) = 10$   d) ___ $\frac{x}{0{,}5} = 94{,}8$

13.4. Cuál de las ecuaciones siguientes tiene como conjunto solución a $S = \{-1\}$:

   a) ___ $2(a - 4) = 3a - (6 - a)$   b) ___ $4(a - 4) = a + (a + 1)$

   c) ___ $2a - 8 = 3(a - 2) - a$   d) ___ $a - 4 = 5a + 2(3a - 1)$

14. Determina el número:

    a) natural que satisface la ecuación $2(x+3)+1=5$;

    b) fraccionario que satisface la ecuación $2(x+3)+1=5$;

    c) racional que satisface la ecuación $2(x+3)+1=5$.

15. ¿Qué número fraccionario satisface la ecuación $5x+2(4-x)=4x+9$? Fundamenta tu respuesta.

16. Completa la tabla 3.7.

Tabla 3.7

| Ecuación | Conjunto solución para el dominio de la variable | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $\mathbb{N}$ | $\mathbb{Q}_+$ | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Q}$ |
| $5x-2=3(x+2)$ | | | | |
| $4(2-a)+5a=2a+9$ | | | | |
| $2(y+3{,}1)=2(1{,}1-4y)+2y$ | | | | |
| $7t-3=3(2t+3)+2\left(t-\frac{1}{2}\right)$ | | | | |
| $2(q-2)+q=3(q-1)-1$ | | | | |
| $(3d+1)(d-2)=3d^2+7d-26$ | | | | |
| $(2p+3)(p-4)-8=2p(p-1)$ | | | | |

17. Determina tres ecuaciones equivalentes a la ecuación $y-16=32$.

18. Verifica si las dos ecuaciones tienen el mismo conjunto solución. Fundamenta tu respuesta.

    a) $4x+3=x-3$
    $3x=-6$
    b) $4x=4x+2$
    $x=2$
    c) $7(x-5)-7x+5=x+3$
    $0=x+3$

19. Sea la ecuación $2(p-1)x-p(x-1)=2p+3$ ($p \in \mathbb{Q}$).

    a) ¿Para qué valor de $p$, la ecuación dada no tiene solución en $\mathbb{Q}$?
    b) Halla tres valores de $p$, de manera que la ecuación dada tenga solución en $\mathbb{N}$.

c) Determina el valor de $p$, para que el conjunto solución de la ecuación sea $S=\left\{-\frac{3}{4}\right\}$.

20. Sean las ecuaciones $2(a-x)=\frac{3x}{2}+5$ con $a \in \mathbb{Q}$ y $\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{3}\right)=\frac{x}{4}-\frac{1}{12}$. ¿Para qué valor de $a$ estas ecuaciones son equivalentes?

## 3.3.1 Despejo de ecuaciones

**¡!** El papá de Andrés tiene que asistir a un evento científico que se efectuará en el Palacio de las Convenciones de La Habana, que se encuentra a 50 km de su centro de trabajo. Si la inauguración del evento comienza a las 2:00 p.m. y es la 1:20 p.m., ¿a qué velocidad deberá viajar el papá de Andrés para estar puntualmente en el evento?

En la asignatura Física estudiaste que la ecuación $x = v \cdot t$ describe cualquier movimiento en línea recta y con valor de velocidad constante, en la que a la variable $v$ se le asigna el significado de la velocidad; a la variable $t$, el tiempo y a $x$, la distancia.

En esta ecuación, que permite obtener información de gran interés, en dependencia de la situación, se puede determinar el valor de la velocidad, el tiempo o la distancia.

Muchas ecuaciones de este tipo expresan determinadas relaciones, principios o reglas tanto matemáticos como físicos o de otras ciencias, que tienen mucha utilización tanto en la asignatura Matemática como en otras que has recibido y que estudiarás en los próximos grados, pero también en la vida práctica.

**R ¡!** Para poder saber a qué velocidad deberá viajar el papá de Andrés para estar puntualmente en el evento se conoce la distancia que tiene que recorrer (50 km) y el tiempo (40 min, que son $\frac{2}{3}$ de una hora), pues es la 1:20 p.m. y el evento comienza a las 2:00 p.m.

Por lo tanto, sustituimos en la ecuación $x = v \cdot t$ las variables $t$ por $\frac{2}{3}$ h y $x$ por 50 km y resolvemos la ecuación resultante.

$$50\text{ km} = v\cdot\frac{2}{3}\text{ h}$$

$$\frac{50\text{ km}}{\frac{2}{3}\text{ h}} = v$$ dividiendo de ambos miembros de la ecuación por $\frac{2}{3}$ h

$$50\cdot\frac{3}{2}\text{ km/h} = v$$

$$75\text{ km/h} = v$$

Luego, el papá de Andrés deberá viajar a $75\ \text{km/h}$ para llegar al evento a la hora prevista.

Nota que para poder dar respuesta a este problema tuvimos que resolver la ecuación $x = v \cdot t$ para la variable $v$, en ese caso se dice que se despejó en la ecuación $x = v \cdot t$ la variable $v$.

*Ejemplo 5:*

a) En la ecuación del área de un triángulo $A = \frac{b \cdot h}{2}$, donde la variable $b$ tiene el significado de la longitud de la base del triángulo y $h$ la longitud de la altura, despeja la altura.

| | |
|---|---|
| $A = \frac{b \cdot h}{2}$ | identifica en la ecuación la variable que hay que despejar |
| $2A = b \cdot h$ | multiplica ambos miembros de la ecuación por 2 |
| $\frac{2A}{b} = h$ | divide ambos miembros de la ecuación por $b$, que es distinto de cero por ser la longitud de un lado de un triángulo |

b) En la ecuación de energía cinética $E_C = \frac{1}{2}mv^2$, donde la variable $m$ tiene el significado de la masa del cuerpo, la variable $v$, el valor de velocidad respecto al cuerpo tomado como referencia y $E_C$, la energía cinética que posee el cuerpo, despeja la masa.

| | |
|---|---|
| $E_C = \frac{1}{2}mv^2$ | identifica en la ecuación la variable que hay que despejar |
| $2E_C = mv^2$ | multiplica ambos miembros de la ecuación por 2 |
| $\frac{2E_C}{v^2} = m$ | divide ambos miembros de la ecuación por $v^2$, que es distinto de cero por ser la velocidad respecto al cuerpo tomado como referencia |

c) En la ecuación del perímetro del rectángulo $P = 2(a + b)$, donde la variable $a$ tiene el significado de la longitud del lado mayor y la variable $b$ la longitud del lado menor, despeja la variable $b$.

| | |
|---|---|
| $P = 2(a + b)$ | identifica en la ecuación la variable que hay que despejar |
| $P = 2a + 2b$ | elimina paréntesis |
| $P - 2a = 2b$ | adiciona a ambos miembros de la ecuación el término $-2a$ |
| $\frac{P - 2a}{2} = b$ | divide ambos miembros de la ecuación por 2 |

Observa que también puedes realizar el despejo de la variable $b$ de la manera siguiente:

$P = 2(a + b)$

$$\frac{P}{2}=a+b$$

$$\frac{P}{2}-a=b$$

d) En la ecuación del área del trapecio $A=\frac{(a+c)\cdot h}{2}$, en la que $a$ y $c$ son las bases del trapecio y $h$ su altura, despeja $a$.

| | |
|---|---|
| $A=\frac{(a+c)\cdot h}{2}$ | identifica en la ecuación la variable que hay que despejar |
| $A=\frac{a\cdot h+c\cdot h}{2}$ | elimina paréntesis |
| $2A = a \cdot h + c \cdot h$ | multiplica ambos miembros de la ecuación por 2 |
| $2A - c \cdot h = a \cdot h$ | sustrae a ambos miembros de la ecuación $c \cdot h$ |
| $\frac{2A-c\cdot h}{h}=a$ | divide ambos miembros de la ecuación por 2 |

Observa que también puedes despejar:

$$A=\frac{(a+c)\cdot h}{2}$$

$$2A = (a + c) \cdot h$$

$$\frac{2A}{h}=a+c$$

$$\frac{2A}{h}-c=a$$

Fíjate que al despejar una variable en una ecuación primeramente identificas la variable que hay que despejar y después aplicas el mismo proceder que para resolver una ecuación, es decir, utilizas las transformaciones equivalentes, respetando el orden operacional.

## *Ejercicios*

1. Despeja la variable que se indica en las ecuaciones siguientes:

a) $F_g = g\cdot m$ ; $g$ b) $\Delta_t = \frac{Q}{m}$ ; $Q$ c) $A = l^2$ ; $l$

d) $P=\frac{W}{t}$ ; $t$ e) $A_L = 2\pi\cdot r\cdot h$ ; $h$ f) $V=\frac{1}{3}A_B\cdot h$ ; $h$

g) $s = s_0 + Vt$ ; $t$ h) $L = 2\pi r$; $r$ i) $D = c \cdot d + r$; $d$

j) $v = v_0 + at$ ; $t$ k) $A = 2ab + 2(a+b)\cdot h$ ; $h$ l) $a_n = a_l + (n-1)\cdot d$ ; $d$

m) $A = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$ ; $d_1$ n) $A = \pi\, r(g+r)$; $g$

2. Selecciona la respuesta correcta, marcándola con una X.

2.1. En la ecuación $M = \dfrac{at+c}{b}$ si despejamos la variable *t*, se obtiene:

a) ___ $t = bM - c - a$ b) ___ $t = \dfrac{Mb}{a+t}$

c) ___ $t = \dfrac{(M-c)b}{a}$ d) ___ $t = \dfrac{bM-c}{a}$

2.2. Al despejar la variable *t* en la ecuación $s = v_0 t + s_0$, se obtiene:

a) ___ $t = \dfrac{s}{v_0} - s_0$ b) ___ $t = s - s_0 - v_0$

c) ___ $t = \dfrac{s - s_0}{v_0}$ d) ___ $t = \dfrac{s}{v_0 + s_0}$

2.3. Si despejamos la variable *d* en la ecuación $A = \dfrac{b(n-1)}{b-d}$, obtenemos la expresión:

a) $\dfrac{b(A-n+1)}{A}$ b) ___ $\dfrac{b(n-1)}{Ab}$ c) ___ $b - \dfrac{A}{b(n-1)}$ d) ___ $\dfrac{b(A-n)}{A}$

3. ¿Cuál es la longitud del radio de una circunferencia que tiene 25 cm de longitud?

4. Completa los espacios en blanco de manera que obtengas una proposición verdadera:

4.1. Al despejar la variable *q* en $A = \dfrac{1}{2}h(p+q+r)$, se obtiene __________________.

4.2. Cuando despejamos en la ecuación $\dfrac{C}{5} = \dfrac{F-32}{9}$ la variable *F,* se obtiene _______________.

4.3. En la ecuación $\dfrac{b}{L} = \dfrac{\alpha°}{360°}$ al despejar la variable *L,* se obtiene ________________.

5. Despeja la variable que se indica en las expresiones algebraicas siguientes:

a) $c = a + (c+3)\, d$ ; $d$  b) $m - 2 = (m+5)\, a$ ; $a$  c) $p = \frac{3(m-n)}{5} + n$ ; $n$

## 3.3.2 Resolución de problemas que conducen a ecuaciones lineales

Después de recordar el procedimiento para resolver las ecuaciones lineales en una variable estamos en condiciones de dar respuesta al problema.

**R ¡!** En un triángulo isósceles, la longitud del lado base es igual al triplo de la longitud de los lados iguales disminuido en 15 cm. Si el perímetro del triángulo es de 40 cm, halla la longitud de cada lado.

$x$: longitud de los lados no base del triángulo isósceles
$3x - 15$: longitud de la base del triángulo isósceles (fig. 3.8)

$$x + x + 3x - 15 = 40$$
$$5x - 15 = 40$$
$$5x = 40 + 15$$
$$5x = 55$$
$$x = \frac{55}{5}$$
$$x = 11$$

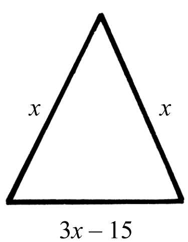



Figura 3.8

Calculaste la longitud de los lados no base, ahora para obtener la longitud de la base del triángulo isósceles, debes sustituir en $3x - 15$ por $x = 11$.

$3 \cdot 11 - 15 = 33 - 15 = 18$. Luego, la base del triángulo isósceles mide 18 cm y los lados no base, 11 cm.

Verifica en el texto del problema la solución: La longitud del lado base es 18, el triplo de la longitud de los lados no base es 33 y $33 - 15 = 18$ y el perímetro del triángulo es igual a la suma de las longitudes de sus tres lados, entonces $11 + 11 + 18 = 40$, por lo que se cumple con lo planteado en el texto del problema.

R/ La base del triángulo isósceles tiene una longitud de 18 cm y los lados no base tienen 11 cm de longitud cada uno.

Como este problema que acabas de resolver existen otros que para darles solución es necesario plantear y resolver ecuaciones lineales en una variable.

**Recuerda:**

1. Leer el texto detenidamente.
2. Determinar el significado de la variable que se va a utilizar.
3. Traducir al lenguaje algebraico las relaciones que se plantean en el texto
4. Plantear una ecuación.
5. Resolver la ecuación planteada.
6. Comprobar que la solución de la ecuación satisface las condiciones que aparecen en el texto del problema.
7. Redactar la respuesta a la pregunta del problema.

Ten en cuenta también cuando resuelvas un problema, que debes, además de revisar si el resultado obtenido tiene sentido común, detenerte a reflexionar cómo encontraste la ecuación que te permitió resolver el problema planteado, pues este proceder puede serte útil en la búsqueda de la solución de otro problema semejante. Igualmente analiza si existe otra vía más sencilla de encontrar la solución.

*Ejemplo 6:*

La suma de dos números es 38 y la diferencia de sus cuadrados es 532. ¿Cuáles son los números?

El problema trata sobre dos números que hay que encontrar a partir de dos relaciones entre ellos. La primera relación es que la suma de los dos números es 38 y la segunda que la diferencia de sus cuadrados es 532. Como no sabes cuáles son los números, si se designa por $x$ a un número, entonces como la suma de los dos números es 38, el otro número es $38 - x$. Por lo tanto, sus cuadrados son $x^2$ y $(38 - x)^2$ respectivamente, y como la diferencia de sus cuadrados es 532, resulta la ecuación $x^2 - (38 - x)^2 = 532$.

$x$: el número mayor

$38 - x$: el número menor

$$
\begin{aligned}
x^2 - (38 - x)^2 &= 532\\
x^2 - (38 - x)(38 - x) &= 532\\
x^2 - (1\,444 - 76x + x^2) &= 532\\
x^2 - 1\,444 + 76x - x^2 &= 532\\
-1\,444 + 76x &= 532\\
76x &= 532 + 1\,444\\
76x &= 1\,976\\
x &= 1\,976 : 76\\
x &= 26
\end{aligned}
$$

Como $x = 26$ entonces, para calcular el otro número efectúas $38 - 26 = 12$.

Comprobación en el texto del problema:

La suma de dos números es 38 : 26 + 12 = 38.

La diferencia de sus cuadrados es 532 : $(26)^2 = 676$, $(12)^2 = 144$ y 676 – 144 = 532.

R/ Los números son 26 y 12.

Fíjate que en este problema una de las relaciones del texto con sentido matemático es el resultado de adicionar dos números. Al designar uno de los sumandos por $x$, el otro sumando es igual a la sustracción de la suma menos $x$, es decir, $38 - x$. Cuando resuelvas otro problema en el que aparezca en el texto el resultado de adicionar dos números, analiza la posibilidad de utilizar este proceder para encontrar la ecuación que te permita resolver el problema planteado.

*Ejemplo 7:*

Un huerto dedicado a la siembra de vegetales de forma rectangular tiene 5,0 m más de largo que de ancho. Se quiere para la próxima cosecha aumentar la producción de vegetales, para esto es necesario ampliar las dimensiones del terreno. Si se incrementan en 4 m el largo y el ancho del terreno, entonces el área del terreno aumentaría en 72 m$^2$, ¿cuáles serían las dimensiones del huerto en la próxima cosecha?

Este problema es sobre un huerto de forma rectangular que para incrementar la producción de vegetales es necesario aumentar sus dimensiones. En el texto del problema se explica la relación que existe entre el largo y el ancho del huerto y que al aumentar el largo y el ancho respectivamente, se incrementará su área. Aparecen las palabras clave *más que, incrementa en, aumentaría en* y *área.*

Para facilitar la búsqueda de la solución del problema te puedes auxiliar de un esbozo del huerto (fig. 3.9).

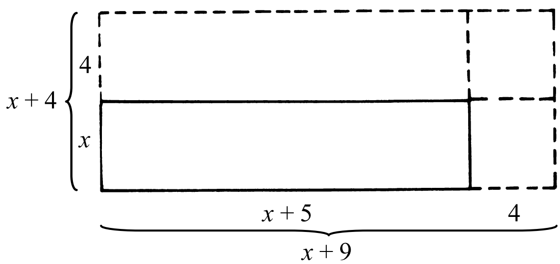



Figura 3.9

Si designas por $x$ a la longitud del ancho del huerto, entonces su largo tiene de longitud $x + 5$. Como tanto el largo como el ancho se incrementan en 4 m, entonces el huerto en la próxima cosecha tendrá de ancho $(x + 4)$ m y de largo $(x + 9)$ m.

En el texto del problema se plantea una relación entre el área inicial del huerto y el área del huerto al incrementar sus dimensiones. Si utilizas la ecuación del área del rectángulo tienes que el área inicial del huerto es $x(x + 5)$ y después de la ampliación $(x + 4)(x + 9)$. Al traducir del lenguaje común al algebraico la relación entre las áreas del huerto que aparece en el texto del problema obtienes la ecuación:

$x(x + 5) + 72 = (x + 4)(x + 9)$ o $x(x + 5) = (x + 4)(x + 9) – 72$ o

$x(x + 5) – (x + 4)(x + 9) = 72$

Tomando una de ellas (tabla 3.8)

Tabla 3.8

| | **Al inicio** | **Después de la ampliación** |
|---|---|---|
| Ancho | $x$ | $x + 4$ |
| Largo | $x + 5$ | $x + 9$ |
| Área | $x(x + 5)$ | $(x + 4)(x + 9)$ |

$$\begin{aligned} x(x + 5) + 72 &= (x + 4)(x + 9) \\ x^2 + 5x + 72 &= x^2 + 9x + 4x + 36 \\ x^2 + 5x + 72 &= x^2 + 13x + 36 \\ 5x + 72 &= 13x + 36 \\ 5x - 13x &= 36 - 72 \\ -8x &= -36 \\ x &= 4{,}5 \end{aligned}$$

Como $x = 4{,}5$ entonces el ancho del huerto en la próxima cosecha será $4{,}5 + 4 = 8{,}5$ y el largo $4{,}5 + 9 = 13{,}5$.
Comprueba en el texto del problema:
Ancho del huerto al inicio: 4,5; largo del huerto al inicio: 9,5
$9{,}5 – 4{,}5 = 5$
Área del huerto al inicio: $4{,}5 \text{ m} \cdot 9{,}5 \text{ m} = 42{,}75 \text{ m}^2$
Área del huerto ampliado: $8{,}5 \text{ m} \cdot 13{,}5 \text{ m} = 114{,}75 \text{ m}^2$
$114{,}75 – 42{,}75 = 72$

R/ El huerto en la próxima cosecha tendría 8,5 m de ancho y 13,5 m de largo.

Observa que en la solución de este problema, además de realizar el esbozo de la situación que se describe y de emplear la ecuación del área del rectángulo, utilizaste una tabla para organizar los datos que proporciona el texto del problema, y así, poder encontrar con más facilidad la relación de igualdad que permite formular la ecuación que da solución al problema planteado. Cuando resuelvas otros problemas reflexiona si esbozar la situación planteada mediante una figura o utilizar tablas te facilita encontrar la ecuación que permite resolver el problema.

*Ejemplo 8:*

Rolando se prepara para la prueba final de octavo grado y comenzó a resolver una guía de ejercicios. <u>El lunes resolvió la tercera parte del total de ejercicios</u>, <u>el martes el 25 % del resto</u> y aún <u>le quedan por resolver, el miércoles, 21 ejercicios</u>. ¿Cuántos ejercicios tiene la guía?

El problema trata sobre la cantidad de ejercicios que resuelve Rolando en tres días. En el texto se plantea la cantidad de ejercicios que resuelve cada día y hay que determinar el total de ejercicios que tiene la guía. Aparecen las palabras clave tercera parte y 25 % del resto, mediante las cuales se describe la cantidad de ejercicios que resuelve cada día Rolando. Si designas por $x$ la cantidad de ejercicios que tiene la guía, entonces como el lunes resolvió la tercera parte del total de ejercicios, este día resolvió $\frac{x}{3}$ ejercicios. El martes resuelve el 25 % del resto, pero como el lunes resuelve $\frac{x}{3}$, entonces el resto es $\frac{2}{3}4$. Por tanto, el martes resuelve $\frac{1}{4}\cdot\frac{2x}{3}=\frac{x}{6}$ ejercicios. Luego, como el total de ejercicios de la guía es igual a la suma de la cantidad de ejercicios que resuelve cada uno de los tres días, resulta la ecuación: $x=\frac{x}{3}+\frac{x}{6}+21$.

$x$: cantidad de ejercicios de la guía

$\frac{x}{3}$: cantidad de ejercicios resueltos el lunes

$\frac{1}{4}\cdot\frac{2x}{3}=\frac{x}{6}$: ejercicios resueltos el martes

21: ejercicios que quedan por resolver

$$x=\frac{x}{3}+\frac{x}{6}+21$$
$$6x = 2x + x + 126$$
$$6x = 3x + 126$$
$$6x - 3x = 126$$
$$3x = 126$$
$$x = 42$$

Comprobación en el texto del problema:

La tercera parte de 42 es 14. El resto es 28 (42 – 14 = 28) y el 25 % de 28 es 7. Por último 14 + 7 + 21 = 42.

R/ La guía tiene 42 ejercicios.

Si te detienes a reflexionar, encontrarás que existen otras vías para resolver este problema.

**Otra vía:**

En este problema no conoces el total de ejercicios que se deben resolver, pero sí la cantidad que debe resolver el último día. El problema se reduce a buscar *qué fracción del total* representan los 21 ejercicios que faltan por resolver.

1. Divides un segmento tomado como unidad, en tres partes iguales y sombreas una que representa los ejercicios resueltos el lunes (fig. 3.10).
   Las otras dos terceras partes representan *el resto,* o sea, la cantidad de ejercicios que le faltan por resolver.

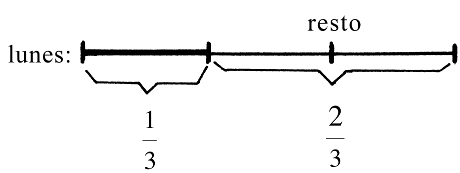



Figura 3.10

2. El 25 % representa la cuarta parte, luego divides el segmento que representa *el resto* en cuatro partes iguales (fig. 3.11).

   (Observa que ya estaba dividido en dos partes iguales por lo que divides a la mitad cada una).

   Sombreas una de ellas, que representa la cantidad de ejercicios resueltos el martes.

   La otra parte queda dividida en tres segmentos iguales.

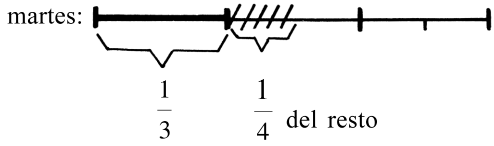



Figura 3.11

3. Como conoces, el miércoles debe resolver 21 ejercicios, por lo que los tres segmentos iguales que quedaron a la derecha representan esa cantidad y para hallar una de ellas, divides 21 : 3 = 7. Luego cada una de esas tres partes representa siete ejercicios (fig. 3.12).

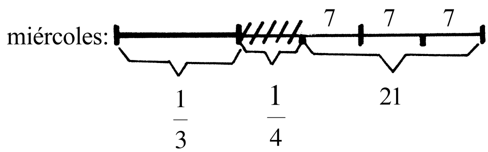



Figura 3.12

4. Como dos de esas pequeñas partes iguales representan una de las tres partes iguales en la que dividiste el segmento unidad, puedes hallar el total de ejercicios multiplicando $14 \cdot 3 = 42$ (fig. 3.13).

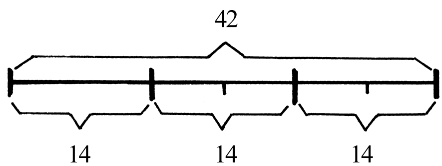



Figura 3.13

En la práctica solo se hace una gráfica y en ella se van realizando los pasos anteriores. En este caso para tu mayor comprensión se hizo por pasos con el comentario correspondiente.

Te invitamos a que encuentres otra vía de solución de este problema.

Ya has resuelto diferentes problemas, pero puedes también elaborar tus propios problemas a partir de datos y situaciones de la vida diaria y resolverlos. Para ello es necesario seleccionar los datos apropiados, determinar las relaciones matemáticas entre estos, expresarlas en el lenguaje común, redactar el problema, y por último resolverlo.

## *Ejercicios*

1. Selecciona la respuesta correcta marcándola con una X.

1.1. Un pionero quiere representar mediante una ecuación la situación siguiente: La tercera parte de la matrícula de su grupo excede en 21 a los 12 miembros del equipo de voleibol de su escuela. Si la variable $x$ representa la matrícula de su grupo, entonces la ecuación que escribió el pionero es:

a) ___ $\frac{1}{3}x-21=12$ b) ___ $3x-21=12$

c) ___ $\frac{1}{3}x+21=12$ d) ___ $3x+21=12$

1.2. Para representar mediante una ecuación la situación siguiente: La cuarta parte de un número $m$ excede en 3 a 18, la ecuación que se escribe es:

a) ___ $4m-3=18$ b) ___ $\frac{1}{4}m+3=18$

c) ___ $4m+3=18$ d) ___ $\frac{1}{4}m-3=18$

1.3. En un puesto de frutas, las 83 guayabas que hay exceden en siete al triplo de la cantidad de piñas. Si $x$ es la cantidad de piñas que hay en el puesto de frutas, entonces la ecuación que representa la situación anterior es:

a) ___ $3x-7=83$ b) ___ $83=3x+7$

c) ___ $\frac{1}{3}x-7=83$ d) ___ $\frac{1}{3}x+7=83$

1.4. Alina quiere expresar mediante una ecuación la información siguiente: el quíntuplo de los estudiantes que participaron en el concurso de dibujo de la casa de cultura aumentado en 12 es 72. Si $t$ representa la cantidad de estudiantes que participaron en el concurso, cuál de las siguientes ecuaciones es la traducción del lenguaje común al algebraico de esta situación:

a) ___ $5t-12=72$ b) ___ $5t+12=72$

c) ___ $\frac{1}{5}t+12=72$ d) ___ $\frac{5t}{12}=72$

1.5. De un grupo de octavo grado se conoce que el triplo de los participantes en el concurso de Matemática excede en siete a los catorce que participaron en el concurso de Historia. Si $x$ es la cantidad de participantes en el concurso de Matemática, entonces esta situación se puede expresar por la ecuación:

a) ___ $\frac{1}{3}x-7=14$ b) ___ $3x+7=14$

c) ___ $3x-7=14$ d) ___ $\frac{1}{3}x+7=14$

1.6. Cuatro veces un número $n$ aumentado en cinco da como resultado 35. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa esta relación?

a) ___ $4n - 5 = 35$ b) ___ $4n + 5 = 35$
c) ___ $4n \cdot 5 = 35$ d) ___ $4(n + 5) = 35$

2. Dadas las siguientes ecuaciones escribe en el lenguaje común las relaciones que representan:

a) $y - 5 = 20$ b) $2x + 15 = 3x$ c) $\frac{1}{3}q - 2 = 7$ d) $p - \frac{p}{2} = 3p + 15$

3. Si la base de un rectángulo tiene una longitud de $x$ cm y se conoce que su altura es tres veces la longitud de la base, entonces:

3.1. su perímetro se representa por _______________;

3.2. su área se representa por _________________.

4. Si se dobla un alambre de 15 cm para formar un triángulo isósceles cuya base mida 6 cm, ¿cuánto miden los otros lados?

5. De una varilla de 2,50 m de largo se serrucharon cuatro pedazos iguales y queda un pedazo de 10 cm. ¿Qué longitud tiene cada pedazo serruchado?

6. En un mercado agropecuario hay un puesto de venta que tiene en exhibición 135 frutas entre naranjas, mangos, guayabas y limones. La cantidad de limones es el doble de la cantidad de naranjas, la de guayaba es la cuarta parte de la cantidad de naranjas y son cinco los mangos. ¿Cuántos limones, guayabas y naranjas hay en el puesto de venta?

7. En las elecciones pioneriles de este curso fueron propuestos Camilo y Gabriela para jefe de colectivo. Después de realizada la votación se contaron en total 221 votos válidos. Si Gabriela recibió 19 votos menos que el duplo de la cantidad de votos recibidos por Camilo, ¿cuál de los pioneros fue elegido jefe de colectivo?

8. Para ayudar a la repoblación forestal de un municipio, los estudiantes de dos secundarias básicas sembraron 536 posturas de árboles. Los estudiantes de la secundaria básica Antonio Maceo sembraron 25 posturas menos que el duplo de la cantidad de posturas que sembraron los estudiantes de la secundaria Lidia Doce. ¿Cuál fue la secundaria básica que menos árboles sembró?

9. Como parte del ejercicio Meteoro 2013 realizado con el propósito de fortalecer la capacidad del país para enfrentar huracanes de gran intensidad y otros eventos extremos, una secundaria movilizó trabajadores, padres y estudiantes para realizar labores de higienización como parte de la lucha antivectorial. Si se conoce que participaron 115 estudiantes más que trabajadores y el número de padres fue la

mitad de la cantidad de trabajadores, qué cantidad de estudiantes, padres y trabajadores participaron en el ejercicio Meteoro 2013 en esa secundaria, si en total asistieron 170 personas.

10. Un pionero compró en la feria del libro realizada este año, un libro de cuentos que tiene 126 páginas y decidió leerlo en tres días. El primer día leyó el doble de la cantidad de páginas que las que leyó el tercer día y el segundo día leyó la mitad de la cantidad de páginas que las que leyó el tercer día. ¿Cuántas páginas leyó por día?

11. Los estudiantes de un grupo de octavo grado de una secundaria básica se propusieron recuperar papel y cartón para entregar a la empresa de recuperación de materias primas de su municipio. Del total de libras de papel y cartón recuperadas, 151 corresponden a cartón, lo que excede en 15 lb a la mitad del total de libras de papel y cartón recuperadas. ¿Qué cantidad de libras de papel y cartón recuperaron estos estudiantes?

12. En la constitución de las asambleas provinciales del Poder Popular del XI período de mandato (2013-2018) tomaron posesión de sus cargos los 1 269 delegados provinciales elegidos por el pueblo. Dos veces la cantidad de mujeres delegadas provinciales excede en 26 al duplo de la cantidad de delegados hombres. ¿Qué porcentaje del total de delegados provinciales representa la cantidad de mujeres delegadas?[38]

13. La diferencia entre las longitudes de las bases de un trapecio es de 2,0 dm, su altura mide 40 cm y su área es igual al triplo de la longitud de la base mayor aumentada en la longitud de la altura. Calcula el área del trapecio.

14. El triplo del ancho de un rectángulo excede en 9,0 dm al largo. Determina el área del rectángulo si se conoce que su perímetro mide 460 cm.

15. En un triángulo escaleno la amplitud del ángulo menor es el 75 % de la amplitud del ángulo mediano y la del ángulo mayor excede en 100° a la diferencia de las amplitudes de los otros dos ángulos. Halla la amplitud de los ángulos del triángulo.

16. En un frigorífico hay papas almacenadas, de estas la tercera parte es para el consumo de hospitales, el 25 % del resto para el consumo de escuelas y círculos infantiles y las 150 000 t restantes para el consumo de la población. ¿Cuántas toneladas de papa fueron destinadas al consumo de hospitales?

17. El 25 % de las caballerías de un trabajador agrícola, está dedicado al cultivo de hortalizas, la mitad al cultivo de frutas, $\frac{3}{5}$ del resto a la cosecha de viandas y las

[38] Tomado de revista *Bohemia,* 22 de febrero de 2013.

cuatro caballerías restantes a la siembra de flores. ¿Cuántas caballerías se emplearon en el cultivo de frutas y cuántas de viandas?

18. En una secundaria básica se aplicó una encuesta a 288 estudiantes de octavo grado para conocer sus intereses en la continuidad de estudios. La encuesta arrojó que hay 13 estudiantes menos interesados en matricular en un tecnológico que en una escuela pedagógica y la cantidad de interesados en matricular en un tecnológico excede en 22 al 60 % de los que quieren matricular en un preuniversitario. ¿Cuántos estudiantes están interesados en matricular en la escuela pedagógica?

19. En una competencia de ajedrez, la cantidad de ajedrecistas del sexo masculino triplicó la cantidad de las del femenino. Si hubieran participado 25 mujeres más y 25 hombres menos, entonces tendrían la misma cantidad de participantes por sexo. ¿Qué cantidad de féminas ajedrecistas participaron en la competencia?

20. Un tanque tiene cierta cantidad de litros de refresco. Durante la mañana se vendió las tres quintas partes del total de litros y en la tarde, el 75 % de lo que le quedaba, quedando aún en el tanque 30 L.

    a) ¿Cuántos litros de refresco tenía el tanque al inicio?
    b) ¿Cuántos litros se vendieron en la mañana?
    c) Si la cantidad de refresco en el tanque inicialmente representaba las tres cuartas partes de su capacidad, ¿cuál es la capacidad del tanque?

21. En un terreno hay sembradas varias hectáreas de col, lechuga y tomate. De col, hay sembradas la tercera parte del total de hectáreas, de lechuga el 30 % del resto y de tomate, hay sembradas 28 ha.

    a) ¿Cuántas hectáreas hay sembradas de lechuga?
    b) Ya se recogieron la mitad de las hectáreas de col, el 25 % de las de lechuga y 15 ha de tomate. ¿Cuántas hectáreas en total faltan por recoger?

22. Joanna visitó la Feria del Libro. Durante su estancia allí, invirtió el 60 % del dinero que llevaba en la compra de varios libros, un cuarto de lo que le quedaba lo destinó para merendar y regresó a la casa con $30,00.

    a) ¿Cuánto dinero llevó Joanna a la feria?
    b) Si los cinco libros que compró tenían el mismo precio, ¿qué precio tenía cada libro?
    c) ¿Qué tanto por ciento del dinero que llevó Joanna a la feria destinó a la merienda?

23. En una secundaria, el 25 % de la matrícula de la escuela es de séptimo grado, el 40 % del resto cursa el octavo grado y hay 270 estudiantes en noveno grado.

    a) ¿Cuál es la matrícula de la escuela?
    b) Si cada grupo de la secundaria tiene como máximo 40 estudiantes, ¿cuántos grupos de cada grado hay en la escuela?

24. En una secundaria básica se utilizaron dos aulas para la escuela de padres. En un aula había el doble de sillas que en la otra. Para tener la misma cantidad de sillas en cada aula de la escuela de padres fue necesario trasladar 8 sillas del aula que más sillas tenía para la otra. ¿Cuántas sillas tenía cada aula antes de realizar la escuela de padres?

25. La cantidad de integrantes del Círculo de Interés Pedagógico es el triplo de la cantidad de estudiantes pertenecientes al Círculo de Interés de Medicina Natural y Tradicional. Si se incorporan cinco estudiantes más al Círculo de Interés de Medicina Natural y Tradicional, entonces este círculo tendría la mitad de integrantes que tiene el Círculo de Interés Pedagógico. ¿Cuántos integrantes tiene cada uno de estos círculos de interés?

26. En las elecciones pioneriles de un destacamento de octavo grado fueron propuestas tres estudiantes para jefa de destacamento: Brenda, Laura y Claudia. Al realizar el conteo de votos se comprobó que todos los presentes votaron y que todos los votos fueron válidos, que Brenda obtuvo las dos quintas partes del total de votos, que Laura obtuvo 7 votos más que Claudia y que Brenda obtuvo el doble de los votos obtenidos por Claudia.

    a) ¿Cuántos pioneros participaron en la votación?
    b) ¿Qué pionera fue elegida como jefa de destacamento?

27. En la figura 3.14, $\alpha$ y $\beta$ son ángulos adyacentes. Si $\angle\alpha = 5x + 1°$ y $\angle\beta = 2x - 17°$, calcula las amplitudes de los ángulos $\alpha$ y $\beta$.

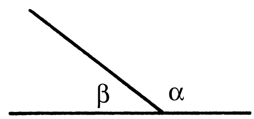



Figura 3.14

28. De dos números se conoce que uno es menor en tres que el otro. Si al quíntuplo del mayor se le sustrae 30, se obtiene el duplo del número menor. ¿Cuáles son los números?

29. En la figura 3.15, *ABEF* cuadrado y *ACDG* rectángulo, con *A*, *B* y *C* puntos alineados. La longitud del lado $AC$ excede en 24 cm a la longitud del lado del cuadrado y la longitud de $\overline{DC}$ es 12 cm menor que la longitud de $\overline{EB}$. ¿Cuáles son las longitudes de los lados del rectángulo si el cuadrado y el rectángulo tienen la misma área?

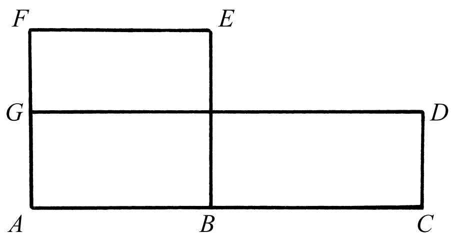
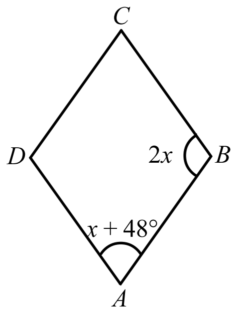



Figura 3.15

30. Redacta un problema cuya resolución conduzca al planteamiento de la ecuación siguiente:

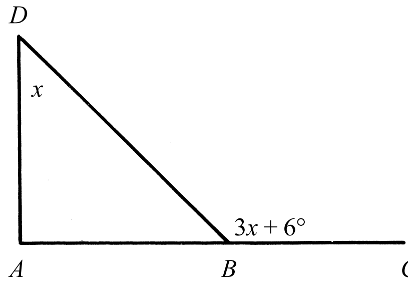
    a) $x + 21 = 2x$ b) $(x + 5)4 = 602$ c) $[(3x + 2) + x] = 36$

31. Elabora problemas utilizando la información de las figuras 3.16 a 3.19.



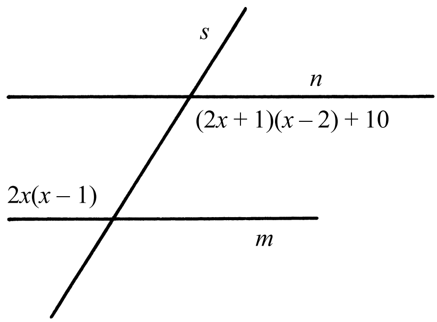

*ABCD* rombo

Figura 3.16



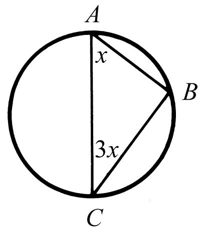

*A*, *B* y *C* puntos alineados; *ABD* triángulo rectángulo en *A*

Figura 3.17




*m* y *n* rectas paralelas

Figura 3.18




$\overline{AC}$ diámetro

Figura 3.19

32. Busca datos actualizados en la prensa, revistas y enciclopedias y redacta tres problemas, en los cuales, para solucionarlos, sea necesario el planteo de una ecuación lineal en una variable. Resuelve los problemas redactados.

33. Elabora tres problemas que conduzcan a una ecuación lineal en una variable y que estén vinculados con la geometría plana.

## 3.4 Razones y proporciones

**¡!** Ana quiere saber cuántas veces es más alta su hija mayor, Rosa, que la más pequeña, Ada, para arreglar la ropa de Rosa de manera que le sirva a Ada. Para esto toma una cinta métrica y comprueba que Rosa mide 1,50 m y Ada, 75 cm. ¿A qué conclusión llegó Ana en cuanto a los resultados de las estaturas obtenidas?

**R¡!** Para comparar dos números o cantidades se puede hallar la diferencia entre ellos (1,50 m – 0,75 m = 0,75 m), pero este resultado nos dice que Rosa tiene 0,75 m más de estatura que su hermana y en este caso Ana lo que quiere saber es cuántas veces Rosa es más alta que su hermana Ada.

Como sabes de grados anteriores esto lo puedes hacer hallando el **cociente** entre ambos números.

Luego, la relación entre la estatura de Rosa y la de Ada la puedes expresar mediante el cociente de sus longitudes. Sin embargo, no están en la misma unidad de medida, por lo que debes convertir a metro o centímetro para poder calcular dicho cociente.

Por ejemplo: $\frac{1{,}50\ \text{m}}{0{,}75\ \text{m}} = 2$ o $\frac{150\ \text{cm}}{75\ \text{cm}} = 2$

Podemos concluir que: la estatura de Rosa es *dos veces* (el doble de) la de Ada. También podemos decir que la estatura de Ada es la *mitad* que la de Rosa.

La división indicada $\frac{1{,}50\ \text{m}}{0{,}75\ \text{m}}$ o $\frac{150\ \text{cm}}{75\ \text{cm}} = 2$ recibe el nombre de razón. Se lee: 1,50 es a 0,75, en el caso de la primera, o 150 es a 75, en el caso de la segunda.

**Recuerda que:**

| |
|---|
| La razón de dos números ***a*** y ***b*** es la fracción $\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$, y se lee ***a* es a *b*.** Esta razón también puede escribirse ***a* : *b*.** |

Como ves la **razón** entre dos cantidades es una **división indicada** o **fracción,** por eso las propiedades de las razones son las mismas propiedades de la división o de las fracciones.

*Desde la Antigüedad clásica, matemáticos, filósofos y artistas han creído en la existencia de una razón privilegiada o divina que fue llamada* ***número áureo.***

*Este número se suele indicar con la letra griega (fi)* $\phi$ *y es un número irracional aproximadamente igual a 1,618.*

*Pitágoras y sus seguidores ya habían descubierto este número al calcular la* razón *entre la longitud del lado de un pentágono y su diagonal.*

*Los griegos también consideraban que un rectángulo cuyos lados a y b estén en la relación* a : b = $\phi$ *era especialmente armonioso y lo llamaron* rectángulo áureo o de oro.

*Este rectángulo lo emplearon los arquitectos griegos en las construcciones de templos y edificios, como el* Partenón de Atenas, *por considerarlo de mayor atractivo artístico.*

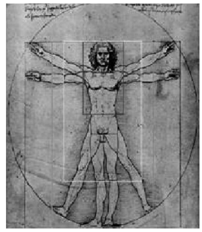
*También pintores famosos han utilizado en sus obras la igualmente llamada* proporción divina.

*Como Leonardo da Vinci, en su dibujo titulado* El hombre ideal, *donde la razón entre la distancia desde la cabeza hasta el ombligo y desde este hasta los pies, es la misma* *que la razón entre la distancia desde el ombligo hasta los pies y desde la cabeza hasta los pies, además sobre el rostro y el cuerpo se aprecian rectángulos de oro.*

*Aparece igualmente en pinturas de Salvador Dalí, en la* Venus de Milo *(fig. 3.20).*

*Esta razón también la usaron en sus producciones artistas del Renacimiento. Por ejemplo, en España, en el* Palacio de la Alhambra.

Partenón



El hombre ideal

Razón áurea

$$\phi = \frac{a}{b} = 1{,}618\ 033...$$

b

a

*Venus de Milo*

Palacio de la Alhambra

Figura 3.20

## *Ejemplo 1:*

En una secundaria hay 600 estudiantes de matrícula. Si las hembras son 350, halla la razón entre:

a) el número de hembras y el de varones;
b) el número de varones y el de hembras;
c) el número de hembras y el total de estudiantes de la escuela.

*Solución:*

Ya sabes que la razón es una división indicada, luego tienes que formar el cociente entre el número de hembras y el de varones. Para esto tomas como *dividendo* el número de hembras y como *divisor* el de varones.

La cantidad de varones la tienes que calcular realizando la operación
600 – 350 = 250. Luego, la razón queda así:

$\frac{350}{250} = \frac{7}{5}$, que se obtiene simplificando la fracción por 50.

Recuerda que $\frac{7}{5}$ es una forma más simple de expresar la fracción $\frac{350}{250}$, pues son fracciones equivalentes. Resulta conveniente que al calcular razones las simplifiques tanto como sea posible.

La razón pedida es $\frac{7}{5}$ o 7 : 5.

Este resultado significa que por cada 7 hembras hay 5 varones.

b) En este caso la razón es entre el número de varones y el de hembras, o sea, a la inversa del anterior. Ahora colocamos en el dividendo la cantidad de varones y en el divisor, la de hembras. Quedando de la forma siguiente:

$\frac{250}{350} = \frac{5}{7}$, que se obtiene también simplificando la fracción por 50.

La razón pedida es $\frac{5}{7}$ (o 5 : 7).

Este resultado significa que por cada 5 varones hay 7 hembras.

c) Ahora se desea hallar la razón entre la cantidad de hembras y el total de estudiantes, por lo que el dividendo será la cantidad de hembras y el divisor la matrícula de la secundaria. Obtenemos el resultado siguiente:

$\frac{350}{600} = \frac{7}{12}$, que se obtiene simplificando por 50.

La razón pedida es $\frac{7}{12}$ o 7 : 12.

Esto significa que de cada 12 estudiantes de la secundaria, 7 son hembras.

**Recuerda que:**

| |
|---|
| Para hallar la razón entre dos números, formas el cociente entre estos y lo puedes simplificar tanto como sea posible. |

*Ejemplo 2:*

Luisito tiene 6 bolas azules y 3 bolas rojas, Aldo tiene 10 bolas amarillas y 5 bolas verdes; mientras Pedrito tiene 4 bolas blancas y 3 negras. Halla la razón entre:

a) el número de bolas azules y el de bolas rojas de Luisito;
b) el número de bolas amarillas y el de bolas verdes de Aldo;
c) el número de bolas blancas y el de bolas negras de Pedrito.

*Solución:*

a) Para hallar la razón entre las bolas azules y las rojas, planteas la razón entre ambas cantidades: $\frac{6}{3} = 2$.

Podemos plantear que estas cantidades están en la razón $\frac{2}{1}$ (o también 2 : 1).

b) Para hallar la razón entre las bolas amarillas y las verdes, procedes de igual forma: $\frac{10}{5} = 2.$

Podemos plantear que estas cantidades están en la razón $\frac{2}{1}$ (o también 2 : 1).

c) Hallamos la razón entre las bolas blancas y las negras, $\frac{4}{3}$.

Podemos plantear que estas cantidades están en la razón $\frac{4}{3}$ (o también 4 : 3).

Observa que las razones obtenidas en los incisos a y b, son iguales, o sea, $\frac{6}{3} = \frac{10}{5} = 2$; y es diferente a la razón obtenida en el inciso c.

**Recuerda que:**

| La igualdad entre dos razones recibe el nombre de proporción. |
|---|

Podemos decir entonces que $\frac{6}{3} = \frac{10}{5}$ es una proporción.

También puede escribirse 6 : 3 = 10 : 5.
En ambos casos se lee: **6 es a 3 como 10 es a 5.**

Mientras que tanto $\frac{6}{3}$ y $\frac{4}{3}$, como $\frac{10}{5}$ y $\frac{4}{3}$ no forman una proporción, pues $\frac{6}{3} \neq \frac{4}{3}$ como $\frac{10}{5} \neq \frac{4}{3}$.

Figura 3.21

*La teoría de las proporciones fue desarrollada por el gran matemático griego Eudoxio (fig. 3.21), que nació en la ciudad de Cnido en el Asia Menor en el año 408 a.n.e. Su obra original no llegó hasta los tiempos actuales, pero gracias a uno de los más ilustres sucesores, Euclides de Alejandría (fig. 3.22) se pudo conocer dicha teoría, pues la recogió en su libro V de los* Elementos.

Figura 3.22

En una proporción sus términos reciben nombres especiales.

## Términos de una proporción:

extremos

$$6 : 3 = 10 : 5$$

medios

extremo  medio

$$\frac{6}{3} = \frac{10}{5}$$

medio  extremo

Recordarás que en la igualdad de fracciones se cumple que los productos cruzados de sus términos son iguales.

Esta propiedad también se cumple en las proporciones y se conoce como la propiedad fundamental de las proporciones:

> En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Por ejemplo:

En la proporción $\frac{6}{3} = \frac{10}{5}$ puedes comprobar que $6 \cdot 5 = 3 \cdot 10$.

Observa también qué sucede si intercambiamos los medios o los extremos de una proporción:

$\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ es una proporción, porque $6 \cdot 5 = 10 \cdot 3$

$\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$ es una proporción, porque $5 \cdot 6 = 3 \cdot 10$

Y si se invierten ambas razones:

$\frac{3}{6} = \frac{5}{10}$ es una proporción, porque $3 \cdot 10 = 6 \cdot 5$.

Puedes concluir que:

> En una proporción:
> al intercambiar los medios,
> al intercambiar los extremos,
> y al invertir las razones,
> se obtiene de nuevo, en cada caso, **una proporción.**

La propiedad fundamental de las proporciones te será muy útil para calcular un término, conocidos los tres restantes.

*Ejemplo 3:*

Halla el valor de $x$ en las proporciones siguientes y comprueba:

a) $\frac{x}{3} = \frac{6}{5}$ b) $\frac{20}{x} = \frac{4}{7}$

*Solución:*

a) $\frac{x}{3} = \frac{6}{5}$

$x \cdot 5 = 3 \cdot 6$ aplicando la propiedad fundamental de las proporciones

$x = \frac{18}{5}$ despejando la $x$

$x = 3{,}6$

Comprobación: $\frac{3{,}6}{3} = \frac{6}{5}$ sustituyendo la $x$

$3{,}6 \cdot 5 = 3 \cdot 6$

$18 = 18$

b) $\frac{20}{x} = \frac{4}{7}$

$20 \cdot 7 = x \cdot 4$ aplicando la propiedad fundamental de las proporciones

$x = \frac{140}{4}$ despejando la $x$

$x = 35.$

Comprobación: $\frac{20}{35} = \frac{4}{7}$ sustituyendo la $x$

$20 \cdot 7 = 35 \cdot 4$

$140 = 140$

También puede realizarse la comprobación como aprendiste en los epígrafes anteriores al resolver ecuaciones.

*Ejemplo 4:*

Al estadio Latinoamericano asistieron a un juego de béisbol 12 000 niños. Si la razón del número de niños al de adultos es $\frac{3}{7}$:

a) ¿Cuántos adultos asistieron al estadio?
b) ¿Cuántas personas asistieron en total?

*Solución:*

a) Representamos por $x$ la cantidad de adultos que asistieron al estadio.

La razón entre el número de niños y el de adultos se puede expresar como $\frac{12\,000}{x}$.

Como la razón es igual a $\frac{3}{7}$, podemos plantear la proporción siguiente:

$$\frac{12\,000}{x} = \frac{3}{7}$$

Aplicamos la propiedad fundamental: $12\,000 \cdot 7 = x \cdot 3$

Resolvemos: $x = \frac{12\,000 \cdot 7}{3} = 28\,000$.

Comprobamos: $\frac{12\,000}{28\,000} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$.

R/ Asistieron al estadio 28 000 adultos.

b) Para hallar el total de personas adicionamos la cantidad de adultos y de niños, o sea, $12\,000 + 28\,000 = 40\,000$.
R/ Asistieron un total de 40 000 personas al juego.

*Ejemplo 5:*

En un destacamento de 28 estudiantes, la razón entre la cantidad de hembras y la cantidad de varones es 4 : 3. ¿Cuántos varones y cuántas hembras hay en el destacamento?

*Solución:*

Este problema puedes resolverlo por varias vías:

**Primera vía:**

Datos:
Cantidad de hembras: $h$
Cantidad de varones: $v$

razón: $\frac{h}{v} = \frac{4}{3}$

Total: 28

Como conoces la razón entre la cantidad de hembras y la de varones, planteas la razón dada y la amplías hasta que la suma del numerador y el denominador sea 28.

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{12}{9} = \frac{16}{12}$$

R/ En el destacamento hay 16 hembras y 12 varones.

**Segunda vía:**

Como hay 28 estudiantes, realizas la siguiente declaración de variable:

Datos:
Cantidad de hembras: $x$
Cantidad de varones: $28 - x$

*Solución:*

Como la razón es 4:3, planteamos la proporción siguiente:

$$\frac{x}{28-x} = \frac{4}{3}$$

$3x = 4(28 - x)$ aplicando la propiedad fundamental o la regla de tres.

$3x = 112 - 4x$
$3x + 4x = 112$
$7x = 112$
$x = 16$ (cantidad de hembras)
$28 - 16 = 12$ (cantidad de varones)

R/ En el destacamento hay 16 hembras y 12 varones.

Este problema también puede resolverse por otra vía que estudiarás en noveno grado.

## *Ejercicios*

1. Halla la razón entre:

a) 20 y 4 b) 4 y 20 c) 4 y 10 d) 10 y 4 e) $\frac{1}{2}$ y 4

f) 4 y $\frac{1}{2}$ g) 0,25 y 0,75 h) 8 y $\frac{2}{7}$ i) $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{10}$ j) $\frac{3}{4}$ y $\frac{27}{2}$

2. Busca tres pares de números que estén en la razón:

a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) 3 : 7

3. Cada figura que se muestra (fig. 3.23) está dividida en figuritas iguales más pequeñas, unas de color blanco y otras de color negro. Halla en cada inciso la razón entre:

3.1. El número de figuritas blancas y el de figuritas negras.

3.2. El número de figuritas blancas y el total de figuritas.

3.3. El número de figuritas negras y el total de figuritas.

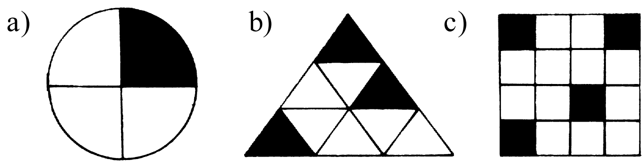



Figura 3.23

4. En qué razón se encuentran:

   a) Las edades de dos jóvenes de 16 y 18 años respectivamente.

   b) Las longitudes de dos segmentos $\overline{AB} = 15$ cm y $\overline{CD} = 5{,}0$ cm.

   c) El área de dos triángulos que miden 20 $dm^2$ y 4 000 $mm^2$.

   d) Las amplitudes entre los ángulos $\alpha$ y $\beta$, si $\alpha$ es un ángulo llano y $\beta$ un ángulo recto.

5. Selecciona cuáles de los pares de números dados están en la razón 5 es a 1.

   a) 7 y 2 b) 15 y 3 c) 20 y 5 d) 1,1 y 5,5 e) $2$ y $\dfrac{2}{5}$

6. ¿Cuántos cuadraditos del cuadrado en blanco hay que sombrear para que las partes sombreadas de las figuras (fig. 3.24), del mismo tipo, estén en la misma razón?

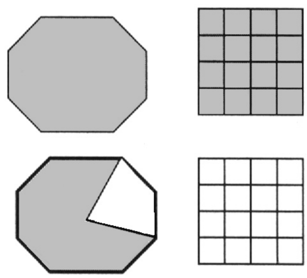


Figura 3.24

7. Completa la serie de dibujos (fig. 3.25), conociendo que la razón entre las partes sombreadas en cada figura es $\dfrac{2}{3}$.

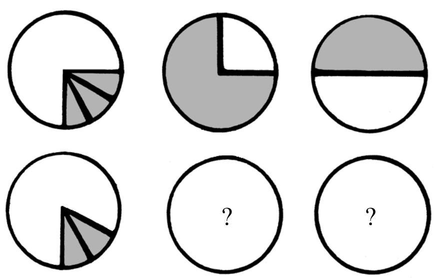



Figura 3.25

8. Selecciona cuáles de los pares de razones siguientes forman una proporción.

   a) $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{5}$ b) 30 : 7 y 15 : 3,5 c) $\frac{5}{10}$ y $\frac{0,2}{0,4}$ d) 2.4 : 3,2 = 0,5 : 2

9. Calcula el valor de la variable en cada caso en las proporciones siguientes:

   a) $\frac{x}{2} = \frac{5}{30}$ b) $3 : y = 1,2 : 8,4$ c) $\frac{80}{a} = \frac{a}{20}$

10. Dos números están en la relación de 5 a 3. Si el mayor es 655, ¿cuál es el menor?

11. En una secundaria básica hay 140 pioneros categorizados como pioneros Mambí. Si la razón entre los categorizados como Mambí y Rebelde es 4 : 3, ¿cuántos pioneros están categorizados como Rebeldes?

12. En una acampada pioneril, la razón del número de varones y de hembras es de $\frac{5}{6}$. Si hay 126 hembras, ¿cuántas hembras más que varones hay en la acampada?

13. En un juego de baloncesto por cada 7 tiros se anotaron 3 canastas. Si en total hubo 63 tiros, ¿cuántas canastas se dejaron de anotar?

14. Cinco de cada seis personas que asistieron a una base de campismo son adultos. Si asistieron 55 adultos, ¿cuántas personas asistieron al campismo?

15. Cuando María abrió su alcancía encontró que tenía 63 monedas entre medios y pesetas. Si por cada 7 monedas hay 4 medios, ¿qué cantidad de dinero había en la alcancía? (Ten en cuenta que todas las pesetas son de 20 centavos).

## 3.4.1 Proporcionalidad

**¡!** Carlitos cumple años y su mamá Alicia prepara un pastel que compartirán, además, su papá y su hermano mayor.

La receta de un pastel de vainilla indica que para cuatro personas se necesitan 200 g de harina, 150 g de mantequilla, cuatro huevos y 120 g de azúcar.

Al llegar de la escuela Carlitos le dice a su mamá que invitó a comer pastel a su mejor amigo, Tony. Ahora la mamá debe preparar para 5 personas y no para 4 como lo había previsto ¿Cómo adaptará Alicia la receta para cinco personas?

Es evidente que se debe aumentar en la receta a cada ingrediente una cantidad determinada de gramos y también la cantidad de huevos que se van a utilizar. ¿Pero será posible hacerlo sin una medida adecuada? Por supuesto que no, ya que el pastel no quedaría con la calidad necesaria.

En esta situación es necesario que la cantidad de cada ingrediente sea *proporcional* al número de personas.

En este grado estudiaste ya conceptos como razón y proporción, vamos ahora a analizar otra relación importante entre magnitudes medibles, **la proporcionalidad.**

Analiza los ejemplos siguientes:

*Ejemplo 1:*

Al cumplir 5 años, Raúl medía 95 cm; a los 8 años, su estatura era de 110 cm y ahora, que tiene 11 años mide 135 cm.

Vemos que la estatura de una persona en edad de crecimiento depende o está relacionada con su edad.

*Ejemplo 2:*

Una libra de malanga cuesta $2,50; 2 lb cuestan $5,00, y así sucesivamente.

La cantidad de dinero que se debe pagar por la compra de la malanga depende de la cantidad de libras que se compren. Mientras más libras se compren, más *dinero* se debe pagar.

Hay una correspondencia entre la magnitud cantidad de *libras* ($C$) y cantidad de *dinero* ($D$).

*Ejemplo 3:*

Un campesino deshierba un campo en 10 días, dos campesinos, trabajando al mismo tiempo, lo deshierban en 5 días.

El tiempo que tarda deshierbar un terreno depende del número de personas que participen. Vemos que si trabajan más personas, se empleará menos tiempo.

Hay una correspondencia entre la magnitud número de personas ($P$) y la magnitud tiempo ($T$).

En realidad hay muchas situaciones de la vida que se pueden expresar como correspondencias de una magnitud en otra.

En esos ejemplos nos interesa conocer cuestiones como:

¿Cuál será la estatura de Raúl a los 15 años?
¿Cuántos campesinos necesitaremos para desyerbar el campo en un día?
¿Cuánto tengo que pagar por la compra de 3 lb de malanga?

Para contestar estas preguntas, debes saber, no solamente que una magnitud depende de la otra, sino también cómo depende, es decir, el criterio de la correspondencia existente entre ellas.

¿A cuáles de esas preguntas sabrías contestar?

- Si a los 11 años Raúl medía 135 cm, es razonable pensar que a los 15 años haya crecido, pero ¿cuánto más? No es posible determinarlo.
- Si una libra cuesta $2,50, dos libras (el doble) costarán $5,00 (el doble). Por la compra de 3 lb (el triplo), ¿cuánto debo pagar?
  Aquí la correspondencia es más sencilla y calculas lo pedido multiplicando por 3 el precio de una libra.
- Si un campesino deshierba un campo en 10 días y 2 campesinos (el doble), lo hacen en 5 días (la mitad); ¿cuántos campesinos se necesitan para deshierbarlo en un día (la décima parte)?
  Aquí también es posible calcular el resultado, solo que a diferencia del ejemplo anterior, lo hacemos dividiendo por 10 la cantidad de días que demora un solo campesino.

Los criterios de correspondencia entre magnitudes son casi siempre muy complicados. Es por ello que estudias los que tienen criterios más sencillos, como los del ejemplo 2 y el ejemplo 3.

Estas correspondencias reciben el nombre de **proporcionalidades.**

## Proporcionalidad directa

**¡!** En la ilustración (fig. 3.26) se muestra la cantidad de naranjas y su costo, en pesos. Calcula mentalmente los datos desconocidos:

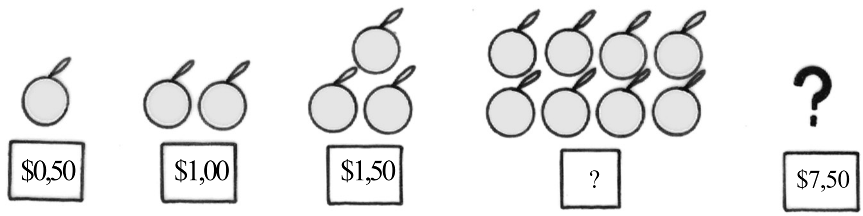



Figura 3.26

**R ¡!** Como ves, aquí aparecen relacionadas dos magnitudes: número de naranjas-costo en pesos y podemos construir una tabla con los valores correspondientes de ambas (tabla 3.9).

Tabla 3.9

| **No. de naranjas** | 1 | 2 | 3 | … | 8 | … | ? |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Costo** | 0,50 | 1 | 1,50 | … | ? | … | 7,50 |

Es evidente que existe una relación entre ambas magnitudes, que nos permite completar los valores desconocidos.

Puedes observar que:

- Si una naranja cuesta \$0,50 y dos naranjas cuestan \$1,00, al aumentar en el *doble* la cantidad de naranjas, aumenta en el *doble* el costo.
- Si una naranja cuesta \$0,50 y tres naranjas cuestan \$1,50, al aumentar en el *triplo* la cantidad de naranjas, aumenta en el *triplo* el costo.

Luego, 8 naranjas cuestan \$4,00 y \$7,50 es el costo de 15 naranjas.

Podemos decir que el costo de las naranjas es *directamente proporcional* a la cantidad de estas que se compren.

> Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando:
>
> - al **aumentar** una (doble, triple, …), la otra **aumenta** de igual manera (doble, triple, …).
> - al **disminuir** una (mitad, tercio, …), la otra **disminuye** de la misma forma (mitad, tercio, …).

De la tabla 3.9 puedes observar que:

$1 \cdot 0{,}50 = 0{,}50$ ; $2 \cdot 0{,}50 = 1$ ; $3 \cdot 0{,}50 = 1{,}50$ ; $8 \cdot 0{,}50 = 4$

Puedes apreciar que en todos los casos el costo de las naranjas se obtiene multiplicando la cantidad de naranjas por un mismo valor, **0,50**; que recibe el nombre de **factor de proporcionalidad**.

De manera general esta correspondencia entre magnitudes se puede expresar como $y = k \cdot x$ , donde $k$ es el *factor de proporcionalidad directa.*

Volvamos a la tabla 3.9 ya completada (tabla 3.10).

Tabla 3.10

| **No. de naranjas** | 1 | 2 | 3 | … | 8 | … | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Costo** | 0,50 | 1 | 1,50 | … | 4,00 | … | 7,50 |

Calculamos las razones entre dos cantidades y sus correspondientes para comparar los resultados:

$$\frac{1}{2} = \frac{0{,}50}{1} \qquad \frac{2}{3} = \frac{1}{1{,}50} \qquad \frac{3}{8} = \frac{1{,}50}{4} \qquad \frac{8}{15} = \frac{4}{7{,}50}$$

Las razones en cada caso son *iguales,* o sea, se forma una *proporción.*

En este ejemplo el factor de proporcionalidad es *0,5,* pues es el número por el cual *se multiplica* cada cantidad de naranjas para obtener su costo. Observa que el factor de proporcionalidad es *el valor correspondiente al 1,* y lo puedes obtener dividiendo cualquier cantidad de la segunda magnitud entre la cantidad a la cual le corresponde la primera.

Si representas esta correspondencia en un sistema de coordenadas, puedes comprobar que los puntos que se obtienen al representar cada par de valores correspondientes, *están sobre una misma recta* (fig. 3.27).

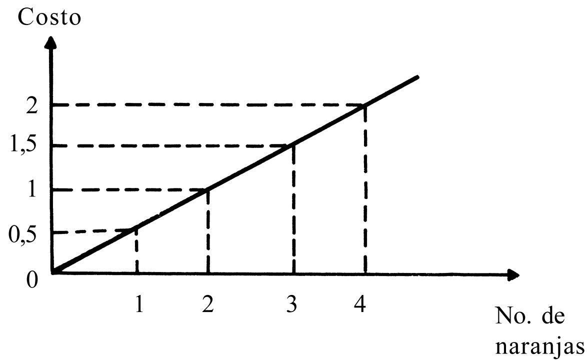



Figura 3.27

Puedes concluir que:

- Cuando dos magnitudes están relacionadas de modo que los valores de una de ellas se obtienen multiplicando por un mismo número los valores correspondientes de la otra, se dice que son **directamente proporcionales.**
- En una proporcionalidad directa dos cantidades cualesquiera de una magnitud y sus correspondientes en la otra, forman una **proporción.**
- En una proporcionalidad directa, el factor de proporcionalidad se halla **dividiendo cualquier cantidad de la segunda magnitud entre la cantidad a la cual le corresponde la primera.**
- En una proporcionalidad directa los puntos que se obtienen al representar cada par de valores correspondientes, **están sobre una misma recta.**

*Ejemplo 1:*

De las tablas 3.11 a 3.13, identifica en cuáles se representa una proporcionalidad directa y halla de ser posible los valores que faltan.

a) La tabla 3.11 muestra la correspondencia que se establece entre la distancia que recorre un auto en función del tiempo transcurrido.

Tabla 3.11

| **Tiempo (hora)** | 1 | 2 | 4 | |
|---|---|---|---|---|
| **Distancia (kilómetro)** | 80 | 160 | | 400 |

*Solución:*

Para comprobar si es una proporcionalidad directa puedes proceder de varias formas:

1. Compruebas si los valores de una de las magnitudes, se obtienen multiplicando por un mismo número los valores correspondientes de la otra.
   $1 \cdot \mathbf{80} = 80$; $2 \cdot \mathbf{80} = 160$ (se cumple, luego los valores de ambas magnitudes son directamente proporcionales y el factor de proporcionalidad directa es **80**).

2. Compruebas si los valores de la tabla forman una proporción:
   $\frac{1}{80} = \frac{2}{160}$ y aplicando la propiedad fundamental se obtiene que:
   $1 \cdot 160 = 80 \cdot 2$
   $160 = 160$ (se forma una proporción)

3. Divides los valores correspondientes de la segunda magnitud por sus valores correspondientes de la primera y verificas si se obtiene el mismo resultado.

   $\frac{80}{1} = 80$ y $\frac{160}{2} = 80$ (se obtiene el mismo valor)
   Hemos comprobado por tres vías diferentes que la correspondencia es una proporción y es posible hallar los valores que faltan en la tabla.
   Como el factor de proporcionalidad es 80, multiplicamos $4 \cdot \mathbf{80} = \mathbf{320}$.

   El otro valor lo hallamos dividiendo $\frac{400}{80} = 5$.

   R/ Los valores que faltan en la tabla son 320 y 5.

   b) La tabla 3.12 muestra la correspondencia que se establece entre la variación de la longitud de una planta y el tiempo transcurrido.

Tabla 3.12

| **Tiempo (día)** | 10 | 30 | 50 | |
|---|---|---|---|---|
| **Longitud (cm)** | 15 | 27 | | 100 |

*Solución:*

Para comprobar si es una proporcionalidad directa aplicas uno de los procedimientos anteriores.

Divides los valores de la segunda magnitud por sus valores correspondientes de la primera y verificas si se obtiene el mismo resultado.

$\frac{15}{10} = 1{,}5$ y $\frac{27}{30} = \frac{9}{10} = 0{,}9$ (no se obtiene el mismo valor, por lo que dicha correspondencia no es una proporcionalidad directa).

c) La tabla 3.13 muestra la correspondencia que se establece entre la longitud del lado de un cuadrado y su perímetro.

Tabla 3.13

| **Lado de un cuadrado (cm)** | 1 | | 2,5 | 4,2 |
|---|---|---|---|---|
| **Perímetro (cm)** | 4 | 8 | | 16,8 |

*Solución:*

Compruebas si es una proporcionalidad directa por una de las vías conocidas:

$\frac{4}{1} = 4$ y $\frac{16{,}8}{4{,}2} = 4$

Se obtiene el mismo valor, por lo que esta correspondencia es una proporción y es posible hallar los valores que faltan en la tabla.
Como el factor de proporcionalidad es 4, para hallar el lado del cuadrado de perímetro 8 cm dividimos $\frac{8}{4} = 2$ y se coloca en la tabla.
El perímetro del cuadrado de lado 2,5 se obtiene al multiplicar $4 \cdot 2{,}5 = 10$ y se coloca en la tabla.
En la vida frecuentemente es necesario resolver problemas donde aparecen magnitudes que se relacionan entre sí mediante una **proporcionalidad directa**. A continuación te mostramos uno como ejemplo.

*Ejemplo 2:*

Una llave abierta completamente durante 5 min hace que el nivel del agua de un tanque suba 20 cm. ¿Cuánto subirá el nivel del agua si se abre completamente la llave durante 15 min?

*Solución:*

Denotas por $x$ el nivel del agua en el tanque a los 15 min. Representas los datos del problema en una tabla como la 3.14.

Como dos valores de una magnitud y su correspondiente en la otra forman una proporción, puedes plantear la proporción siguiente:

Tabla 3.14

| | | |
|---|---|---|
| **Tiempo (min)** | 5 | 15 |
| **Nivel del agua (cm)** | 20 | $x$ |

$$\frac{5}{15} = \frac{20}{x}$$

Para calcular el término desconocido, aplicas la propiedad fundamental o simplemente la regla de tres.

$$x = \frac{20 \cdot 15}{5}$$

$x = 60$ cm

R/ Si se abre la llave completamente durante 15 min, el nivel del agua subirá hasta los 60 cm.

Recuerda que también puedes resolver el problema hallando el factor de proporcionalidad, que es $\frac{20}{5} = 4$ y multiplicas $4 \cdot 15 = 60$.

La *regla de tres,* estudiada por ti en grados anteriores, es una de las aplicaciones de la proporcionalidad, pero también existen otras no menos importantes como los *porcentajes,* las *escalas* y el *reparto proporcional.*

*Ejemplo 3:*

Un CDR de la capital tenía previsto un plan anual de 50 donaciones de sangre. Al finalizar la etapa se comprobó que cumplieron dicho plan en un 120 %. ¿Cuántas donaciones más de las previstas aportó este CDR al país al finalizar el año?

*Solución:*

Este problema puede resolverse por varias vías. Analicemos dos de ellas.

**Primera vía:**

Como cumplieron en un 120 % su plan, entonces debes hallar qué tanto por ciento es 120 de 50 para determinar el total de donaciones realizadas.

$\frac{p}{T} = \frac{x}{100}$ planteas la proporción

$\frac{p}{50}=\frac{120}{100}$ sustituyes en la proporción

$p=\frac{120}{100}\cdot 50$ despejas la variable $p$

$p$ = 60 cantidad de donaciones aportadas
Para resolver el problema sustraes 60 – 50 = 10.
R/ El CDR aportó 10 donaciones más de las previstas.

**Segunda vía:**

Para calcular cuántas donaciones más de las previstas aportaron, es necesario conocer cuánto más aportaron en tanto por ciento. Hallas directamente el 20 % de 50.

$\frac{p}{50}=\frac{20}{100}$ sustituyendo en la proporción

$p=\frac{20}{100}\cdot 50$

$p = 10$

De esta manera la respuesta a la pregunta se obtiene directamente.

R/ El CDR aportó 10 donaciones más de las previstas.

En los mapas, las maquetas o los planos de casas y edificios, encontramos escalas que identifican la correspondencia que existe entre lo representado en ellos y la realidad. A partir del conocimiento de esa escala podemos resolver problemas como el siguiente:

*Ejemplo 4:*

La Torre Eiffel (fig. 3.28), símbolo de Francia, es una estructura de hierro pudelado diseñada por el ingeniero francés Gustave Eiffel.

En un museo se muestra una maqueta de París donde aparece la Torre Eiffel. La maqueta fue elaborada a escala 1 : 1 620, por lo que la altura de la torre en la maqueta alcanza solo 20 cm. ¿Cuál es la altura real de la Torre Eiffel?

Figura 3.28

*Solución:*

La escala 1 : 1 620 nos indica que por cada centímetro de la maqueta, en la realidad son 1 620 cm.

Para hallar las medidas reales basta con multiplicar por 1 620 las medidas que aparecen en la maqueta.

También se puede proceder al cálculo de la altura a partir de una proporción:

1 cm $\rightarrow$ 1 620 cm
20 cm $\rightarrow$ $h$ cm

Luego, $\frac{1}{20}=\frac{1\,620}{h}$ la cual resolvemos aplicando la regla de tres:

$$h=\frac{20\cdot 1\,620}{1}=32\,400\text{ cm}$$

Como sabes para convertir de centímetro a metro, dividimos por 100 y obtienes 324 m, que es una respuesta más adecuada para objetos de grandes dimensiones.

R/ La altura real de la Torre de Eiffel es 324 m.

*Ejemplo 5:*

Tres grupos de octavo grado de una escuela secundaria básica invirtieron \$70,00 en la compra de unas lámparas; para mejorar la iluminación de sus aulas. El grupo 8.º 1 se quedó con 2 lámparas; el 8.º 2, con 5 lámparas y el 8.º 3, con 7. ¿Cuánto gastó cada grupo si el reparto se hizo proporcionalmente al dinero que aportó cada grupo?

*Solución:*

Como no conoces las cantidades de dinero invertido por cada grupo, declaras los datos siguientes:

Datos:

Cantidad de dinero invertido por el grupo 1: $x$
Cantidad de dinero invertido por el grupo 2: $y$
Cantidad de dinero invertido por el grupo 3: $z$
Como el reparto se hizo proporcional al dinero invertido, puedes plantear la proporción siguiente:

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z}{7}=k$$

Igualando cada razón a $k$ por separado, y despejando la variable, obtienes:

$x = 2k$
$y = 5k$
$z = 7k$

$$\begin{array}{r} x = 2k \\ y = 5k \\ z = 7k \\ \hline \end{array}$$

Adicionando cada miembro, obtienes: $x + y + z = 14k$

Pero, el total de dinero invertido es \$70, por lo que $x + y + z = 70$. Sustituyes en el miembro izquierdo de la última igualdad y obtienes:

$70 = 14k$, de donde $k = 5$.

Conociendo $k$, ya es posible calcular la cantidad de dinero invertido:

$x = 2 \cdot 5 = 10$
$y = 5 \cdot 5 = 25$
$z = 7 \cdot 5 = 35$

R/ El grupo 1 invirtió \$10, el grupo 2, \$25 y el grupo 3, \$35.

**R ¡!** La situación inicial del epígrafe está relacionada con una proporcionalidad directa, ya que al aumentar la cantidad de personas, en la receta se deben incrementar también los ingredientes proporcionalmente.

Observa cómo hallar la cantidad de gramos de harina que se necesitan ahora para 5 personas.

Como la cantidad de huevos coincide con la cantidad de personas, es fácil deducir que se necesitarán *5 huevos* (tabla 3.15).

Tabla 3.15

| **Cantidad de personas** | **Cantidad de harina** |
|---|---|
| 4 | 200 |
| 5 | $x$ |

Planteas la proporción:

$$\frac{4}{5} = \frac{200}{x}$$

Aplicas la regla de tres: $x = \dfrac{200 \cdot 5}{4}$

Se obtiene: $x = 250$ g

Como puedes apreciar el factor de proporcionalidad directa es $\frac{5}{4}$, por lo que para hallar las otras cantidades basta con multiplicar este factor por cada una de las cantidades correspondientes en la receta para cuatro personas.

Mantequilla: $\frac{5}{4} \cdot 150 = 187{,}5$ g        Azúcar: $\frac{5}{4} \cdot 120 = 150$ g

De esta manera puedes adaptar cualquier receta que conozcas a un número mayor o menor de personas.

## *Ejercicios*

1. Di cuáles de los siguientes pares de magnitudes son directamente proporcionales:

a) La cantidad de entradas compradas para el cine y el dinero pagado por estas.
b) La edad de una persona y su peso.
c) La distancia recorrida por un camión que viaja a 80 km/h y el tiempo que tarda en recorrerla.
d) La talla de un pantalón y su precio.
e) El tiempo que permanece abierta una pila de agua y la cantidad de agua que vierte.
f) El grosor de un libro y su precio.
g) La longitud de una circunferencia y la longitud de su radio.
h) El volumen del agua y su peso.

2. De las tablas 3.16 a 3.18, di cuál(es) corresponde(n) a una proporcionalidad directa.

Tabla 3.16

a)

| $x$ | 2 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 3 | 10,5 | 12 |

Tabla 3.17

b)

| $x$ | 2 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 5 | 4 | 35 |

Tabla 3.18

c)

| $x$ | –3 | 4 | –7 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 15 | –20 | 35 |

3. Los datos representados en las tablas 3.19 a 3.21 corresponden a magnitudes directamente proporcionales. Halla en cada caso el factor de proporcionalidad y calcula los valores que faltan.

Tabla 3.19

a)

| **Libras de tomate** | 1 | 2 | |
|---|---|---|---|
| **Costo en pesos** | 1,60 | | 17,60 |

Tabla 3.20

b)

| **Distancia recorrida por un auto (en km)** | 50 | 100 | 120 |
|---|---|---|---|
| **Litros de gasolina consumidos** | | 8,5 | |

Tabla 3.21

c)

| **Horas trabajadas** | | 25 | 120,5 |
|---|---|---|---|
| **Salario que devenga en pesos** | 126 | 450 | |

4. Selecciona en cada caso la respuesta correcta marcando con una X.

4.1. Un cuerpo de cobre de 1 $dm^3$ de volumen tiene una masa de 8,9 kg. Un objeto de cobre con una masa de 53,4 kg, tiene un volumen de:

a) ___ 6,0 $dm^3$ b) ___ 475,26 $dm^3$ c) ___ 60 $dm^3$ d) ___ 47 526 $dm^3$

4.2. Un ciclista recorre 54 km en 3 h. Si le faltan por recorrer 72 km, ¿cuántas horas en total se tardará si mantiene la misma velocidad?

a) ___ 4 h b) ___ 1,28 h c) ___ 7 h d) ___ 2 268 h

5. Una máquina elabora 180 piezas en 3 h.

   a) ¿Cuántas piezas elabora en 18 h?
   b) ¿Cuántas horas necesita para elaborar 9 000 piezas?

6. El salario de un técnico es \$1,25 por hora.

   a) ¿Cuál es su salario por 40 h de trabajo?
   b) ¿Cuánto tiempo, en hora, ha trabajado si cobra \$215,00?

7. Un auto consume 4 L de gasolina por cada 55 km recorridos. ¿Qué distancia puede recorrer con 20 L de gasolina?

8. Si 4 libros, que tienen igual precio, cuestan \$20,00, ¿cuánto costarán tres docenas de libros a ese mismo precio?

9. Una torre de 25,05 m da una sombra de 33,40 m. ¿Cuál será, a la misma hora, la sombra de una persona cuya estatura es 1,80 m?

10. Un auto recorre 206,85 km en 3,5 h con una velocidad constante. ¿Qué distancia recorre en 5 h?

11. Un medicamento tiene como dosis 2 mg/kg de peso del paciente. Si la doctora recetó a Luis 32 mg de dicho medicamento, ¿cuánto pesa Luis?

12. En una secundaria básica de los 40 estudiantes de un grupo, el 15 % pertenecen al Círculo de Interés Pedagógico. ¿Cuántos estudiantes del aula pertenecen a dicho círculo?

13. En una cooperativa de producción agropecuaria (CPA) fueron sembradas 80 ha de boniato. Si ya han sido cosechadas 45 ha, ¿qué tanto por ciento del total de hectáreas falta por cosechar?

14. Un estudiante ha resuelto ya 27 ejercicios de la guía de matemática, lo que representa el 30 % del total de ejercicios de la guía. ¿Cuántos ejercicios tiene la guía?

15. En un mapa, cada centímetro medido representa 32 km en la realidad. Se dice que el mapa está hecho a escala 1 : 32.

    a) ¿A qué distancia se encuentran dos ciudades en realidad, si en el mapa están a 120 cm una de la otra?
    b) ¿A cuántos centímetros en el mapa se encuentran dos ciudades que en la realidad están a 464 km de distancia?

16. Descompón el número 78 en tres sumandos proporcionales a los números 3, 4 y 6 respectivamente.

17. Las longitudes de los lados de un triángulo son proporcionales a 2, 4 y 5. Si su perímetro es 16,5 cm, ¿cuánto miden sus lados?

18. En tres campamentos fueron plantados 60 árboles de forma tal que la cantidad de árboles sembrados en cada campamento es proporcional a 3, 4 y 5. ¿Cuántos árboles se sembraron en cada campamento?

19. Confecciona una tabla que relacione dos magnitudes directamente proporcionales, con 5 columnas y en las que sea necesario completarlas con un valor de cada magnitud.

20. Elabora tres problemas donde utilices magnitudes directamente proporcionales de las seleccionadas en el ejercicio 1 de este epígrafe.

## Proporcionalidad inversa

**¡!** En la tabla 3.22 se muestra el tiempo, en minuto, que demora en llenarse un tanque según la cantidad de llaves que se utilicen, las cuales vierten igual cantidad de litros de agua por minuto. Calcula mentalmente los valores desconocidos.

Tabla 3.22

| **Cantidad de llaves** | 1 | 2 | 3 | 4 | … | ? |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Tiempo en minuto** | 60 | 30 | ? | 15 | … | 10 |

**R ¡!** Para hallar los valores desconocidos, observa que existe una relación entre ambas magnitudes, que nos permite completar los valores desconocidos:

Si una llave llena el tanque en 60 min y dos llaves lo hacen en 30 min, al aumentar en el *doble* la cantidad de llaves, disminuye en el *doble* el tiempo de llenado.

Si una llave llena el tanque en 60 min, al aumentar en el *triplo* la cantidad de llaves, disminuye en el *triplo* el tiempo de llenado, por lo que tres llaves lo harán en 20 min.

Mientras que si el tiempo disminuye *seis veces,* la cantidad de llaves aumenta *seis veces* y el tanque se llenará en 10 min si se utilizan *6 llaves.*

Luego el tiempo que demoran las llaves en llenar el tanque es *inversamente proporcional* a la cantidad de llaves que se utilicen.

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando:

- al **aumentar** una (doble, triplo, …), la otra **disminuye** de igual manera (doble, triplo, …);
- al **disminuir** una (mitad, tercio, …), la otra **aumenta** de la misma forma (mitad, tercio, …).

De la tabla 3.22 puedes observar que:

$$60 = 1 \cdot \mathbf{60};\ 30 = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{60};\ 20 = \frac{1}{3} \cdot \mathbf{60};\ 15 = \frac{1}{4} \cdot \mathbf{60}$$

Puedes apreciar que en todos los casos el tiempo que demora en llenarse el tanque se obtiene multiplicando por 60, los *recíprocos* de la cantidad de llaves utilizadas. Este valor, **60**, recibe el nombre de *factor de proporcionalidad inversa.*

De manera general esta correspondencia entre magnitudes se puede expresar como $y = \boldsymbol{k} \cdot \frac{1}{x}$, donde $\boldsymbol{k}$ es el *factor de proporcionalidad inversa.*

Volvamos a la tabla ya completada 3.23:

Tabla 3.23

| **Cantidad de llaves** | 1 | 2 | 3 | 4 | … | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Tiempo en minuto** | 60 | 30 | 20 | 15 | … | 10 |

Calculamos las razones entre dos valores de una misma magnitud y los recíprocos de su razón correspondiente para comparar los resultados:

$$\frac{1}{2} = \frac{30}{60} \quad \frac{2}{3} = \frac{20}{30} \quad \frac{3}{4} = \frac{15}{20} \quad \frac{4}{6} = \frac{10}{15}$$

Las razones en cada caso son *iguales,* o sea, se forma una *proporción.*

En este ejemplo el factor de proporcionalidad es **60**, pues es el número por el cual *se multiplica* cada recíproco de la cantidad de llaves para obtener el tiempo. Observa que el factor de proporcionalidad es *el valor correspondiente al 1,* y lo puedes obtener multiplicando cualquier cantidad de la segunda magnitud por la cantidad a la cual le corresponde la primera.

También puedes representar gráficamente la relación entre magnitudes inversamente proporcionales. Con los datos del ejemplo obtenemos la gráfica de la figura 3.29.

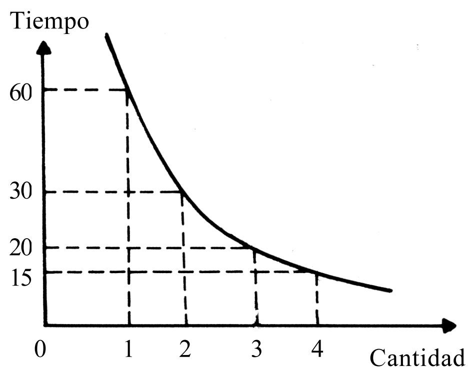



Figura 3.29

En la gráfica se aprecia que a diferencia de lo que sucede en la proporcionalidad directa, los puntos obtenidos *no están todos en una misma recta.*

Puedes concluir que:

- Cuando dos magnitudes están relacionadas de modo que los valores de una de ellas se obtienen multiplicando por un mismo número los recíprocos de los valores correspondientes de la otra, se dice que son **inversamente proporcionales.**
- En una proporcionalidad inversa la razón entre dos cantidades cualesquiera de una magnitud y el recíproco de la razón de sus correspondientes en la otra, forman una **proporción.**
- En una proporcionalidad inversa, el factor de proporcionalidad se halla **multiplicando cualquier cantidad de la segunda magnitud por la cantidad a la cual le corresponde la primera.**
- En una proporcionalidad inversa, los puntos obtenidos al representar cada par de valores correspondientes **no están todos en una misma recta.**


Figura 3.30

*Pitágoras (siglo* VI *a.n.e.) hizo famoso el monocordio (fig. 3.30), instrumento que utilizó para identificar y definir los intervalos musicales, y en la enseñanza de la teoría pitagórica de la relación entre los números y la música; entre otras cosas demostró que la frecuencia del sonido es* inversamente proporcional *a la longitud de la cuerda.*

*La primera referencia escrita sobre el monocordio se atribuye a Boecio (siglo* VI *n.e.); según su relato:*

*Pitágoras, obsesionado por explicar matemáticamente los intervalos, al pasar por una herrería quedó sorprendido por el sonido rítmico del golpe de los martillos en el yunque. Entró, observó y experimentó utilizando cinco martillos.*

*Comprobó que uno, que rompía la escala perfecta de sonidos, tenía un peso sin relación numérica con el resto, por lo que lo eliminó.*

*Con los restantes, obtuvo las siguientes conclusiones: sus pesos estaban en la proporción 12, 9, 8 y 6; el mayor (12), de peso doble del más pequeño (6), producía un sonido (una octava) más bajo que el menor.*

*El peso de los otros dos martillos (9 y 8) correspondía a la media aritmética y armónica respectivamente de los de peso 12 y 6, por lo que dedujo que darían las otras notas fijas de la escala.*

*Ejemplo 1:*

De las tablas 3.24 a 3.26, identifica en cuáles se representa una proporcionalidad inversa y halla de ser posible los valores que faltan.

La tabla 3.24 muestra la correspondencia que se establece entre la longitud del largo y la longitud del ancho, en centímetro, de varios rectángulos de 36 $cm^2$ de área.

Tabla 3.24

| **Largo (cm)** | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|
| **Ancho (cm)** | 36 | 18 | | 4 |

*Solución:*

Para comprobar si es una proporcionalidad inversa, puedes proceder de varias formas:

1. Compruebas si los valores de una de las magnitudes se obtiene multiplicando por un mismo número los recíprocos de los valores correspondientes de la otra.

   $36 = 1 \cdot 36$; $18 = \frac{1}{2} \cdot 36$; se cumple, luego los valores de ambas magnitudes son inversamente proporcionales y el factor de proporcionalidad inversa es 36.

2. Compruebas si los valores de la tabla forman una proporción, para esto comparas la razón entre los valores de una magnitud y el recíproco de la razón de sus valores correspondientes en la otra:

   $\frac{1}{2}$ y $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$; son iguales, luego se cumple.

3. Multiplicas cualquier valor de la segunda magnitud por su correspondiente en la primera y verificas si se obtiene el mismo resultado.

   $1 \cdot 36 = 36$ y $2 \cdot 18 = 36$; se obtiene el mismo resultado.

   Hemos comprobado por tres vías diferentes que la correspondencia es una proporcionalidad inversa y es posible hallar los valores que faltan en la tabla.

   Como el factor de proporcionalidad es 36, multiplicando $36 \cdot \frac{1}{3} = 12$.

   El otro valor lo hallamos dividiendo $\frac{36}{4} = 9$.

   R/ Los valores que faltan en la tabla 3.24 son 12 y 9.

b) La tabla 3.25 muestra la correspondencia que se establece entre la edad de un corredor de 100 m planos y el tiempo que realiza en esa carrera.

Tabla 3.25

| **Edad del atleta** | 15 | 18 | 20 | |
|---|---|---|---|---|
| **Tiempo (segundo)** | 14 | 11 | | 40 |

*Solución:*

Para comprobar si es una proporcionalidad inversa aplicas uno de los procedimientos anteriores.

Multiplicas los valores de la segunda magnitud por sus valores correspondientes de la primera y verificas si se obtiene el mismo resultado.

$15 \cdot 14 = 210$ y $18 \cdot 11 = 198$ (no se obtiene el mismo valor, por lo que dicha correspondencia no es una proporcionalidad inversa).

c) La tabla 3.26 muestra la correspondencia que se establece entre la velocidad de un auto y el tiempo que demora en hacer su recorrido.

Tabla 3.26

| **Velocidad del auto (km/h)** | 15 | | 60 | 90 |
|---|---|---|---|---|
| **Tiempo (h)** | 6 | 2 | | 1 |

*Solución:*

Compruebas si es una proporcionalidad inversa por una de las vías conocidas:

$15 \cdot 6 = 90$ y $90 \cdot 1 = 90$

Se obtiene el mismo valor, por lo que esta correspondencia es una proporción y es posible hallar los valores que faltan en la tabla.

Como el factor de proporcionalidad es **90**, para hallar la velocidad del auto cuando han transcurrido 2 horas, multiplicamos $90 \cdot \frac{1}{2} = 45$ y se coloca en la tabla.

En el otro caso, dividimos **90** : 60 = 1,5 y se coloca en la tabla.

En la vida frecuentemente es necesario resolver problemas donde aparecen magnitudes que se relacionan entre sí mediante una *proporcionalidad inversa.* A continuación te mostramos uno como ejemplo.

*Ejemplo 2:*

Para descargar un contenedor en 4 h son necesarios seis operarios.

a) ¿Cuántos operarios se necesitan para descargarlo en 2 h?
b) ¿Y para descargarlo en 20 min?

*Solución:*

a) Designas por $x$ la cantidad de operarios que se necesitan para descargar el contenedor en 2 h.
Se puede confeccionar la tabla 3.27.

Tabla 3.27

| | | |
|---|---|---|
| **No. de operarios** | 6 | $x$ |
| **Tiempo (hora)** | 4 | 2 |

El problema se puede resolver por varias vías:

**Primera vía:**

Formas una proporción: $\frac{6}{x}=\frac{2}{4}$

Hallas el valor de $x$: $x=\frac{4\cdot 6}{2}=12$

**Segunda vía:**

Hallas el factor de proporcionalidad: multiplicas $4 \cdot 6 = 24$.

Multiplicas el factor hallado por el recíproco del valor conocido: $24\cdot\frac{1}{2}=12$.

**Tercera vía:** (reducción a la unidad)

Buscas cuánto demora un operario: 1 operario $\rightarrow x$ h
4 operarios $\rightarrow$ 6 h

Formas la proporción: $\frac{1}{4}=\frac{6}{x}$

Resuelves: $x = 24$.

Divides 24 por el tiempo necesario, 2 h y se obtiene **12 operarios**.

R/ Para descargar el contenedor en 2 h se necesitan 12 operarios.

*Solución:*

b) 4 operarios → 360 min

$x$ operarios → 20 min

Formas la proporción:

$$\frac{x}{4} = \frac{360}{20}$$

Hallas el valor de la $x$: $x = \dfrac{360 \cdot 4}{20} = 72.$

R/ Se necesitan 72 operarios para descargar el contenedor en 20 min.

## *Ejercicios*

1. Di cuáles de los siguientes pares de magnitudes son inversamente proporcionales:
   a) La velocidad de un auto y el tiempo que tarda en recorrer la distancia entre dos ciudades.
   b) La edad de un atleta y la velocidad a la que corre.
   c) El precio de las naranjas y los kilogramos que puedo comprar con $20,00.
   d) El número de personas que descargan un vagón y el tiempo que demoran en hacerlo.
   e) La cantidad de llaves que se utilizan para llenar un depósito de agua y el tiempo que demoran en hacerlo.
   f) El precio de un libro y la cantidad de páginas que tiene.

2. De las tablas 3.28 a 3.30, di cuál(es) corresponde(n) a una proporcionalidad inversa.

Tabla 3.28

a)

| $x$ | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 12 | 8 | 6 |

Tabla 3.29

b)

| $x$ | 0,1 | 2,5 | 4 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 80 | 3,2 | 2 |

Tabla 3.30

c)

| $x$ | –1 | 1 | –0,5 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 0,5 | –2 | 2 |

3. Los datos representados en las tablas 3.31 y 3.32 corresponden a magnitudes inversamente proporcionales. Halla en cada caso el factor de proporcionalidad y calcula los valores que faltan.

Tabla 3.31

a)

| **Litros de agua que recibe un tanque por minuto** | | 25 | 50 |
|---|---|---|---|
| **Tiempo necesario para llenarse** | 20 | 10 | |

Tabla 3.32

b)

| **Velocidad de un auto** | | 60 | 90 |
|---|---|---|---|
| **Tiempo de demora del viaje (en hora)** | 9 | | 1,5 |

4. Selecciona en cada caso la respuesta correcta marcando con una X.

4.1. Una escuela se reparó por 10 hombres en 6 días. Se necesita pintarla en 4 días laborando al mismo ritmo de trabajo, entonces la cantidad de hombres que se necesita para pintarla es:

a) ___ 2    b) ___ 8    c) ___ 12    d) ___ 15

4.2. Un niño recorre del brazo de su padre cierta distancia. La tabla 3.33 muestra la longitud del paso de cada uno de ellos al caminar y la cantidad de pasos que dio el niño

Tabla 3.33

| | **Longitud del paso** | **Cantidad de pasos** |
|---|---|---|
| **Niño** | 20 cm | 120 |
| **Padre** | 50 cm | |

El dato que faltó en la tabla es:

a) ___ 300    b) ___ 48    c) ___ 480    d) ___ 60

4.3. Una brigada de 9 mecánicos puede realizar la reparación de una planta en 45 h. ¿En qué tiempo pueden realizar este trabajo, al mismo ritmo, con 6 mecánicos más?

a) ___ 27 h    b) ___ 75 h    c) ___ 67,5 h    d) ___ 30 h

5. Un albañil tarda 5 días en levantar una pared de 84 $m^2$. ¿Cuánto tardarán 2 albañiles trabajando al mismo ritmo que el primero?

6. Una brigada de 10 albañiles levanta las paredes de una casa en cuatro días de trabajo, ¿cuántos albañiles más se necesitarán para levantarlas en $2\frac{1}{2}$ días, trabajando al mismo ritmo?

7. Un móvil tarda 3 h para ir de un pueblo a otro si viaja a 60 km/h. ¿Qué tiempo demorará en recorrer esa misma distancia si viaja a una velocidad de 90 km/h?

8. Nueve hombres recogen un campo de piña en 5 días.

   a) ¿Cuántos hombres más se necesitarán para recogerlo en un día, trabajando al mismo ritmo?
   b) ¿Cuántos hombres menos para recogerlo en 15 días?

9. Un tanque puede llenarse en 18 min por una llave que vierte 15 L/min. ¿Cuánto tardará en llenarse por otra llave que vierte 10 L/min?

10. Fui ayer al agro y compré, con los $60,00 que llevaba, 10 aguacates. Al cabo de una semana volví con el mismo dinero y solo pude comprar 6, ya que el precio había subido. ¿En cuánto aumentó el precio de una semana a otra de un aguacate?

11. Confecciona una tabla donde relaciones dos magnitudes inversamente proporcionales con 5 columnas y en las que sea necesario completarlas con un valor de cada magnitud

12. Elabora tres problemas donde utilices magnitudes inversamente proporcionales de las seleccionadas en el ejercicio 1 de este epígrafe.

### 3.4.2 Sistema de coordenadas cartesiano

**¡!** Un explorador se dispone a salir del campamento hacia la cueva que va a investigar. Dispone de un mapa que muestra la ubicación de la cueva y necesita saber a cuántos kilómetros se encuentra para llevar suficientes provisiones (fig. 3.31). ¿Cómo saber la distancia del campamento a la cueva?

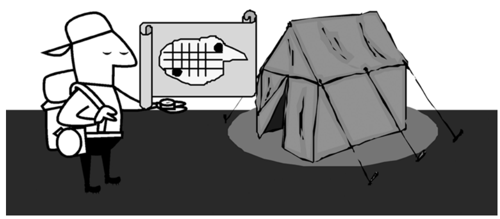


Figura 3.31

La necesidad de orientarse condujo a los seres humanos, desde la antigüedad más lejana, a confeccionar mapas o cartas geográficas y a relacionar los puntos de una superficie mediante números.

Al momento de elaborar una gráfica nuestra primera necesidad es contar con un sistema de referencia que nos permita orientarnos en el espacio. Esta condición no es de reciente data y enfrentarnos a esta nos condujo, como especie, a confeccionar, desde tiempos muy remotos, múltiples *sistemas de referencia.*

Históricamente uno de los sistemas de referencia que con mayor frecuencia empleamos es el *sistema cartesiano,* de Cartesius, nombre latinizado de René Descartes, matemático y filósofo francés del siglo XVII al que se le atribuye su invención, a pesar de que la idea de este sistema fue desarrollada en 1637 de forma paralela e independiente en dos escritos diferentes, uno perteneciente a Descartes y otro atribuido a Pierre de Fermat.

Un amplio número de las gráficas que hoy en día podemos crear son construidas sobre un sistema de coordenadas cartesianas, en una, dos o tres dimensiones.

¡Veamos en qué consiste este maravilloso sistema de referencia!

En grados anteriores aprendiste a asignarle coordenadas a puntos de un plano.

*Ejemplo 1:*

En el sistema de coordenadas de la figura 3.32:

a) Determina las coordenadas de los puntos *A* y *B*.
b) Representa los puntos de coordenadas *M*(2; 4); *N*(7; 1,5) y *P*(–2; – 5).

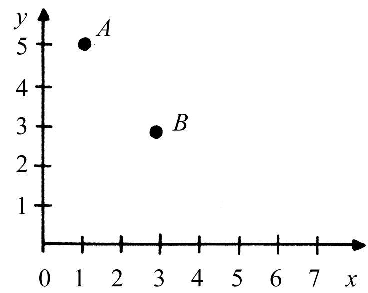


Figura 3.32

*Solución:*

a) Para determinar las coordenadas de un punto del plano debes proceder de la forma siguiente:

- Trazas una perpendicular desde el punto *A* hasta el eje *x*, de esta forma obtienes el valor de la primera coordenada del punto, el 1.
- Trazas una perpendicular desde el punto *A* hasta el eje *y*, de esta forma obtienes el valor de la segunda coordenada del punto, el 5 (fig. 3.33).
- Escribes las coordenadas del punto *A*(1; 5).

Análogamente por el punto *B* trazas perpendiculares a los ejes, como se muestra en la figura, y obtienes las coordenadas del punto *B*(3; 3).

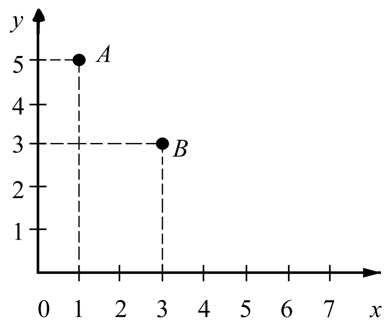


Figura 3.33

b) Para representar el punto (2; 4) procedes de la forma siguiente:

- Trazas una perpendicular, con líneas discontinuas, al eje *x* por 2 (primera coordenada del punto).
- Trazas una perpendicular, con líneas discontinuas, al eje *y* por 4 (segunda coordenada del punto).
- Donde se intersecan las perpendiculares está el punto de coordenadas *M*(2; 4).

De forma análoga procedes con el punto de coordenadas *N*(7; 1,5) (fig. 3.34).

Sin embargo, ¿cómo procedes para representar el punto *P*(–2; –5)? Al igual que en los casos anteriores debes trazar perpendiculares a los ejes por –2 y por –5, que son la primera y la segunda coordenada del punto *P*. Sin embargo estos valores son negativos y no aparecen en la gráfica.

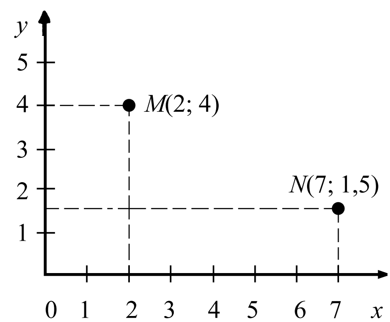


Figura 3.34

De manera general puedes comprender que los puntos cuyas coordenadas sean números negativos no se pueden representar en este cuadrante. Es por ello que dos rayos perpendiculares entre sí no bastan para representar cualquier punto del plano, es necesario ampliar el sistema de coordenadas para introducir los números negativos.

Para esto consideramos dos rectas numéricas perpendiculares entre sí, que reciben el nombre de *ejes cartesianos,* en lugar de dos rayos numéricos (fig. 3.35).

- La recta horizontal es el *eje de las abscisas* y suele representarse con la letra $x$ a la derecha.
- La recta vertical es el *eje de las ordenadas* y suele representarse con la letra $y$ en la parte superior.
- El punto $O$ donde se cortan ambas rectas se llama *origen,* al cual se le asignan las coordenadas (0; 0).

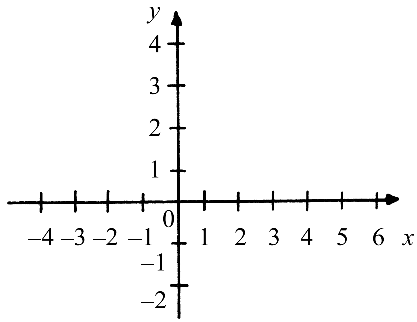


Figura 3.35

- Sobre cada eje, como se muestra en la figura 3.35, colocamos los números reales:

  En el eje $x$, a la derecha del punto $O$ los números positivos y a la izquierda, los negativos. En el eje $y$, hacia arriba del punto $O$ los números positivos y hacia abajo, los negativos.

- Cuando se representa gráficamente un par ($x$; $y$), la primera coordenada se toma sobre el eje de las abscisas y la segunda sobre el eje de las ordenadas.

De esta manera el sistema de coordenadas queda dividido en *cuatro cuadrantes* y cada eje en *dos mitades* (semiejes), con una parte donde aparecen los números positivos (semieje positivo) y otra donde aparecen los números negativos (semieje negativo).

Así quedarán los signos que tendrán las coordenadas de los puntos de cada cuadrante:

I cuadrante: (+; +)
II cuadrante: (–; +)
III cuadrante: (–; –)
IV cuadrante: (+; –)

Ahora es posible asignarle coordenadas a cualquier punto del plano, lo cual se muestra en el ejemplo siguiente.

*Ejemplo 2:*

En el sistema de coordenadas de la figura 3.36:

a) Representa los puntos de coordenadas $A(-1;\ 4)$, $B(-3;\ -1{,}5)$, $C(5; -2)$, $D(0; -1)$ y $E(5; 0)$.

b) Determina las coordenadas de los puntos $T$, $Q$, $R$ y $S$.

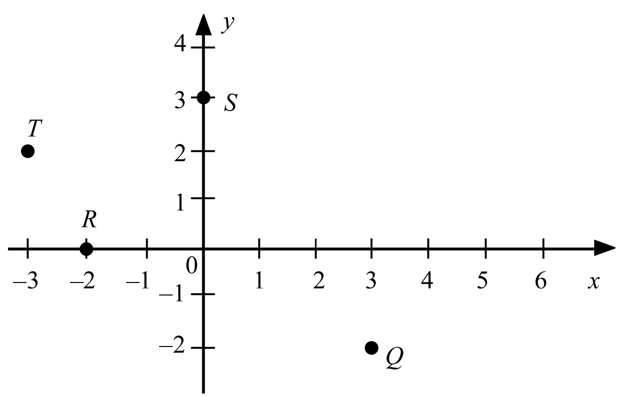


Figura 3.36

*Solución:*

a) Para representar estos puntos se procede análogamente al ejemplo 1, o sea, trazas perpendiculares a cada eje por cada una de las coordenadas del punto que quieres representar. Solo ten presente el **signo** de cada coordenada para trazar la perpendicular al eje por el lugar correcto en el sistema de coordenadas (fig. 3.37).

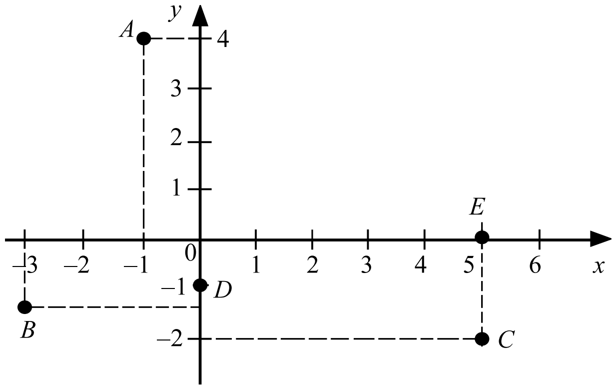



Figura 3.37

En el caso de los puntos *D* y *E*, que tienen una coordenada igual a cero, quedan representados sobre el eje cuya coordenada es distinta de cero. Esto se debe a que una de las rectas perpendiculares trazadas, la que se traza por cero, coincidirá siempre con uno de los ejes de coordenadas.

Observa que:

- Los puntos *A*, *B* y *C* quedan representados sobre uno de los cuadrantes, *A* en el segundo; *B* en el tercero y *C* en el cuarto. Esto se debe a que las coordenadas de cada uno de estos puntos son diferentes de cero.
- Los puntos *D* y *E* quedan representados sobre los ejes. Esto se debe a que una de las coordenadas de dichos puntos tiene valor cero.
- El punto *A* se encuentra a 4 unidades del eje *x* y a 1 unidad del eje *y*; ya que al determinar el punto *A* de coordenadas (–1; 4) se forma un rectángulo de lados 4 u y 1 u. De manera análoga, el punto *B* se encuentra a 1,5 u del eje *x* y a 3 u del eje *y*.
- Los puntos *C* y *E* tiene igual abscisa, por lo que quedan situados sobre la recta vertical que pasa por $x = 5$.

b) Para determinar las coordenadas de los puntos *T* y *Q*, procedes de igual manera que en el ejemplo 1, o sea, trazas desde el punto perpendiculares a los ejes como se muestra en la figura 3.38 y obtienes que *T*(–3; 2) y *Q*(3; –2).

Ten presente que la primera coordenada es la *x* y la segunda, la *y*.

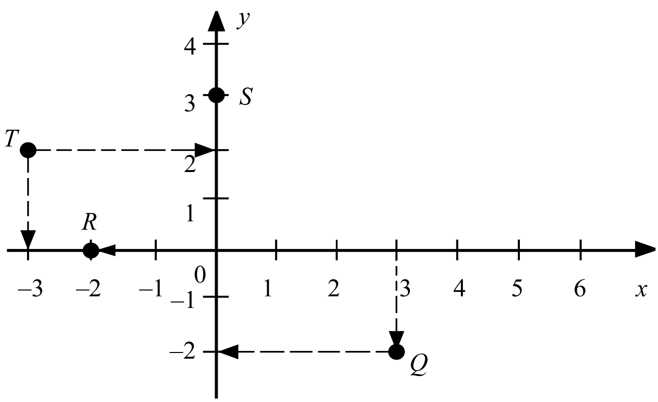



Figura 3.38

Los puntos $R$ y $S$, que se encuentran situados sobre los ejes de coordenadas, tendrán una coordenada igual a cero y la otra toma el valor del número donde queda situado sobre ese eje.

Es por eso que $R(-2; 0)$, ya que está situado sobre el número $-2$ en el eje $x$; mientras el punto $S(0; 3)$, ya que está situado sobre el número 3 en el eje $y$.

A partir del análisis de los resultados de este ejemplo puedes concluir que:

1. Los puntos de la forma $P_1(x; 0)$ están situados sobre el eje $x$, mientras que los puntos de la forma $P_2(0; y)$, están situados sobre el eje $y$.
2. Los valores absolutos de las coordenadas de un punto representan las distancias de este a los ejes de coordenadas.
3. Los puntos de igual abscisa (ordenada) están situados en una recta vertical o paralela al eje y (horizontal o paralela al eje x) y recíprocamente todos los puntos de igual abscisa (ordenada) están contenidos en una recta vertical o perpendicular al eje $x$ (horizontal o perpendicular al eje $y$).

Estas conclusiones nos permiten aplicar estos conocimientos al trabajo con figuras geométricas conocidas como se muestra a continuación.

*Ejemplo 3:*

En el sistema de coordenadas aparecen representados los puntos $A$ y $C$, que son dos de los vértices de un triángulo $ABC$ (fig. 3.39).

a) Representa el vértice $B(6; 0)$ y traza el triángulo $ABC$.

b) Si conoces que $\overline{CD}$ es la mediana relativa al lado $\overline{AB}$, halla las coordenadas del punto $D$.

c) Calcula el área del $\Delta ABC$.

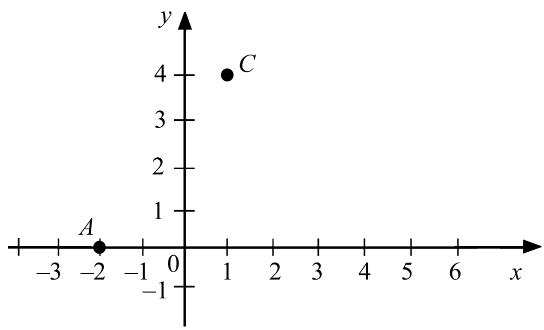



Figura 3.39

*Solución:*

a) El vértice $B$ tiene coordenadas $(x; 0)$ y ya conoces que los puntos que tienen esta forma están situados sobre el eje $x$, luego el vértice $B$ queda situado sobre el 6 en dicho eje (fig. 3.40).

Para trazar el triángulo unimos los puntos $A$, $B$ y $C$.

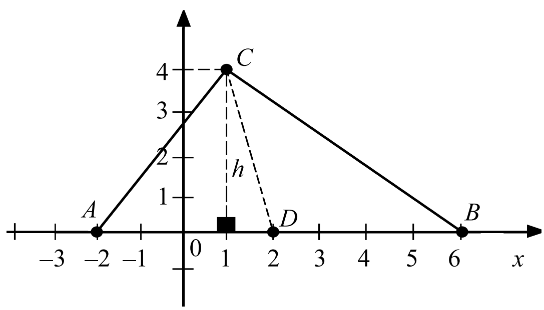



Figura 3.40

b) Las coordenadas del punto $D$ son (2; 0).
Como sabes la mediana es el segmento cuyos extremos son el vértice y el punto medio del lado opuesto, por lo que $D$ debe estar situado a la mitad entre los vértices $A$ y $B$. El número que está a la misma distancia de – 2 y 6 que son las abscisas de $A$ y $B$ es el 2, por lo que la abscisa del punto $D$ es 2. Por otra parte los vértices $A$ y $B$ tienen ordenada igual a cero, ya que se encuentran situados sobre el eje $x$, y como $D$ es un punto de $\overline{AB}$, también su ordenada es cero.

c) Como conoces el área del triángulo se calcula por la ecuación $A = \frac{b \cdot h}{2}$, tomando como base a $\overline{AB}$, su altura relativa es el segmento de perpendicular trazado desde $C$ hasta el lado $\overline{AB}$.
Para hallar la longitud del lado $\overline{AB}$, recuerda que los valores absolutos de las abscisas de $A$ y $B$ representan las distancias de estos puntos al eje $y$ y la suma de ellas nos da la longitud de $\overline{AB}$. Luego, si la distancia de $A$ al eje $y$ es 2 u y la de $B$ es de 6 u, la longitud de $\overline{AB}$ es de 8 u.
Por otra parte como la altura es perpendicular a la base $\overline{AB}$, la distancia de $C$ a la base $\overline{AB}$ que está contenida sobre el eje $x$, coincide con el valor absoluto de la ordenada del vértice $C$, o sea, 4 u.
El área del triángulo es: $A = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16\ \text{u}^2$.

## *Ejercicios*

1. Representa en un sistema de coordenadas rectangulares los puntos cuyas coordenadas se dan a continuación:

a) (1; 3)  b) (5; 2,5)  c) (0,5; 8)  d) (7; 0)  e) $\left(\frac{9}{2}; 0\right)$  f) $\left(\frac{1}{4}; \frac{5}{2}\right)$

g) (0; 0)  h) (0; 3)  i) $\left(0; \frac{4}{5}\right)$  j) (–2; 3)  k) (– 4,2; 5,3)  l) $(-\sqrt{2}; 0)$

m) (–2; – 5)  n) (–1,3; –5,5)  ñ) $\left(0; -\frac{8}{3}\right)$  o) (6; –5)  p) (3,3; –3,3)

q) $\left(7{,}4; -\frac{1}{5}\right)$  r) $\left(\frac{2}{7}; -\frac{3}{5}\right)$

2. Determina las coordenadas de los puntos $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ y $G$ que aparecen representados en la figura 3.41.

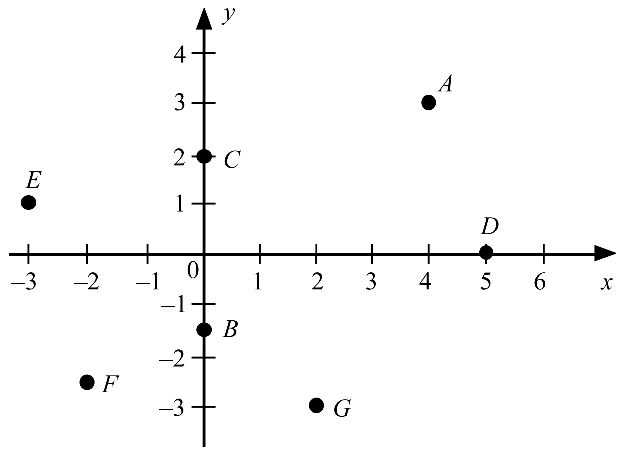



Figura 3.41

3. Determina las coordenadas de los vértices de los polígonos representados en la figura 3.42:

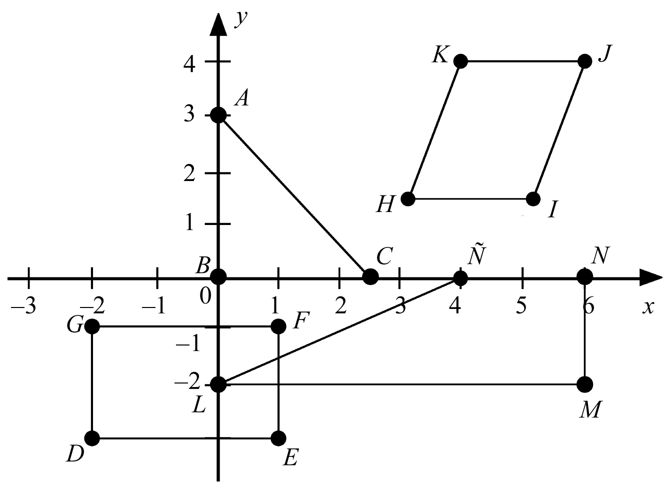



Figura 3.42

a) Clasifícalos y calcula su área.

4. Determina, sin representarlos, en qué cuadrantes se encuentran ubicados los puntos siguientes:

a) $A(-2;\ 5)$ b) $B(2{,}5;\ -2)$ c) $C(-1{,}2;\ -3)$

d) $D\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ e) $E\left(-\dfrac{7}{8};-0{,}6\right)$ f) $F\left(2\dfrac{1}{3};-\dfrac{5}{4}\right)$

5. Traza en un sistema de coordenadas los segmentos que tienen como extremos los puntos:

a) $A(2;\ 5)$ y $B(-2;\ -4)$ b) $C(0;\ 0)$ y $D(3;\ -3)$
c) $E(-4;\ 1)$ y $F(-1;\ 5)$ d) $G(0;\ 3)$ y $H(6;\ 0)$

6. Traza en un sistema de coordenadas rectangulares un segmento:

a) $\overline{AB}$ que tenga 4 u de longitud y sea paralelo al eje $x$.
b) $\overline{CD}$ que tenga 2,5 u de longitud y sea paralelo al eje $y$.
c) $\overline{MN}$ que tenga 1 u de longitud y esté contenido en el eje $x$.
d) $\overline{PQ}$ que tenga 1,2 u de longitud y esté contenido en el eje $y$.

6.1. Escribe en cada caso las coordenadas de los extremos de los segmentos que trazaste.

7. En el sistema de coordenadas de la figura 3.43, aparecen representados los segmentos $\overline{MN}$, paralelo al eje $x$ y $\overline{NP}$, donde $P$ es un punto del eje $x$.

a) Determina las coordenadas de un punto $Q$ para que el cuadrilátero $MNPQ$ sea un paralelogramo, en ese orden.

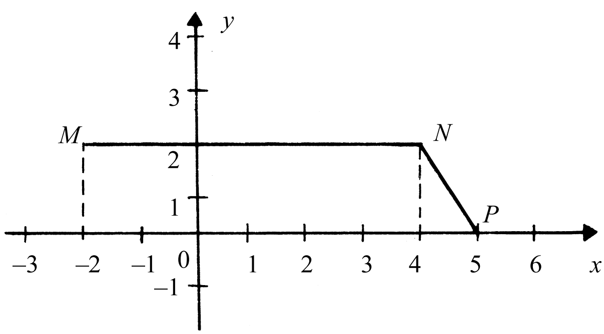



Figura 3.43

b) Ubica el punto $Q$ en la figura y completa el paralelogramo.
c) Calcula el área del paralelogramo.

8. Representa en un sistema de coordenadas el triángulo cuyos vértices son:

   $A(-3; -2)$; $B(1; 4)$ y $C(-5; 0)$. Determina mediante la medición qué tipo de triángulo es atendiendo a la longitud de sus lados.

9. Comprueba gráficamente que los puntos cuyas coordenadas son $(5; -3)$, $(4; -10)$, $(-3; -9)$ y $(-2; -2)$ están situados en una circunferencia con centro en el punto $M(1; -6)$.

10. Representa en un plano coordenado los puntos cuyas coordenadas se indican.

    a) $P(2; 3)$ y $P'$ simétrico de $P$ respecto al eje de las ordenadas.
    b) $R(5; -2)$ y $R'$ simétrico de $R$ respecto al eje de las abscisas.
    c) $M(-4; -1)$ y $M'$ simétrico de $M$ respecto al origen de coordenadas.

11. Traza las rectas que pasan por los puntos:

    a) $A(2; 0)$ y $B(0; 4)$  b) $M(-3; 0)$ y $N(0; 4)$  c) $P(-2; 0)$ y $B(0; -4{,}5)$

11.1. Determina, en cada caso, cuántos puntos de coordenadas enteras se encuentran en el interior del triángulo limitado por la recta trazada y los ejes de coordenadas.

## 3.4.3 Concepto de función

**¡!** En la vida cotidiana, y en los distintos campos de la ciencia, aparecen correspondencias que reflejan las interacciones de los fenómenos que ocurren en el universo.

Por ejemplo, a cada estudiante de un grupo le corresponde un número de lista, a cada madre le corresponde un número determinado de hijos; a cada número real le corresponde su duplo, a cada persona le corresponde un número de carné de identidad y una fecha de nacimiento, el costo de un envío postal varía según el peso de la carta, el costo de un estacionamiento depende del tiempo que está estacionado el vehículo, el aumento de peso de un animal depende de la ración de comida consumida, el número de personas que contraen una enfermedad depende del tiempo transcurrido desde que se detectó la epidemia, la demanda de un producto varía según el precio al que se venda, etcétera.

En el campo de las ciencias, uno de los aspectos más importante de estas es el establecimiento de las correspondencias que existen ente los fenómenos que ocurren en el universo; por ejemplo, los relacionados con crecimientos demográficos; con aspectos económicos, como la inflación o la evolución de los valores bursátiles; con todo tipo de fenómenos físicos, químicos o naturales, como la variación de la presión atmosférica, la velocidad y la aceleración, la gravitación universal, las leyes del movimiento, la desintegración de sustancias radiactivas o la reproducción de especies vegetales y animales.

En los ejemplos antes mencionados existe una relación o correspondencia entre dos conjuntos cuyos elementos pueden ser números u objetos del mundo que nos rodea.

Vamos a analizar las diferentes correspondencias y a reflexionar en cuanto a:

- *Cantidad de conjuntos* que se relacionan.
- *Ley o regla* por la que se establece la relación entre sus elementos.
- *Cantidad de elementos* del conjunto de llegada con los que se **relaciona** cada elemento del conjunto de partida.

En cada uno de los ejemplos nos auxiliaremos de un diagrama que nos ayude al análisis de los tres puntos antes mencionados.

*Ejemplo 1:*

La correspondencia que a cada madre se le hacen corresponder sus hijos.

Como la cantidad de elementos del conjunto madres y la del conjunto hijos son *infinitos,* hacemos un diagrama solo con algunos elementos que nos muestre el comportamiento de esta relación (fig. 3.44).

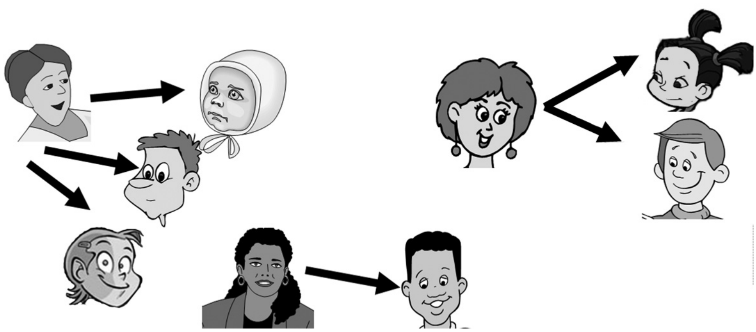


Figura 3.44

La correspondencia que se expresa *literalmente* relaciona *dos conjuntos.*

Conjunto de partida: El conjunto de todas las madres.

Conjunto de llegada: El conjunto de todos los hijos.

Regla o ley: A cada madre se le hace corresponder sus hijos.

Relación entre los elementos: Una madre puede tener uno o varios hijos, luego, cada elemento del conjunto de partida se relaciona con **uno o más** elementos del conjunto de llegada.

*Ejemplo 2:*

La correspondencia que a cada hijo se le hace corresponder su madre.

Aquí también la cantidad de elementos de cada conjunto es **amplia**, hacemos un diagrama solo con algunos elementos que nos muestre el comportamiento de esta relación (fig. 3.45).

La correspondencia se expresa literalmente y relacionan dos conjuntos.

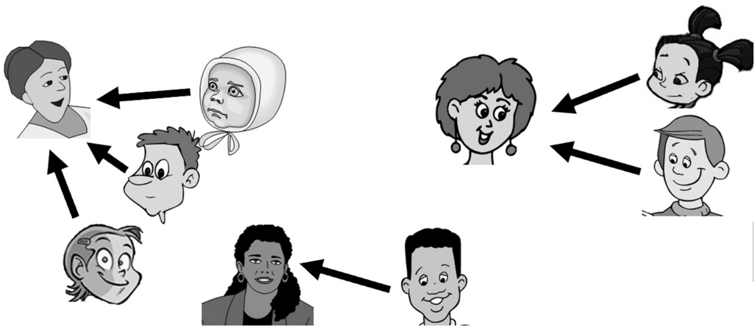


Figura 3.45

Conjunto de partida: El conjunto de todos los hijos.

Conjunto de llegada: El conjunto de todas las madres.

Regla o ley: A cada hijo se le asocia su madre.

Relación entre los elementos: Un hijo tiene una madre, luego, cada elemento del conjunto de partida se relaciona con *un único* elemento del conjunto de llegada.

### *Ejemplo 3:*

La correspondencia de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que a cada número real le asocia su duplo.

La cantidad de elementos de cada conjunto es *infinita,* ya que corresponden al conjunto de los números reales, por lo que hacemos un diagrama con algunos elementos (fig. 3.46).

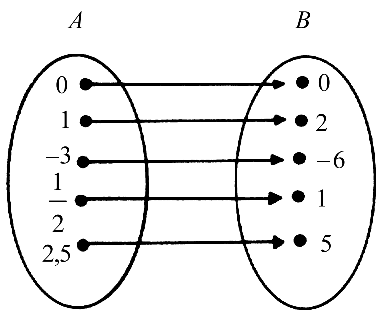



Figura 3.46

Se relacionan *dos conjuntos.*

Conjunto de partida: El conjunto de los números reales.

Conjunto de llegada: El conjunto de los números reales.

Regla o ley: Cada número real se multiplica por dos.

Relación entre los elementos: Todo número real tiene duplo y es único, luego en esta correspondencia cada elemento del conjunto de partida se relaciona con *un único* elemento del conjunto de llegada.

*Ejemplo 4:*

La correspondencia que a cada elemento del conjunto $A$ = {Sodio, Oxígeno, Nitrógeno, Cobre} asocia su símbolo químico en $B$ = {O, Na, N, Cu} (fig. 3.47).

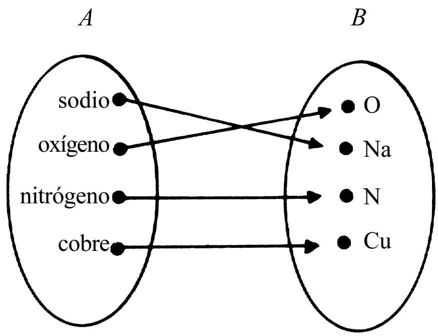



Figura 3.47

En este ejemplo la cantidad de elementos de cada conjunto es *finito,* pues existen cuatro elementos en cada conjunto.

Podemos ver que se relacionan *dos conjuntos* mediante el *diagrama.*

Conjunto de partida: El conjunto de elementos químicos.

Conjunto de llegada: El conjunto formado por sus símbolos.

Regla o ley: A cada elemento se le asocia su símbolo químico.

Relación entre los elementos: A cada elemento químico corresponde un único símbolo, luego en este caso, cada elemento del conjunto de partida se relaciona con *un único* elemento del conjunto de llegada.

*Ejemplo 5:*

La correspondencia que a cada elemento del conjunto

$A$ = {Mario Benedetti, Juan Ramón Jiménez, Nicolás Guillén} asocia su obra literaria del conjunto $B$ = *{¡Oh triste coche viejo!, Esa boca, El piano, Platero y yo, Nieve, Presidio modelo}.*

Realizamos un diagrama (fig. 3.48) con dos columnas $A$ y $B$ y hacemos el enlace.

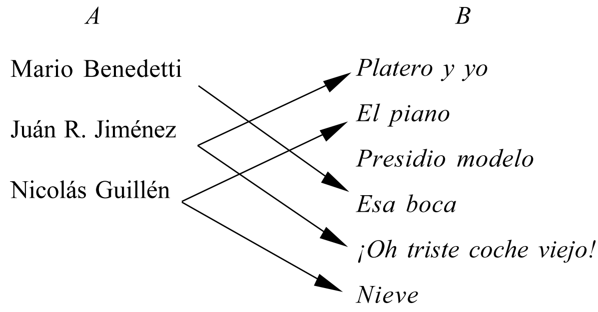



Figura 3.48

En este ejemplo el conjunto $A$ está formado por tres elementos, o sea, es un conjunto *finito,* al igual que el de llegada, formado por seis elementos.

La correspondencia se expresa mediante *dos columnas* que relacionan *dos conjuntos.*

Conjunto de partida: El conjunto formado por los autores.

Conjunto de llegada: El conjunto formado por sus obras.

Regla o ley: A cada autor asocia su obra.

Relación entre los elementos: Cada elemento del conjunto de partida se relaciona con uno o dos elementos del conjunto de llegada.

*Ejemplo 6:*

Las bacterias se reproducen por bipartición. Al colocar una bacteria en un recipiente y observar este proceso durante 4 min, se pudo confeccionar la tabla 3.34.

Tabla 3.34

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Tiempo** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| **Cantidad de bacterias** | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 |

La correspondencia de la tabla la expresamos por medio del diagrama de la figura 3.49.

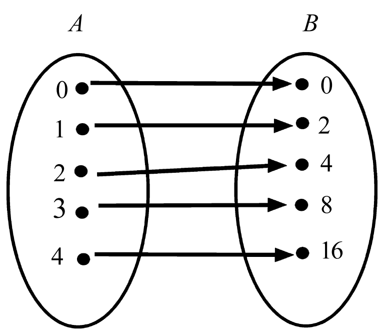



Figura 3.49

Observa que se relacionan elementos de dos *conjuntos.*

Conjunto de partida: El conjunto formado por los valores del tiempo transcurrido.

Conjunto de llegada: El conjunto formado por el número de bacterias.

Regla o ley: A cada valor de tiempo se le hace corresponder el número de bacterias en el recipiente.

Relación entre los elementos: Cada minuto que transcurre, en el recipiente aparece un número de bacterias, luego a cada elemento del conjunto de partida (tiempo) se asocia un único elemento del conjunto de llegada (número de bacterias).

*Ejemplo 7:*

La gráfica (fig. 3.50) muestra la distancia recorrida por un auto que se mueve con movimiento rectilíneo uniforme (MRU), en metro, en función del tiempo transcurrido, en segundo.

La correspondencia se expresa mediante una *gráfica* en la que aparecen relacionadas dos magnitudes, tiempo y distancia recorrida.

Veamos el diagrama (fig. 3.51).

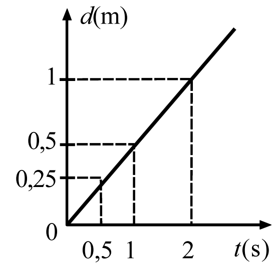



Figura 3.50

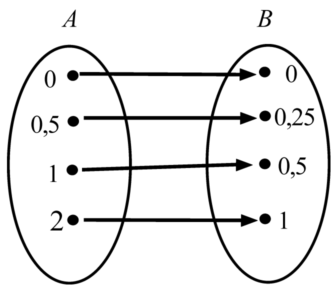



Figura 3.51

Conjunto de partida: El conjunto formado por el tiempo transcurrido ($t$).

Conjunto de llegada: El conjunto formado por la distancia recorrida ($d$).

Regla o ley: A cada segundo transcurrido se le hace corresponder la cantidad de metros recorridos por el auto.

Relación entre los elementos: Cada elemento del conjunto de partida se relaciona con un único elemento del conjunto de llegada, ya que a diferentes valores de tiempo corresponden valores diferentes de metros recorridos.

A partir del análisis de estos ejemplos de correspondencias puedes encontrar las siguientes semejanzas y diferencias:

*Semejanzas:*

Como puedes apreciar, en cada ejemplo:

- Se relacionan *dos conjuntos,* el de partida y el de llegada.
- Existe una *regla* o *ley* mediante la cual se enlazan los elementos del conjunto de partida con los elementos del conjunto de llegada.

*Diferencias:*

Los elementos del conjunto de partida se enlazan con:

- Un único elemento del conjunto de llegada, como en los ejemplos 2, 3, 4, 6 y 7.
- Uno o más elementos del conjunto de llegada, como en los ejemplos 1 y 5.

¿Fue posible hacer corresponder, en cada ejemplo, a cada elemento del conjunto de partida un único elemento en el conjunto de llegada?

La respuesta es evidente, **no.** En las correspondencias, de manera general, los elementos del conjunto de partida se relacionan con uno o más elementos del conjunto de llegada, incluso puede que algún elemento del conjunto de partida no se asocie a alguno del otro conjunto.

Las correspondencias cuyos elementos se enlazan como los de los ejemplos 2, 3, 4, 6 y 7, nos permiten definir uno de los conceptos más importantes de la Matemática, el concepto de *función.*

*Definición:*

Una función es una correspondencia que **a cada** elemento de un conjunto $A$ asocia **un único** elemento de un conjunto $B$.

De acuerdo con esta definición puedes concluir que las correspondencias representadas en los incisos 2, 3, 4, 6 y 7 son funciones; mientras las de los incisos 1 y 5, no lo son.

El conjunto $A$ se denomina *dominio* de la función y a sus elementos se les llama *argumentos* o *preimágenes,* los cuales se denotan generalmente utilizando la variable $x$ (fig. 3.52).

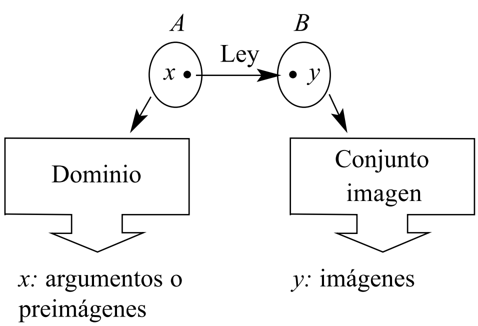



Figura 3.52

A los elementos del conjunto *B* que son correspondientes de algún elemento de *A* se les llaman *imágenes,* y el conjunto de ellos se denomina *conjunto imagen* de la función. Las imágenes suelen denotarse por la variable *y*.

En el ejemplo 1, el dominio es el conjunto formado por todas las madres y el conjunto imagen es el formado por los elementos hijos.

En el caso del ejemplo 3, tanto el dominio como el conjunto imagen son los números reales.

En el ejemplo 5, el dominio está formado por los tres autores, pero la imagen son solo las obras relacionadas con su autor; por lo que la obra *Presidio Modelo* que no se enlaza con ninguno de los autores del conjunto dominio, no se incluye en el conjunto imagen.

*Las funciones son de mucho valor y utilidad para resolver problemas de la vida diaria, problemas de finanzas, de economía, de estadística, de ingeniería, de medicina, de química y física, de astronomía, de geología y de cualquier área social donde haya que relacionar variables. Cuando se va al mercado o a cualquier centro comercial, siempre se relaciona un conjunto de determinados objetos o productos alimenticios, con el costo en pesos para así saber cuánto podemos comprar; si lo llevamos al plano, podemos escribir esta correspondencia en una ecuación de función* x *como el precio y la cantidad de producto como* y.

*El concepto de función o simplemente función, es sin duda, el más importante y utilizado en matemática y en las demás ramas de la ciencia.*

*Este concepto está implícito en las matemáticas de las primeras civilizaciones y ello puede inferirse del estudio de las tablillas de barro babilónicas de la colección Plimpton, que datan del año 1900 a.n.e.*

*No fue fácil llegar a él y muchas mentes muy brillantes han dedicado enormes esfuerzos durante siglos para que tuviera una definición consistente y precisa.*

Figura 3.53

*Desde los tiempos de Galileo, que fue uno de los primeros en usarlo (aunque no en la forma que nosotros lo conocemos actualmente), pasando por el gran Newton y Leibniz (fig. 3.53), que fue el primero que en 1673 usó la palabra función para referirse a la relación de dependencia de dos variables o cantidades, Euler, que le dio su formulación moderna* y = f(x) *en su obra* Commentarii de San Petersburgo *en 1736, Cauchy, Dirichlet o Gauss, las mejores mentes de la historia de la humanidad le dedicaron su atención y sus desvelos.*

*Ejemplo 8:*

Analiza cuáles de las siguientes correspondencias son funciones y cuáles no. Fundamenta tu respuesta. En el caso de ser función señala el dominio y la imagen.

a) A cada elemento del conjunto $P$ = {España, Venezuela, Bolivia, Rusia, China, Portugal} asocia su capital $C$ = {Caracas, Moscú, Beijing, Tokio, La Paz, Lisboa, Madrid, Quito}.

*Solución:*

Realizamos el análisis a partir de un diagrama con dos columnas (fig. 3.54).

La correspondencia *es una función,* pues cada país del conjunto $P$ se pudo enlazar con su capital en $C$ y de forma única.

Nota que Tokio se quedó sin enlace, pero como ya conoces, no es necesario que todos los elementos en el conjunto de llegada estén relacionados con algún elemento del conjunto de partida. Este elemento *no formará parte del conjunto imagen* de la función.

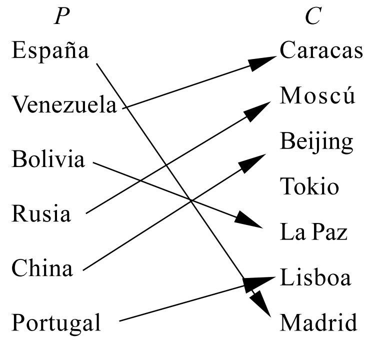



Figura 3.54

Así que el dominio es el conjunto formado por los países del conjunto de partida $P$ y la imagen el conjunto formado por sus capitales, exceptuando a Tokio.

b) La correspondencia definida de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que a cada número natural asocia su antecesor.

*Solución:*

Como el conjunto de los números naturales es infinito, confeccionamos el diagrama solo para algunos elementos (fig. 3.55).

Esta correspondencia *no es una función,* ya que se establece de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ y el antecesor de cero es –1, *que no es un número natural;* por lo que no aparece en el conjunto de llegada.

¿Qué pasaría si esta correspondencia se estableciera de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$? ¿Sería una función?

Reflexiona sobre esto y saca conclusiones.

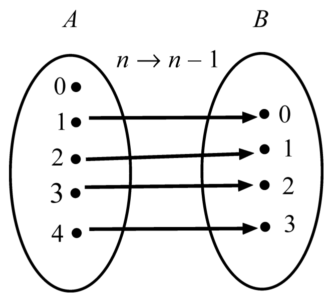



Figura 3.55

c) La correspondencia que a cada personalidad del conjunto $P$ = {Fidel Castro, José Martí, Antonio Maceo, Frank País, José A. Echevarría} asocia el hecho histórico en que participó en $H$ = {Protesta de Baraguá, Asalto al Cuartel Moncada, Alzamiento en Santiago de Cuba, Triunfo de la Revolución, Alegato La Historia me Absolverá, Asalto al Palacio Presidencial, Fundación del PRC}.

*Solución:*

Observa el diagrama de la figura 3.56 con el enlace de los elementos de cada columna.

Esta correspondencia *no es una función,* ya que Fidel está relacionado con tres elementos del conjunto de llegada, por lo que no satisface una de las características del concepto de función.

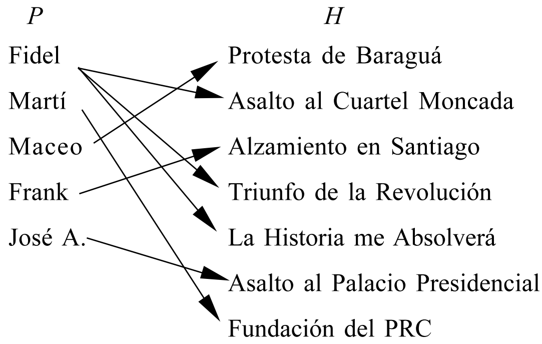



Figura 3.56

d) La correspondencia definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que a cada número real asocia su valor absoluto.

*Solución:*

Como el conjunto de los números reales es infinito, confeccionamos el diagrama solo para algunos elementos (fig. 3.57).

Esta correspondencia *es una función,* ya que a cada número real corresponde un único valor absoluto o módulo.

Observa que a 1 y a –1 les corresponde un único elemento en el conjunto $B$, aunque es el mismo para ambos.

En este caso el dominio y la imagen de la función es el conjunto de los números reales.

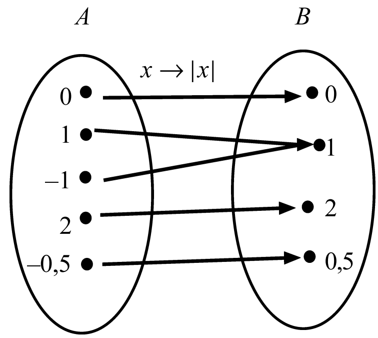



Figura 3.57

Precisamente a las funciones cuyo dominio e imagen son *conjuntos numéricos,* se les llama *funciones numéricas;* y las estudiarás con mayor profundidad en este tema.

Para denotar funciones generalmente se emplea la letra $f$, pero cualquier otra, como $g$, $h$, etc. son igualmente válidas.

Luego para indicar que entre dos conjuntos hay una función, escribimos $f: A \rightarrow B$ que se lee: f *es una función de* A *en* B.

Para designar una expresión cuyo valor depende de la variable $x$, no solo se emplea la letra $y$; también es frecuente utilizar el símbolo $f(x)$, que se lee "efe de equis". Luego si $x$ es un elemento del dominio de una función $f$, su imagen puede denotarse por $f(x)$, lo que podemos representar así: $y = f(x)$.

Además, si es posible expresar formalmente la relación existente entre los elementos de los conjuntos $A$ y $B$, podemos representar la función mediante una fórmula.

Por ejemplo, en la correspondencia representada en el inciso c, que a cada número real asocia su duplo, donde los conjuntos $A$ y $B$ son numéricos, la función entre ellos puede expresarse indistintamente por:

$y = 2x$ o $f(x) = 2x$

Precisamente estas dos últimas relaciones te muestran otra de las formas de representar las funciones numéricas, las ecuaciones.

Por ejemplo: $f(x) = x + 5$; $g(x) = x^2$; $h(x) = \frac{1}{x}$, son ecuaciones de funciones.

Esta notación es útil cuando, por ejemplo, se quiere calcular la imagen de cualquier valor del dominio.

Por ejemplo, para hallar la imagen de 2 por la función $f(x) = 2x$:

- sustituimos en la ecuación la $x$ por 2,
- y obtenemos el valor numérico que es la imagen buscada.

O sea, $f(2) = 2 \cdot 2 = 4$ y se escribe $f(2) = 4$; que se lee "$f$ de dos es igual a cuatro".

Podemos imaginar que una función es como una máquina que toma una alimentación (entrada) $x$ y la trasforma o convierte en alguna de salida $f(x)$, como se muestra en la figura 3.58.

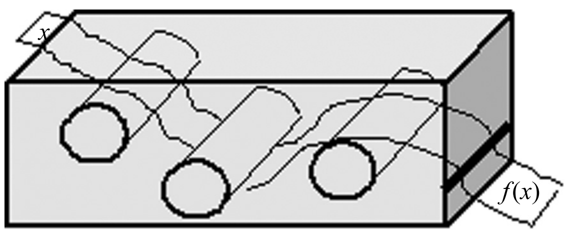



Figura 3.58

Así, por ejemplo, la máquina siguiente convierte el número 4 de entrada en el número 5 de salida a partir de la función que a cada número real asocia su duplo disminuido en tres (fig. 3.59).

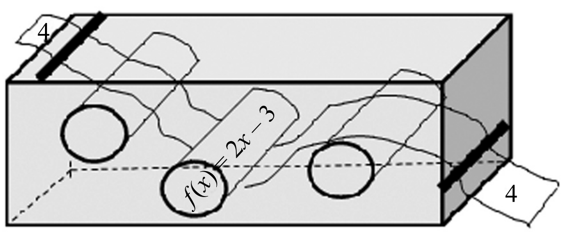



Figura 3.59

También esa notación nos permite realizar el procedimiento inverso, o sea, hallar el argumento o preimagen de un valor del dominio conocida la imagen que le corresponde. Para ello se debe:

- igualar la función a este valor,
- y despejar el valor de $x$ en la igualdad planteada.

O sea, para hallar el valor de $x$ al cual le corresponde la imagen $\frac{1}{2}$ por la función $f(x) = 2x$, se procede así: $\frac{1}{2} = 2x$ y $x = \frac{1}{2} : 2$, de donde $x = \frac{1}{4}$.

*Ejemplo 9:*

Dada la función $f$ representada por su ecuación $f(x) = 2x - 1$, con $x \in \mathbb{R}$:

a) Halla la imagen de $-2$; $-\frac{1}{2}$; 0; 2,4 y 5.

b) Halla el valor del dominio cuya imagen es $-2{,}2$; $-1$; 0; $\frac{2}{3}$; 9.

*Solución:*

a) Como ya sabes, en una función a cada valor del dominio le corresponde un único valor de imagen, luego aquí se trata de hallar el valor de la imagen, o sea, la $y$, conocido el valor del dominio, la $x$.

| | |
|---|---|
| $f(-2) = 2 \cdot (-2) - 1$ | sustituyendo la $x$ por $-2$ |
| $= -4 - 1$ | efectuando el producto |
| $= -5$ | efectuando la adición |

Luego al elemento $-2 \in A$ le corresponde el elemento $-5 \in B$, por lo que $f(-2) = -5$. Puedes concluir que la imagen de $-2$ por la función $f$ es $-5$, o sea, $y = -5$ si $x = -2$.

| | |
|---|---|
| $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1$ | sustituyendo la $x$ por $-\frac{1}{2}$ |
| $= -1 - 1$ | efectuando el producto |
| $= -2$ | efectuando la adición |

Luego al elemento $-\frac{1}{2} \in A$ le corresponde el elemento $-2 \in B$, por lo que $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$, o sea, $y = -2$ si $x = -\frac{1}{2}$.

| | |
|---|---|
| $f(0) = 2 \cdot 0 - 1$ | sustituyendo la $x$ por 0 |
| $= 0 - 1$ | efectuando el producto |
| $= -1$ | efectuando la sustracción |

Luego al elemento $0 \in A$ le corresponde el elemento $-1 \in B$, por lo que $f(0) = -1$, o sea, $y = -1$ si $x = 0$.

$f(2{,}4) = 2 \cdot 2{,}4 - 1$ sustituyendo la $x$ por 2,4
$= 4{,}8 - 1$ efectuando el producto
$= 3{,}8$ efectuando la sustracción

Luego al elemento $2{,}4 \in A$ le corresponde el elemento $3{,}8 \in B$, por lo que $f(2{,}4) = 3{,}8$, o sea, $y = 3{,}8$ si $x = 2{,}4$.

$f(5) = 2 \cdot 5 - 1$ sustituyendo la $x$ por 5
$= 10 - 1$ efectuando el producto
$= 9$ efectuando la sustracción

Luego al elemento $5 \in A$ le corresponde el elemento $9 \in B$, por lo que $f(5) = 9$, o sea, $y = 9$ si $x = 5$.

b) Para hallar el argumento que le corresponde un valor de la imagen se debe igualar la función a este valor y encontrar el valor de $x$ que satisface la ecuación.

Como tenemos que $f(x) = 2x - 1$ y conocemos que $y = f(x)$, obtenemos la ecuación equivalente $y = 2x - 1$. Ahora en el valor de $y$ colocamos los valores dados.

$-2{,}2 = 2x - 1$ igualamos la ecuación a $-2{,}2$
$-2{,}2 + 1 = 2x$ transponemos $-1$ al miembro izquierdo
$-1{,}2 = 2x$ se efectúa la sustracción
$x = -\dfrac{1{,}2}{2}$ despejando $x$
$x = -0{,}6$ efectuando el cociente indicado

Luego la imagen $-2{,}2$ de la función se obtiene cuando $x$ toma valor $-0{,}6$.

Este resultado puedes comprobarlo sustituyendo la $x$ hallada en la ecuación y efectuando el miembro derecho.

$-1 = 2x - 1$ igualamos la ecuación a $-1$
$-1 + 1 = 2x$ transponemos $-1$ al miembro izquierdo
$0 = 2x$ se efectúa la sustracción
$x = \dfrac{0}{2}$ despejando $x$
$x = 0$ efectuando el cociente indicado

Luego la imagen $-1$ de la función se obtiene cuando $x$ toma valor 0.

$0 = 2x - 1$ igualamos la ecuación a 0
$0 + 1 = 2x$ transponemos $-1$ al miembro izquierdo
$1 = 2x$ se efectúa la adición
$x = \dfrac{1}{2}$ despejando $x$

Luego la imagen 0 de la función se obtiene cuando $x$ toma valor $\frac{1}{2}$.

$\frac{2}{3} = 2x - 1$ igualamos la ecuación a $\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3} + 1 = 2x$ transponemos –1 al miembro izquierdo

$\frac{5}{3} = 2x$ se efectúa la adición

$x = \frac{5}{3} : 2$ despejando $x$

$x = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2}$ planteando la multiplicación por el recíproco del divisor

$x = \frac{5}{6}$ efectuando el cociente

Luego la imagen $\frac{2}{3}$ de la función se obtiene cuando $x$ toma valor $\frac{5}{6}$.

$9 = 2x - 1$ igualamos la ecuación a 9

$9 + 1 = 2x$ transponemos –1 al miembro izquierdo

$10 = 2x$ se efectúa la adición

$x = \frac{10}{2}$ despejando $x$ y simplificando

$x = 5$ simplificando

Luego la imagen 9 de la función se obtiene cuando $x$ toma valor 5.

Habrás notado al analizar este ejemplo que siempre el valor de la imagen ($y$), en cada inciso, depende del valor que se le asigne a la variable $x$ en la ecuación dada. Cuando dos variables están relacionadas entre sí y el valor de una de ellas depende del valor que tenga la otra, a una se le llama *variable dependiente* y a la otra *variable independiente.*

En las funciones, la variable $x$, que representa los elementos del dominio, será la *variable independiente;* mientras la variable $y$, que representa los elementos del conjunto imagen, es la *dependiente,* por lo que es usual decir que $y$ es una función de $x$ o que $y$ depende de $x$.

Es importante que sepas que, cuando una función se da mediante una ecuación, su dominio será el subconjunto de números reales para el cual está definida la expresión de la variable independiente.

Por ejemplo, para la función $y = 2x$ el dominio es $\mathbb{R}$; al igual que para las funciones $f(x) = x + 5$ y $g(x) = x^2$, ya que la variable $x$ puede tomar cualquier valor real. Sin embargo, para la función $h(x) = \frac{1}{x}$ el dominio es $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$, ya que como conoces el denominador de una fracción no puede ser igual a cero.

## Formas de representar una función

Como pudiste apreciar en cada ejemplo al inicio del epígrafe, los ejemplos de correspondencias se representaron en *forma descriptiva* (ejemplos 1 y 2), mediante *diagramas* (ejemplos 3, 4 y 5), *tablas* (ejemplo 6) y *gráficos* (ejemplo 7). También las funciones se pueden representar de estas mismas maneras

Por ejemplo en el inciso c, la función que a cada número real asocia su duplo se expresaba en *forma descriptiva* y se concluyó que era una función a través de su análisis en un *diagrama.* Luego, a partir de la relación que se establece entre la variable independiente y la variable dependiente, esta función se puede expresar mediante la *ecuación* $y = 2x$.

Pero también se puede representar mediante una tabla y una gráfica como se muestra a continuación.

Construimos la tabla 3.35, donde hallamos la imagen de solo algunos valores de $x$, ya que el dominio son los números reales, que es un conjunto infinito.

Tabla 3.35

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
| $y$ | $-4$ | $-2$ | 0 | 2 | 4 |

El conjunto formado por un elemento del dominio y su imagen, tomados en ese orden, se pueden interpretar como las *coordenadas de un punto del plano,* es decir (–2; – 4); (–1; –2); (0; 0); (1; 2); (2; 4); (3; 6) y (4; 8) representan las coordenadas de puntos del plano y esto es lo que nos permite representar gráficamente esta función en un sistema de coordenadas rectangulares.

Como ya conoces del epígrafe anterior, la ecuación de esta función define una proporcionalidad directa porque todos los valores de $y$ se obtienen multiplicando por 2 (factor de proporcionalidad) los valores correspondientes de la $x$. Por ello todos los puntos que representamos quedan sobre una recta que pasa por el origen de coordenadas (0; 0). Además, como la $x$ puede tomar cualquier valor real la gráfica de esta función es la recta representada en la figura 3.60.

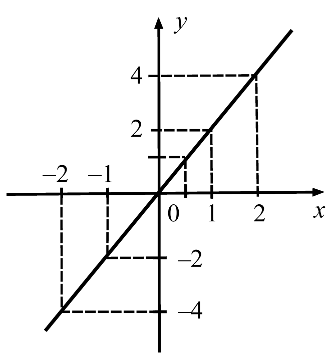


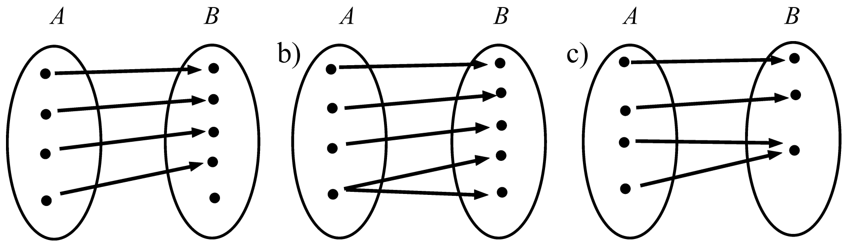

Figura 3.60

De esta manera queda representada también mediante una *gráfica* la función que a cada número real asocia su duplo.

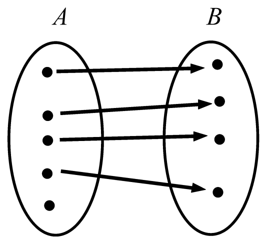
## *Ejercicios*

1. Analiza si las correspondencias representadas en la figura 3.61 son funciones o no. En caso de no serlo, fundamenta tu respuesta.

a) b) c)




d)




e)

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 2 | 2,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 1 | 8 | –8 | 2,5 |

f)

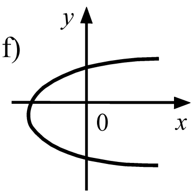



Figura 3.61

*Nota:* Para determinar si una correspondencia es función dada por una gráfica, se traza una paralela imaginaria al eje $y$ y se traslada de izquierda a derecha en el sentido del eje $x$. Si corta a la gráfica siempre una sola vez es función, de lo contrario no lo es.

2. Sea el conjunto $M = \{-4; -2{,}5; -\frac{1}{2}; -1; 0; 1; 1{,}5; 3; 3\frac{1}{2}\}$.

   a) Escribe un conjunto $N$ de llegada, cuyos elementos sean el duplo de los elementos del conjunto $M$, para que la correspondencia de $M$ en $N$ sea una función.
   b) Escribe un conjunto $P$ de llegada, cuyos elementos sean los opuestos de los elementos del conjunto $M$, para que la correspondencia de $M$ en $P$ sea una función.
   c) Escribe un conjunto $A$ de llegada, cuyos elementos sean los valores absolutos de los elementos del conjunto $M$, para que la correspondencia de $M$ en $A$ sea una función.
   d) Escribe un conjunto $B$ de llegada, cuyos elementos sean los cuadrados de los elementos del conjunto $M$, para que la correspondencia de $M$ en $B$ sea una función.

3. En un estadio de béisbol se pueden dar las posibilidades siguientes:

   a) Cada espectador ocupa un asiento, pero hay espectadores de pie.
   b) Cada espectador ocupa un asiento, pero hay asientos vacíos.
   c) Cada espectador ocupa un asiento y no hay asientos vacíos.

Confecciona un diagrama para cada inciso y di cuáles de esas correspondencias son funciones y cuáles no. Argumenta en cada caso tu respuesta.

4. Analiza cuáles de las siguientes correspondencias son funciones y cuáles no. Fundamenta tu respuesta cuando no sea una función.

   a) A cada número real se le asocia su cuadrado aumentado en 3.
   b) A cada hecho histórico del conjunto $A$ = {Triunfo de la Revolución, Asalto al Cuartel Moncada, Protesta de Baraguá, Invasión a Playa Girón, Desembarco del Granma, Incendio de Bayamo} se le asocia el año en que ocurrió en el conjunto $B$ = {1956; 1953 1959; 1961; 1869; 1878; 1887; 1956}
   c) A cada número real le asocia su recíproco.
   d) A cada polígono del conjunto $M$ se le hace corresponder la cantidad de lados en el conjunto $N$ (fig. 3.62).

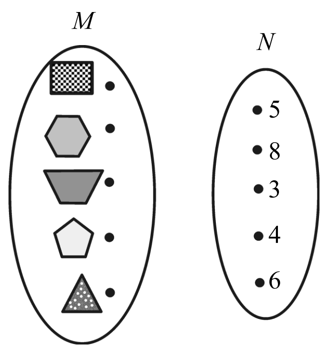



Figura 3.62

   e) A cada persona le asocia su número de carné de identidad.
   f) A cada organismo del conjunto $O$ = {Pie de atleta, Basilo de Koch, León, Tocororo, Cocodrilo} se le hace corresponder el grupo al que pertenecen en el conjunto $G$ = {Aves, Hongos, Bacterias, Mamíferos}.
   g) A cada palabra en idioma Inglés del conjunto $I$ = *{one; red; boy; flag; love; good}* se le hace corresponder su significado en el idioma Español del conjunto $E$ = {rojo; bandera; amor; bueno; uno; niña; hijo}.
   h) A cada río del conjunto $R$ = {Cauto; Volga; Amazonas; Nilo; Amarillo} se le asocia el lugar donde se encuentra situado en el conjunto $L$ = {África; Suramérica; América; Asia; Europa; Oceanía}

4.1. En los incisos que representan funciones señala el dominio y la imagen.

5. Sea el conjunto $P$ = *{El señor de los anillos, Fresa y chocolate, El ojo del canario, Casablanca, Corazón valiente},* escribe un conjunto de llegada $A$, cuyos elementos sean nombres de actores de esas películas, para que la correspondencia película-actor sea una función.

6. Sea el conjunto $C$ formado por los continentes $C$ = {América; África; Eurasia; Oceanía; Antártida}, escribe un conjunto $P$ formado por varios países para que la correspondencia continente-país:

   a) sea una función,
   b) no sea una función.

7. Sea el conjunto $E$ = {Ernest Hemingway; Pablo Neruda; José Martí; Miguel de Cervantes; Carilda Oliver; Dulce María Loynaz; Gabriel García Márquez}.

   a) Escribe un conjunto de llegada $P$, cuyos elementos sean el país de origen de cada autor, para que dicha correspondencia represente una función.
   b) Escribe un conjunto de llegada $O$, cuyos elementos sean obras literarias escritas por esos autores, para que dicha correspondencia no sea una función.

8. En el diagrama de la figura 3.63 se muestra una correspondencia entre los elementos de los conjuntos $M$ y $N$.

   a) ¿Representa esta correspondencia una función?
   b) ¿Cuál es el valor de $y$ en el conjunto $N$?
   c) Descubre la ley de formación de la correspondencia y exprésala algebraicamente.

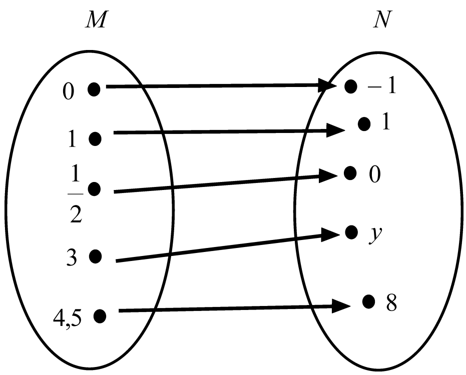



Figura 3.63

9. Sean las funciones $f$, $g$ y $h$ dadas por sus ecuaciones: $f(x) = 4x + 3$;

   $g(x) = -\frac{1}{2}x - 1$ y $h(x) = x^2$. Calcula:

   a) La imagen de –2; 1,5 y 5 por la función $f$.
   b) La imagen de –2; 1,5 y 5 por la función $g$.
   c) La imagen de –2; 1,5 y 5 por la función $h$.

10. Sean las funciones $f$, $g$ y $h$ dadas por sus ecuaciones:

    $f(x) = x - 3$; $g(x) = -2x + 5$ y $h(x) = \frac{x}{3} + 1$. Calcula el valor del dominio para el cual se cumple que:

a) $f(x) = -2$; $f(x) = \frac{9}{8}$ y $f(x) = 0$.

b) $g(x) = -2$; $g(x) = \frac{9}{8}$ y $g(x) = 0$.

c) $h(x) = -2$; $h(x) = \frac{9}{8}$ y $h(x) = 0$.

11. Sean las funciones $f$ y $g$ dadas por sus ecuaciones $f(x) = \frac{x}{4} - 2$ y $g(x) = 3 - 2x$. Calcula:

a) $f(4) + 2g(0)$ b) $\frac{g(-1)+f(0)}{9}$ c) $\frac{f\left(-\frac{1}{2}\right)}{g(-0,2)}$

12. Sea $f(x) = x - 3$, halla el valor de $a$ para el cual se cumple que:

a) $f(a) + f(a + 1) = 2$ b) $f(a - 3) - 3f(a) = -1$ c) $2f(a - 2) + 1 = f(5)$

## 3.4.4 Función lineal

**¡!** La gráfica de la figura 3.64 muestra cómo varía la altura de una vela, al ser encendida, durante varios minutos a partir de las 10:00 p.m.

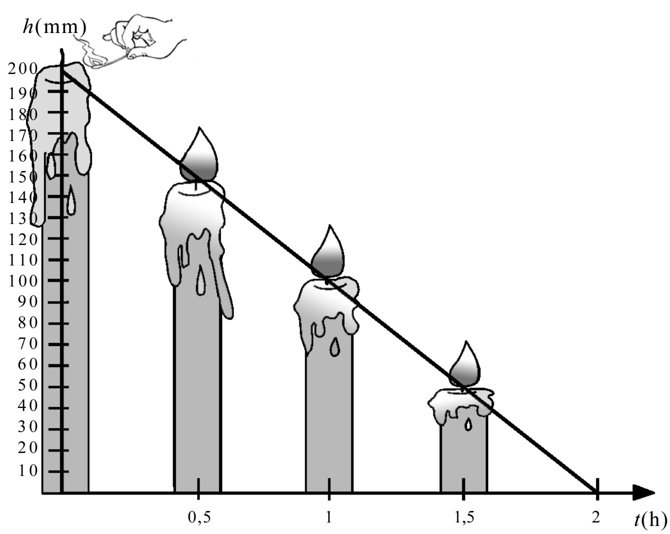



Figura 3.64

a) ¿Cuál era la longitud de la vela al ser encendida?
b) ¿Cuál es la ecuación que describe la variación de la longitud de la vela?

c) ¿A los cuántos minutos la longitud de la vela era de 120 mm?
d) ¿A qué hora se gastó completamente la vela?

Ya conoces el concepto de función y que las funciones cuyos dominio e imagen son conjuntos numéricos se denominan funciones numéricas.

Es por eso que puedes reconocer que en la gráfica se muestra una correspondencia entre las magnitudes *tiempo,* en hora, y la *longitud,* en milímetro, de la vela. Esta correspondencia es una *función numérica.*

Para dar respuesta a las preguntas anteriores debes conocer varios aspectos relacionados con esta función numérica, como son su ecuación, su gráfica y sus propiedades.

A partir de este grado comenzarás el estudio de estas funciones y para ello te propongo analizar los ejemplos siguientes:

*Ejemplo 1:*

La profesora pidió a Leticia escribir cuatro números reales en la pizarra. Luego pidió a Maykel que escribiera al lado de cada uno, el número que resulta de multiplicar por 2 el número escrito por Leticia y adicionarle a continuación, 5.

Leticia escribió los números 4; ; –1 y 0. ¿Qué número escribirá Maykel en cada caso?

Como podrás comprobar Maykel debe escribir los números 13; 6; 3 y 5, ya que:

$2 \cdot 4 + 5 = 13 \qquad 2 \cdot \frac{1}{2} + 5 = 6 \qquad 2 \cdot (-1) + 5 = 3 \qquad 2 \cdot 0 + 5 = 5$

De manera general, podemos decir que si Leticia escribe un número real $x$, Maykel escribirá el número $(2x + 5)$.

Si llamas $f$ a la función que asigna a cada número escrito por Leticia, el correspondiente escrito por Maykel, puedes representarla mediante la ecuación $f(x) = 2x + 5$.

*Ejemplo 2:*

Un tanque contiene 50 L de agua. Para llenarlo se pone a funcionar una bomba de agua que vierte 20 L/min. ¿Qué cantidad de agua tendrá el tanque a los 5 min de encender la bomba? ¿Y a los 10 min?

En este caso ya el tanque contenía 50 L de agua y cada minuto que pasa irá aumentando esa cantidad. Como la bomba vierte 20 L/min, para hallar la cantidad de agua a los 5 min, debes multiplicar 20 por 5 y adicionar 50 a dicho resultado, o sea, $20 \cdot 5 + 50 = 150$ L.

Para los 10 min, serían $20 \cdot 10 + 50 = 250$ L.

De manera general, puedes decir que cuando hallan transcurrido $x$ minutos, el tanque tendrá $(20 \cdot x + 50)$ L de agua.

Si llamas $g$ a la función que asigna a cada minuto transcurrido, la cantidad de agua en el tanque, puedes representarla mediante la ecuación $g(x) = 20x + 50$.

*Ejemplo 3:*

Un kilogramo de arroz cuesta \$3,50. ¿Cuánto debe pagar Rosa por 7 kg? ¿Y si compra 15 kg?

Para calcular lo que debe pagar Rosa por 7 y 15 kg respectivamente, debes multiplicar cada cantidad por el precio de un kilogramo, o sea, por \$3,50.

Por ello se obtiene que: \$3,50 · 7 = \$24,50 y \$3,50 · 15 = \$52,50.

De manera general, puedes comprobar que para comprar $x$ kilogramos de arroz, Rosa tendrá que pagar $(3{,}50 \cdot x)$ pesos.

Si llamas $h$ a la función que asigna a cada kilogramo de arroz comprado, la cantidad de dinero que se debe pagar, puedes representarla mediante la ecuación $h(x) = 3{,}5x$.

Como puedes apreciar en cada inciso, las correspondencias analizadas son funciones y se pueden expresar mediante una ecuación, en la que la imagen se obtiene como el producto de $x$ por un número real, y en los dos primeros casos adicionando, además, un número real.

Las funciones definidas por estas ecuaciones reciben el nombre de *funciones lineales.*

*Definición:*

> La función que a cada $x \in \mathbb{R}$ le hace corresponder el número real $f(x) = mx + n$, donde $m$ y $n$ son números reales dados, se denomina **función lineal.**

Son ejemplos de funciones lineales:

$f(x) = 7x - 3$, aquí $m = 7$ y $n = -3$

$g(x) = -2x + 0{,}5$, aquí m $= -2$ y $n = 0{,}5$

$h(x) = x + \frac{2}{3}$; aquí $m = 1$ y $n = \frac{2}{3}$

$s(x) = 6x$; aquí $m = 6$ y $n = 0$

$t(x) = -1$; aquí $m = 0$ y $n = -1$

Nota que en los dos últimos ejemplos los miembros derechos de las ecuaciones no tienen forma de binomio, sino de monomio, ya que en un caso $n$ es cero y en el otro lo es el valor de $m$. Sin embargo, son ecuaciones de funciones lineales.

Observa también que la expresión $mx + n$ está definida para cualquier valor real de $x$, o sea, podemos asignar a la variable $x$ cualquier valor real. Luego, siempre que no se indique otra cosa, el dominio de una función lineal es el conjunto de los números reales.

## *Ejercicios*

1. Determina cuáles de las siguientes ecuaciones definen funciones lineales y señala en ellas el valor de $m$ y el de $n$:

   a) $y = 3x + 2$ b) $y = x - 5$ c) $f(x) = x^2 - 3$ d) $g(x) = \frac{1}{x} - 2$

e) $y = 3x$ f) $h(x) = \frac{x}{3} + 3$ g) $y = -\frac{x^3}{2}$ h) $t(x) = 7{,}5$

i) $y = -4$ j) $p(x) = \sqrt{x} + 3$ k) $s(x) = 5 - 2x$ l) $y = 2 - \frac{x}{4}$

m) $y = \frac{2x+8}{3}$ n) $2x + y = 0$ ñ) $x - y = 8$ o) $\frac{x+y}{2} = 1$

2. Marca con una X la respuesta correcta.

De las siguientes ecuaciones la que no corresponde a una función lineal es:

a) ___ $y = \frac{1}{5}x$ b) ___ $y = -3{,}4$ c) $x \cdot y - 2 = y$ d) $x = \frac{y-1}{3}$

3. Escribe la ecuación de la función lineal si conoces que:

a) $m = 1$ y $n = -1$ b) $m = -3$ y $n = 0{,}6$ c) $m = \frac{2}{3}$ y $n = -\frac{3}{2}$

d) $m = 4$ y $n = 0$ e) $m = 0$ y $n = 9$ f) $m = n = \sqrt{3}$

4. Dada la función $f$ tal que $f(x) = -2x - \frac{3}{2}$ .

a) Determina los valores de $m$ y $n$.

b) Calcula $f(0)$, $f(-1)$, $f\left(-\frac{3}{4}\right)$ y $f(1{,}2)$.

c) Determina el valor de $x$ si $f(x) = 0$, $f(x) = 1{,}5$ y $f(x) = -\frac{3}{2}$.

5. Expresa mediante una ecuación las siguientes situaciones:

a) La distancia $d$ en kilómetro que recorre un auto que viaja a 60 km/h en función del tiempo $t$ en hora.
b) El salario mensual s de un trabajador si recibe \$450,00 de salario fijo y \$3,00 adicionales por cada hora $h$ extra trabajada en el mes.
c) El precio $p$ de un artículo en función del tiempo transcurrido en meses, si dicho precio se ha mantenido inalterable desde que salió a la venta en \$85,00.
d) La altura $h$ de un triángulo en función de su área, si su base mide 6 cm.

## 3.4.5 Representación gráfica de una función lineal

**¡!** Ya conoces que una de las formas de representar funciones son las gráficas y en la figura 3.65 se ha representado la variación de la altura de la vela durante el tiempo que está encendida.

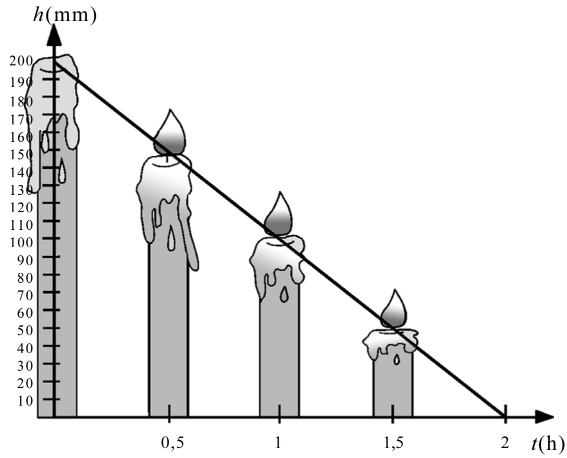



Figura 3.65

A partir de ella puedes dar respuestas a interrogantes como: la altura inicial de la vela, o la altura que tenía al cabo de cierto tiempo. O sea, que la representación gráfica de distintos fenómenos nos permite analizar su comportamiento posterior con un buen grado de acierto.

Ya sabes que el conjunto formado por los elementos del dominio de una función y sus respectivas imágenes, se pueden interpretar como las coordenadas de los puntos de un plano. Al conjunto de puntos que se obtiene al dar todos los valores posibles a la variable independiente $x$, se le llama *gráfica de la función.*

La gráfica de la función se obtiene uniendo con una línea los puntos representados en el sistema de coordenadas cartesiano.

*Ejemplo 1:*

Representa gráficamente las funciones lineales definidas por las ecuaciones siguientes:

a) $y = 2x - 3$ b) $y = -3x$ c) $y = 2$

*Solución:*

Determinas primero las coordenadas de algunos de los puntos de cada gráfica, para ello elaboras una tabla.

a) $y = 2x - 3$

Recuerda que la $x$ es la variable independiente, por lo que le puedes asignar los valores del dominio que desees.

Elaboras la tabla 3.36.

Tabla 3.36

| $x$ | –2 | –1 | 0 | 3 | 3,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | –7 | –5 | –3 | 3 | 4 |

Para $x = -2$, se tiene $y = 2 \cdot (-2) - 3 = -4 - 3 = -7$
Para $x = -1$, se tiene $y = 2 \cdot (-1) - 3 = -2 - 3 = -5$
Para $x = 0$, se tiene que $y = 2 \cdot 0 - 3 = -3$
Para $x = 3$, se tiene que $y = 2 \cdot 3 - 3 = 6 - 3 = 3$
Para $x = 3{,}5$, se tiene que $y = 2 \cdot 3{,}5 - 3 = 7 - 3 = 4$

Obtienes los pares ordenados (–2; –7), (–1; –5), (0; –3), (3; 3) y (3,5; 4), los cuales representas en el sistema de coordenadas rectangulares y trazas la **recta** que pasa por dichos puntos (fig. 3.66).

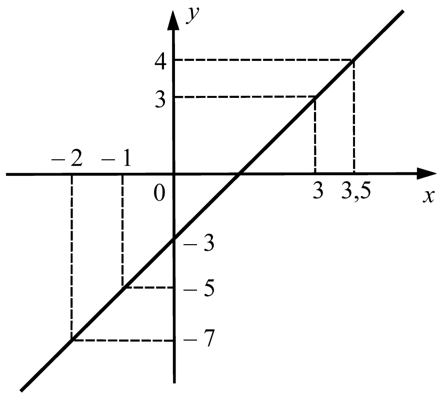



Figura 3.66

b) $y = -3x$
Elaboras la tabla 3.37.

Tabla 3.37

| $x$ | –2 | –1 | 0 | 3 | 3,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 6 | 3 | 0 | –9 | –10,5 |

Para $x = -2$, se tiene que $y = -3 \cdot (-2) = 6$
Para $x = -1$, se tiene que $y = -3 \cdot (-1) = 3$
Para $x = 0$, se tiene que $y = -3 \cdot 0 = 0$
Para $x = 3$, se tiene que $y = -3 \cdot 3 = -9$
Para $x = 3{,}5$, se tiene que $y = -3 \cdot 3{,}5 = -10{,}5$

Obtienes los pares ordenados (–2; 6), (–1; 3), (0; 0), (3; –9) y (3,5; –10,5), los cuales representas en el sistema de coordenadas rectangulares y trazas la recta (fig. 3.67).

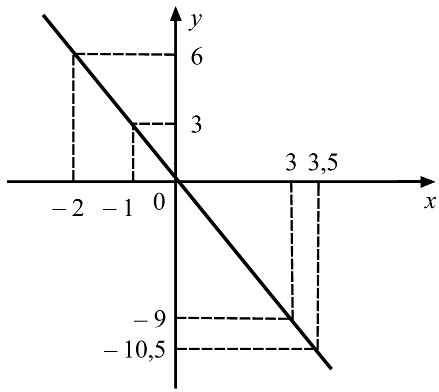



Figura 3.67

c) $y = 2$
Elaboras la tabla 3.38.

Tabla 3.38

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | –2 | –1 | 0 | 3 | 3,5 |
| $y$ | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

En este caso la ecuación de la función tiene la forma $y = n$, o sea, $m = 0$, por lo que no existe el término $mx$. Esto significa que esta función lineal toma valor 2 para cualquier valor que tome la variable independiente $x$.

Obtienes los pares ordenados (–2; 2), (–1; 2), (0; 2), (3; 2) y (3,5; 2), los cuales representas en el sistema de coordenadas rectangulares y trazas la recta, que en este caso es paralela al eje $x$ (fig. 3.68).

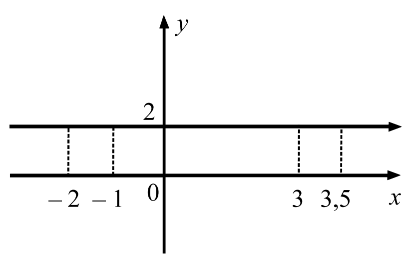



Figura 3.68

Observa que en cada ejemplo se pudo trazar una *recta* que pasa por los puntos representados. Si hubieses tomado más puntos dando otros valores a $x$ y obtienes el respectivo valor de $y$ mediante la ecuación de cada función, estos quedarían ubicados también sobre la recta trazada en cada ejemplo. Mientras más puntos representes tendrás una idea más clara de la representación.

Puedes llegar a la conclusión siguiente:

La gráfica de una función lineal, cuyo dominio es el conjunto de los números reales, es una **recta.**

En efecto, en cada inciso del ejemplo anterior se ha trazado una recta para representar cada función lineal. Sin embargo, ¿tiene cada recta la misma inclinación respecto al eje $x$?

A partir del análisis de las rectas representadas en cada inciso, puedes observar dos cuestiones importantes relacionadas con estas funciones:

1. Cada una de ellas tiene una inclinación diferente respecto al eje $x$, la cual tiene relación directa con el valor que tiene la $m$ en cada ecuación.
   Observa que:
   a) En el primer ejemplo la ecuación de la función lineal es $y = 2x – 3$, donde el valor de $m$ es 2, o sea, $m > 0$.
      Aquí la recta se inclina *hacia arriba* de izquierda a derecha.
   b) En el segundo ejemplo la ecuación de la función lineal es $y = –3x$, donde el valor de m es –3, o sea, $m < 0$.
      Aquí la recta se inclina *hacia abajo* de izquierda a derecha.
   c) En el tercer ejemplo la ecuación de la función lineal es $y = 2$, donde $m = 0$, ya que la ecuación es de la forma $y = n$.
      Aquí la recta no está inclinada, es *paralela* al eje de las $x$.

2. Estas rectas intersecan al eje $y$ en los puntos (0; –3); (0; 0) y (0; 2) respectivamente, lo que tiene relación directa con el valor de $n$ en cada ecuación.
   Observa que:
   a) En la ecuación $y = 2x – 3$, se tiene que $n = –3$, o sea, la $n$ coincide con la $y$ del par ordenado (0; – 3).
   b) En la ecuación $y = –3x$, se tiene que $n = 0$, o sea, la $n$ coincide con la $y$ del par ordenado (0; 0).
   c) En la ecuación $y = 2$, se tiene que $n = 2$, o sea, la $n$ coincide con la $y$ del par ordenado (0; 2).

**Recuerda que:**

- En las funciones lineales la **inclinación** de la recta está relacionada con el valor de $m$ en la ecuación.
- La **intersección** de la recta con el eje $y$, o sea, el valor de la **ordenada, coincide** con el valor que toma $n$ en la ecuación.

De primaria conoces que por dos puntos pasa una *única recta.* Luego para representarla basta con determinar *dos puntos* de su representación gráfica.

Es muy conveniente en muchos casos tomar los puntos donde la gráfica corta a los ejes de coordenadas, o sea, $P_1(x; 0)$ y $P_2(0; y)$, los que se suelen llamar *puntos cómodos.*

*Ejemplo 2:*

Representa en un sistema de coordenadas la función definida en el conjunto de los números reales por la ecuación $f(x) = 5x - 5$.

a) Verifica si el punto (2; 5) pertenece a la representación gráfica de $f$.
b) Si se sabe que el par $(x_0; 8)$ pertenece a la función $f$, halla el valor de la abscisa del par.

*Solución:*

$f(x) = y = 5x - 5$

Para representar la recta correspondiente a esta función buscamos los puntos cómodos:

- Intersección con el eje $x$: Como conoces este punto tiene coordenadas $(x; 0)$, por lo que:
- Das valor cero a la $y$ en la ecuación: $0 = 5x - 5$
- Transponemos el –5 al miembro izquierdo con la operación inversa: $5 = 5x$.
- Despejas la $x$, transponiendo el 5 dividiendo al miembro izquierdo: $x = \frac{5}{5}$.
- Efectúas la división: $x = 1$.

Luego, el punto de intersección con el eje $x$ tiene coordenadas (1; 0).

- Intersección con el eje $y$: Como conoces este punto tiene coordenadas $(0; y)$, y precisamente el valor de $y$ coincide el valor de la $n$ en la ecuación, por lo que en este caso como $n = -5$, el punto tiene coordenadas (0; –5).

Ahora trazas el sistema de coordenadas, ubicas cada punto de intersección sobre su eje correspondiente y trazas la recta que pasa por ambos puntos (fig. 3.69).

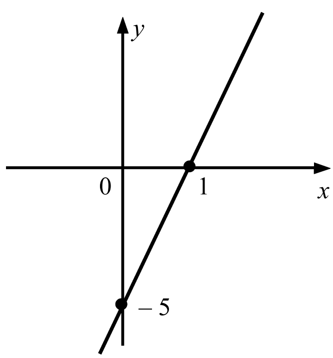



Figura 3.69

a) Verifica si el punto de coordenadas (2; 5) pertenece a la representación gráfica de $f$.

Como ya conoces una recta tiene infinitos puntos y dando valores a la variable independiente $x$, podemos obtener los valores de la variable dependiente $y$ formando los puntos de coordenadas ($x$; $y$) que pertenecen a dicha recta.

Sin embargo en ocasiones es necesario verificar si un punto dado se encuentra sobre la recta o no, o sea, conoces sus coordenadas pero no sabes si está sobre la recta.

¿Cómo proceder en este caso?

Conoces las coordenadas del punto: (2; 5) y la ecuación de la función lineal cuya representación gráfica realizaste anteriormente, $y = 5x - 5$.

Para verificar si ese punto está sobre esa recta puedes proceder por medio del método analítico que consiste en:

- Sustituyes el valor de la abscisa ($x$) del punto en la ecuación: $y = 5 \cdot 2 - 5$.
- Efectúas las operaciones indicadas: $y = 10 - 5 = 5$.
- Compruebas si el valor obtenido coincide con la ordenada del punto dado: $5 = 5$.
- Como coinciden, concluyes que el punto (2; 5) *sí pertenece* a la representación gráfica de la función lineal $f$.

*Nota:* En caso contrario, o sea, si al comparar las ordenadas no son iguales, el punto no pertenece a la gráfica de esa función.

También en ocasiones se puede verificar si un punto pertenece a la representación gráfica de una función a partir de la recta representada en el sistema de coordenadas, el que se denomina *método gráfico.*

Este método consiste (como se muestra en la figura 3.70) en trazar por la $x$ del punto una recta perpendicular al eje $x$ y por la $y$ del punto, una recta perpendicular al eje $y$; si ambas rectas se cortan sobre la recta trazada el punto pertenece a la función, de lo contrario no pertenece.

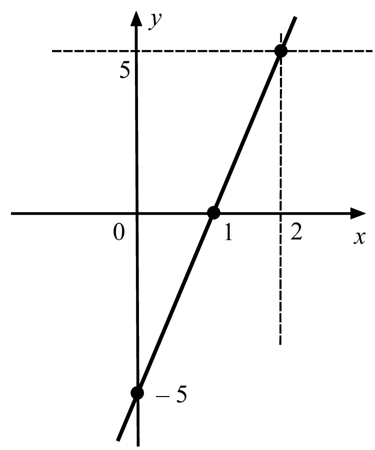


Figura 3.70

Como puedes apreciar existen dos métodos, el *analítico* y el *gráfico* para verificar si un punto pertenece a una función dada, pero el método gráfico no es muy preciso, ya que requiere del trazado de rectas que pueden tener grosores diferentes y dificultan el análisis preciso.

Es por ello que preferimos el método analítico y no el gráfico, no obstante este último puede ser utilizado para corroborar que el resultado analítico obtenido es lógico.

b) Sabiendo que el par $M(x_0; 8)$ pertenece a la función $f$, halla el valor de la abscisa del par.
En este caso, a diferencia del inciso anterior nos afirman que el par pertenece a la función $f$, lo que desconoces es una de sus coordenadas.

Como el par dado pertenece a la función tiene que satisfacer su ecuación, por lo que debes proceder de la manera siguiente:

- Sustituyes la ordenada del punto dado en la ecuación: $8 = 5x - 5$.
- Transpones el $-5$ al otro miembro: $8 + 5 = 5x$
- Efectúas la adición: $13 = 5x$
- Transpones el 5 al otro miembro: $x = \dfrac{13}{5}$.

Luego la abscisa del punto $M$ es $x_0 = \dfrac{13}{5}$.

*Funciones curiosas*

*La representación gráfica de algunas funciones nos recuerda objetos conocidos (fig. 3.71).*

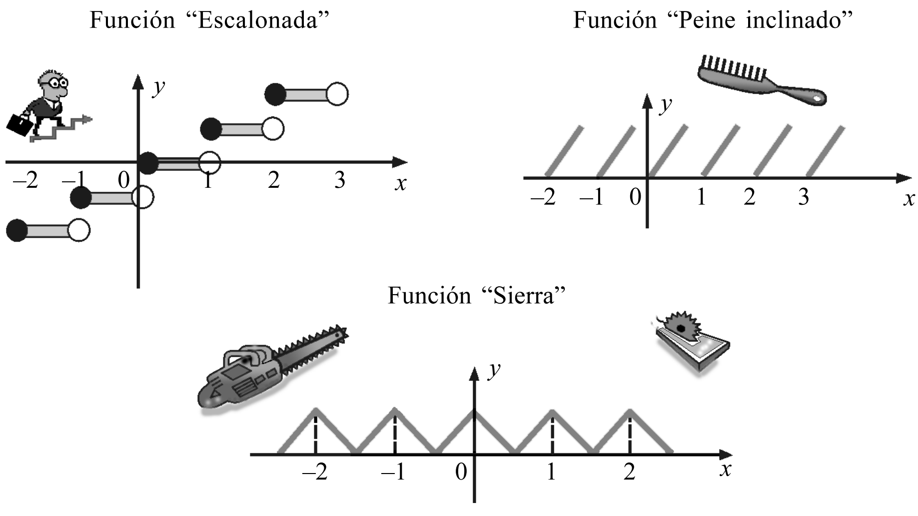



Figura 3.71

*La función* Escalonada, *la cual suele indicarse por esta ecuación* f*(*x*) = [*x*], que se lee* f *de* x *es igual a la parte entera de* x*. nos recuerda una escalera.*

*La función* Peine inclinado, *se asemeja a un peine con los dientes inclinados, suele indicarse mediante la ecuación* g(x) = x – E(x).

*La función* Sierra, *que debe su nombre a que su gráfica simula los dientes de la sierra, su ecuación es la distancia positiva entre* x *y el entero más próximo.*

## *Ejercicios*

1. Representa en un sistema de coordenadas cartesiano las funciones lineales siguientes:

   a) $y = x$ b) $y = -x$ c) $f(x) = 5x$ d) $g(x) = -5x$

   e) $y = \frac{3}{5}x$ f) $y = -\frac{3}{5}x$ g) $y = 1{,}3x$ h) $y = -1{,}3x$.

1.1. ¿Pasa cada una de estas rectas representadas por el origen de coordenadas? ¿Por qué?

1.2. ¿Tienen la misma inclinación respecto al eje $x$? ¿Por qué ocurre eso?

2. Representa en un sistema de coordenadas cartesiano las funciones lineales siguientes:

   a) $y = x + 4$ b) $y = -x + 4$ c) $y = 2x - 6$ d) $y = -2x - 6$

   e) $y = 3 + 9x$ f) $y = 3 - 9x$ g) $y = \frac{1}{3} + 3x$ h) $y = \frac{1}{3} - 3x$

2.1. ¿Pasa cada una de estas rectas representadas por el origen de coordenadas? ¿Por qué?

2.2. ¿Tienen la misma inclinación respecto al eje $x$? ¿Por qué ocurre eso?

3. Representa en un sistema de coordenadas cartesiano las funciones lineales siguientes:

   a) $y = 2$ b) $y = -2$ c) $y = 3{,}5$ d) $y = -3{,}5$ e) $y = \frac{4}{3}$ f) $y = -\frac{4}{3}$ g) $y = 0$

3.1. ¿Qué posición tienen las rectas representadas respecto al eje $x$? ¿Por qué ocurre esto?

4. Sea la función lineal $f$ definida en los reales por la ecuación $f(x) = \frac{3}{2}x - 2$.

   a) Represéntala gráficamente.

   b) Prueba que: $\frac{f(-4)}{4} + f(0) = -4$.

   c) Verifica si el punto de coordenadas $\left(-\frac{2}{3}; -3\right)$ pertenece a la representación gráfica de $f$.

   d) Determina el valor de $x_0$ para el cual el par $A(x_0; -4)$ pertenece a la función $f$.

5. Una sustancia tiene una temperatura de 3 °C. Se somete a un proceso de calentamiento que hace variar su temperatura 2 °C por minuto. Representa en un sistema de coordenadas la variación de la temperatura de la sustancia hasta que alcance los 11 °C en función del tiempo transcurrido.

6. Un recipiente que está completamente vacío tiene una capacidad de 50 L. Se abre una llave que vierte 5 L/min. Representa gráficamente el proceso completo de llenado del recipiente atendiendo a la relación tiempo-cantidad de litros.

7. La policía de tránsito mide la velocidad a un auto que se acerca por la autopista, durante 2 minutos y constató que viajaba todo el tiempo a 60 km/h. Representa gráficamente la variación de la velocidad del auto durante el tiempo que fue medida.

## 3.4.6 Ecuación de una función lineal

**¡!** Como ya conoces, la representación gráfica de una función lineal es una recta y el proceso de variación de la altura de la vela describe precisamente un segmento que es parte de una recta que se obtiene si prolongamos sus extremos (fig. 3.72).

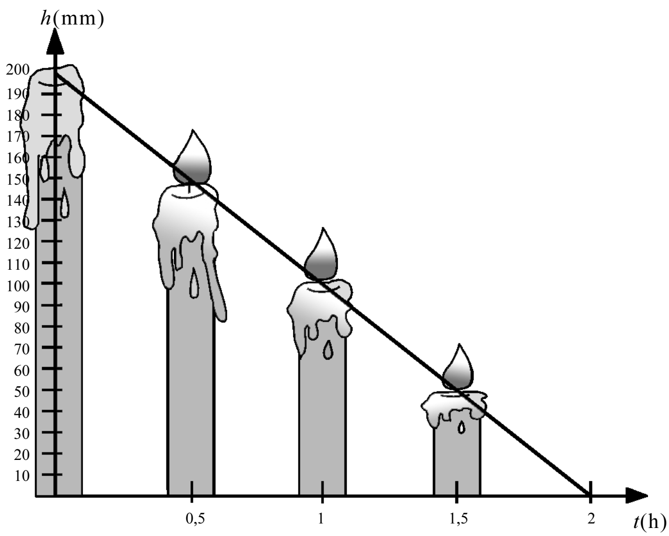



Figura 3.72

¿Será posible escribir mediante la ecuación de una función lineal este proceso? Por supuesto que sí.

Como ya sabes la ecuación de una función lineal tiene la forma $y = mx + n$, por lo que es necesario conocer los valores de $m$ y $n$.

Al inicio del epígrafe 3.4.4 escribiste la ecuación de la función lineal dados estos dos valores. Pero este caso conoces solo que $n = 200$, ya que es la altura inicial de la vela.

¿Cómo proceder entonces para escribir la ecuación de una función lineal cuando conoces solo uno de los dos valores, m o n, involucrados en la ecuación?

Observa el ejemplo siguiente.

*Ejemplo 1:*

Escribe la ecuación de la función lineal que cumple las siguientes condiciones:

a) $n = 3$ y su gráfica pasa por el punto $A(2; -2)$.

*Solución:*

En este caso conoces el valor de $n$ y un punto de la recta. También que la ecuación dela función lineal tiene la forma $y = mx + n$, como sabes el valor de $n$, procedes de la siguiente manera:

Sustituyes en la ecuación dicho valor: $y = mx + 3$

Sustituyes las coordenadas del punto $A$ en la ecuación: $-2 = m \cdot 2 + 3$, recuerda que la primera coordenada del punto es la $x$, y la segunda la $y$.

Despejas $m$ en la ecuación: $-2 - 3 = m \cdot 2$ transponiendo el 3

$-5 = m \cdot 2$ efectuando la sustracción

$m = -\frac{5}{2}$ transponiendo el 2.

Escribes la ecuación: $y = -\frac{5}{2}x + 3$.

b) $m = -\frac{1}{2}$ y la gráfica pasa por el punto $B(-4; 5)$.

*Solución:*

En este caso conoces el valor de $m$ y un punto de la recta, por lo que:

Sustituyes en la ecuación dicho valor: $y = -\frac{1}{2}x + n$.

Sustituyes las coordenadas del punto $B$ en la ecuación: $5 = -\frac{1}{2} \cdot (-4) + n$.

Despejas $n$ en la ecuación: $5 = 2 + n$ efectuando el producto

$5 - 2 = n$ transponiendo el 2

$n = 3$ efectuando la sustracción.

Escribes la ecuación: $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

c) La representación gráfica pasa por los puntos $P$ y $Q$ representados en la figura 3.73.

*Solución:*

En este caso conoces dos puntos de la representación gráfica de la función. Extraes sus coordenadas de la gráfica: $P(0; –2,5)$ y $Q(2; 1,5)$. Como ves uno de ellos tiene la forma (0; y), por lo que en este caso $n = –2,5$ (la gráfica corta al eje $y$ en –2,5) y la ecuación toma la forma $y = mx – 2,5$.

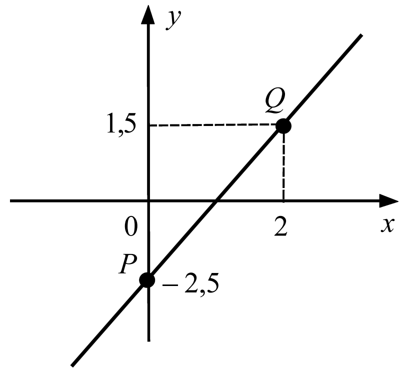


Figura 3.73

Para hallar $m$, como en los casos anteriores, tomas las coordenadas del otro punto y lo sustituyes en la ecuación.

Sustituyes las coordenadas del punto $Q$ en la ecuación: $1,5 = m \cdot 2 – 2,5$.

Despejas $m$ en la ecuación: $1,5 + 2,5 = m \cdot 2$ transponiendo el –2,5
$4 = m \cdot 2$ efectuando la adición
$m = 2$ transponiendo el 2.
Escribes la ecuación: $y = 2x – 2,5$

d) La gráfica pasa por los puntos $M(0; 0)$ y $Q\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

*Solución*:

Como en el inciso anterior, el punto $M$ tiene la forma (0; $y$) y el valor de su ordenada es 0, luego $n = 0$ y la ecuación toma la forma $y = mx$.
Para hallar $m$:

Sustituyes las coordenadas del punto $Q$ en la ecuación: $-\frac{2}{3} = m \cdot \frac{1}{3}$.

Despejas m en la ecuación: $m = \left(-\frac{2}{3}\right) : \frac{1}{3}$ transponiendo el $\frac{1}{3}$

$m = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{1}$ hallando el recíproco

$m = –2$ simplificando.

Escribes la ecuación: $y = –2x$.

**Recuerda que:**

Para escribir la ecuación de una función lineal necesitas conocer el valor de ***m*** y el de ***n***.

- Si conoces el valor de ***m*** y **un punto de la recta**, sustituyes ***m*** y las coordenadas del punto en la ecuación; luego despejas ***n***.
- Si conoces el valor de ***n*** y un punto de la recta, sustituyes ***n*** y las coordenadas del punto en la ecuación; luego despejas ***m***.
- Si el valor de ***n*** es cero, la ecuación tendrá la forma ***y = mx*** y la recta pasará por el **origen de coordenadas (0; 0).**

**R !!** Ya estás en condiciones de escribir la ecuación que describe el proceso que muestra la variación de la altura de la vela.

*Solución:*

De la gráfica puedes obtener la información siguiente:

- La vela tenía 200 mm de altura.
- Se gastó al cabo de las 2 h.

Puedes concluir que:

- $n = 200$, ya que la gráfica interseca en 200 al eje $y$.
- La intersección con el eje $x$ tiene coordenadas (2; 0).

Sustituyes $n$ en la ecuación: $y = mx + 200$.
Sustituyes ahora el punto (2; 0) : $0 = m \cdot 2 + 200$.

Despejando $m$ se obtiene: $m = -\frac{200}{2}$.

Luego, $m = -100$ y la ecuación que describe la variación de longitud de la vela es $y = -100x + 200$.

Pero, como la ecuación escrita muestra la relación tiempo ($t$) – altura ($h$) y en el eje horizontal aparece representado el tiempo y en el eje vertical, la altura; la ecuación se escribe utilizando las letras correspondientes a cada magnitud, o sea, $h = -100t + 200$.

**Dominio e imagen de una función lineal**

Para analizar el *dominio* de una función lineal se proyecta su gráfica sobre el eje $x$. Observa que la recta es infinita y cada punto de ella se puede proyectar sobre dicho eje.

Vamos a realizar este análisis a partir de la gráfica de la función $y = 2x - 3$, representada en el epígrafe 3.4.5 en la figura 3.66. (Aquí se muestra solo el procedimiento para algunos de sus infinitos puntos).

De esta manera podemos concluir que la gráfica de la función lineal cubre todo el eje $x$ (fig. 3.74), por lo que su *dominio* es el conjunto de los números reales.

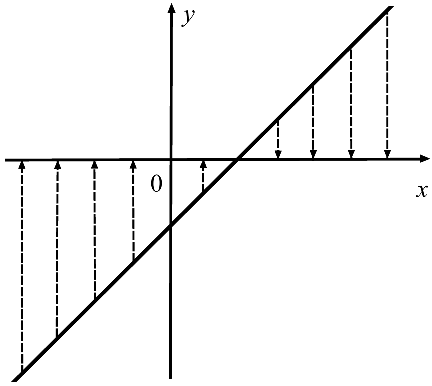



Figura 3.74

Para analizar la *imagen* de una función lineal se proyecta su gráfica sobre el eje $y$. Observa ahora que cada punto de ella se puede proyectar sobre dicho eje. (Aquí se muestra solo para algunos de sus infinitos puntos).

De esta manera podemos concluir que la gráfica de la función lineal cubre todo el eje $y$ (fig. 3.75), por lo que su *imagen* es también el conjunto de los números reales.

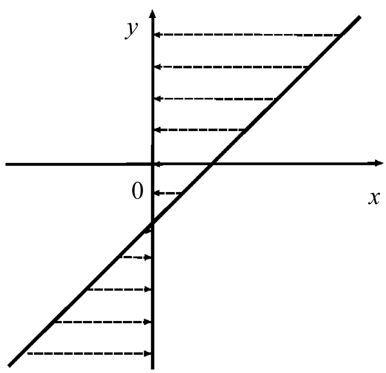



Figura 3.75

Si la gráfica de la función se inclina hacia abajo, de izquierda a derecha, puedes comprobar que se obtiene igual resultado.

Puedes concluir que:

| |
|---|
| El dominio y la imagen de una función lineal, de la forma $y = mx + n$ ($m \neq 0$), es el conjunto de los números reales. |

¿Cómo será el dominio y la imagen de la función lineal $y = n$, o sea, cuando $m = 0$?

Como ya conoces cuando $m = 0$, la gráfica de la función es una recta paralela al eje $x$. Para realizar el análisis tomemos como ejemplo la gráfica de la función de ecuación $y = 2$, representada en el epígrafe 3.4.5 en la figura 3.68.

Al proyectar dicha gráfica sobre el eje de las abscisas (fig. 3.76 a), se puede notar que la gráfica lo barre completamente. Luego el dominio de esta función también es el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$.

Sin embargo, al proyectar la gráfica de la función $y = 2$ sobre el eje $y$ (fig. 3.76 b), todas las flechas van hacia un **único** valor de $y$; el **2**. Luego la imagen de esta función es el conjunto unitario **{2}**.

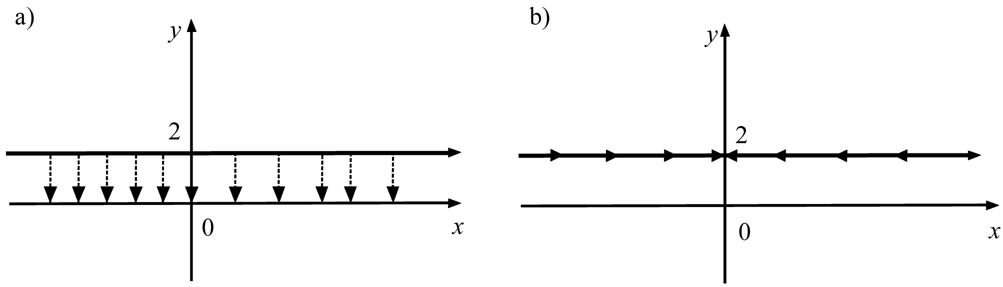



Figura 3.76

A funciones como esta cuyo conjunto imagen consta de un solo número se les llama *funciones constantes,* y su gráfica siempre es *paralela* al eje $x$.

Es bueno aclarar que si $\boldsymbol{n} = \mathbf{0}$, la gráfica coincide con el eje $x$ y su imagen es el conjunto **{0}**.

Puedes concluir que:

| |
|---|
| El dominio de una función lineal de la forma $y = n$, es el conjunto de los números reales; y su conjunto imagen está formado por un único número, el valor de $n$. |

Es importante aclarar que en algunas situaciones donde se utilizan funciones lineales para modelar procesos o fenómenos de la vida, el dominio y la imagen *son subconjuntos* del conjunto de los números reales.

Por ejemplo, en el caso de la variación de la altura de la vela, el dominio y la imagen son subconjuntos de los números reales, ya que los valores de $t$ varían desde 0 hasta 2, o sea, $0 \leq t \leq 2$; mientras la imagen son los valores reales de $h$ tales que, $0 \leq h \leq 120$.

## *Ejercicios*

1. Escribe la ecuación de una función lineal si conoces que:

   a) Tiene $m = 5$ y su gráfica pasa por el origen de coordenadas.
   b) Tiene $m = -3$ y su gráfica contiene el punto de coordenadas (0; 4).

c) Tiene $m = 0$ y su gráfica corta al eje de las ordenadas en $y = -1$.

d) Tiene $m = \frac{1}{3}$ y su gráfica pasa por el punto $\left(0; -\frac{2}{3}\right)$

e) El valor de $n$ es 3 y la recta contiene al punto (–2; 7).

f) Su gráfica interseca al eje $y$ en 2,5 y al eje $x$ en 3,5.

g) Su gráfica pasa por los puntos (8; –1) y $\left(0; -\frac{1}{5}\right)$.

h) Su representación gráfica pasa por el origen de coordenadas y por el punto $\left(\frac{3}{4}; -\frac{2}{5}\right)$.

i) Su gráfica es paralela al eje $x$ y corta al eje $y$ en –2,4.

2. Escribe las ecuaciones que definen las funciones representadas en la figura 3.77.

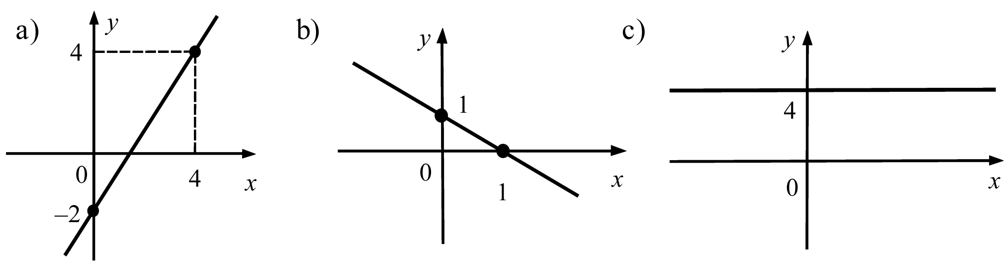



Figura 3.77

2.1. Escribe el dominio y la imagen de las funciones representadas.

3. Halla el valor de $n$ si se sabe que el gráfico de la función $y = 6x + n$ pasa por el punto:

a) (2; 5) b) (0; –3) c) (0; 0) d) $\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}\right)$ e) $\left(-\frac{3}{2}; -2\right)$

4. Halla el valor de $m$ si se sabe que el gráfico de la función $y = mx - 1$ pasa por el punto:

a) (2; 5) b) (3; 0) c) (–3; –2) d) $\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}\right)$ e) $\left(-\frac{3}{2}; -2\right)$

5. La gráfica de una función lineal $f$ pasa por los puntos $A(-1; -1)$ y $B(0; -5)$.

5.1. Marca con una X la respuesta correcta:

a) La ecuación de la función $f$ es:

___$f(x) = 4x - 5$ ___$f(x) = -x - 5$ ___$f(x) = -4x - 5$ ___$f(x) = -4x + 5$

b) De los puntos dados el que pertenece a la gráfica de la función $f$ es:

___ $C(2;\,3)$ ___ $D\left(\frac{1}{4};-4\right)$ ___ $E(-2;\,-13)$ ___ $F\left(-\frac{1}{4};-4\right)$

c) Al calcular $f(-\,2{,}5)$ se obtiene: ___ 5 ___ –15 ___ 4 ___ – 4

5.2. Representa gráficamente la función $f$.

5.3. Determina el dominio y la imagen de la función $f$.

6. a) Representa en un sistema de coordenadas la función lineal $h$ definida por la ecuación $y = h(x) = 3x - 2$ en el tramo de $-5 \leq x \leq 5$.
   b) Di su dominio y su imagen.

7. La gráfica (fig. 3.78) muestra cómo varía la cantidad de agua en un recipiente que ya contenía cierta cantidad, a partir de las 8:00 a.m. y hasta llenarse completamente.
   $C$: cantidad de agua en litro
   $t$: tiempo en minuto

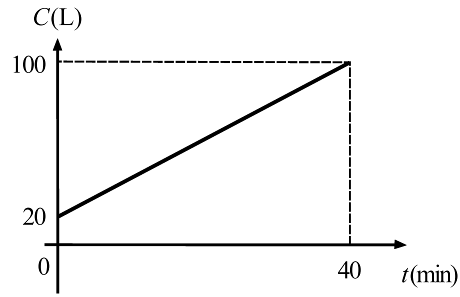


Figura 3.78

   a) Escribe la ecuación que describe el proceso de llenado del recipiente.
   b) ¿Qué cantidad de agua tenía el recipiente al iniciarse el proceso de llenado?
   c) ¿Qué cantidad de agua tenía el recipiente a los 15 min de iniciado el proceso de llenado?
   d) ¿A los cuántos minutos de comenzar el proceso de llenado, el recipiente tenía 60 L de agua?
   e) ¿A qué hora se llenó completamente el recipiente?

8. La gráfica (fig. 3.79) muestra la variación de la temperatura de una sustancia a partir de las 9:05 p.m. durante varias horas.
   $T$: temperatura en °C.
   $t$: tiempo en hora

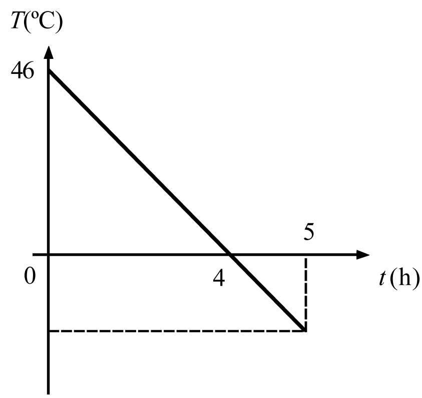


Figura 3.79

   a) Escribe la ecuación del proceso representado.
   b) ¿Qué temperatura tenía la sustancia a la 1:05 p.m.?
   c) ¿Cuál fue la temperatura mínima alcanzada por la sustancia?
   d) ¿A qué hora la sustancia alcanzó los 23 °C de temperatura?

9. La gráfica (fig. 3.80) muestra la altura que tiene el agua de un recipiente a partir de las 11:50 a.m. durante el proceso de vaciado.

$h$: altura del agua en el recipiente, en metro
$t$: tiempo en minuto

9.1. Marca con una X la respuesta correcta.

a) La ecuación que describe el proceso representado es:

___ $h(t) = -2t + 1$ ___ $h(t) = 2t + 1$

___ $h(t) = -0{,}1t + 1$ ___ $h(t) = 0{,}1t + 1$

b) A los 2 min la altura del agua del recipiente había descendido:

___ 0,8 m ___ 1,8 m ___ 0,2 m

___ ninguna de ellas

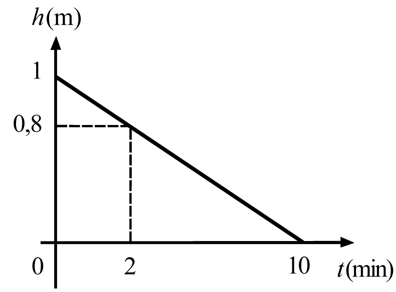


Figura 3.80

9.2. Completa los espacios en blanco.

a) La altura inicial del agua en el recipiente fue de ________.
b) El recipiente se vació completamente cuando el reloj marcaba las __________.

## 3.4.7 Cero de una función lineal

**¡!** En distintas ocasiones al analizar el comportamiento de procesos descritos por medio de funciones lineales es de interés conocer el tiempo de duración del proceso.

En este caso que nos ocupa, sería interesante conocer cuánto tiempo transcurrió hasta que la vela se gastó completamente.

Como puedes observar en la figura 3.81, cuando la vela se va gastando, su longitud disminuye, y cuando se gasta completamente, su *longitud será igual a cero.* En la gráfica debes buscar el valor del tiempo para el cual la longitud de la vela es igual a cero. Este valor está precisamente sobre el eje $x$, o sea, el 2.

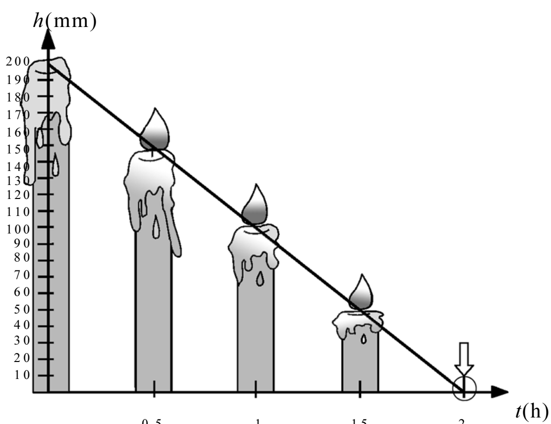


Figura 3.81

Este es uno de los valores más importantes de una función lineal, el cual se denomina *cero* de la función.

*Definición:*

| |
|---|
| El elemento del **dominio** de la función lineal $y = mx + n$ ($m \neq 0$) cuya **imagen** es **cero,** se denomina **cero** de esta función. |

Gráficamente, el *cero* de la función es la *abscisa* del punto donde la recta corta al eje $x$, este punto como ya sabes tiene coordenadas ($x_0$; 0) por lo que para calcular el cero de una función basta con:

1. Sustituir la ordenada $y$ por cero en la ecuación.
2. Despejar la abscisa $x$.

Es importante que comprendas que el *cero es la abscisa de dicho punto ($x_0$) y no el punto de intersección.*

*Ejemplo 1:*

Calcula el cero de las funciones lineales siguientes:

a) $y = 2x - 6$

*Solución:*

Para calcular el cero de esta función:
Sustituyes la ordenada ($y$) por cero en la ecuación: $2x - 6 = 0$.
Despejas $x$: $2x = 6$
$x = 6 : 2$
$x = 3$
Luego el cero de la función $y = 2x - 6$ es $x_0 = 3$.
Puedes comprobar de manera oral o escrita este resultado, si sustituyes el valor hallado de $x$ en la ecuación y el cálculo te da cero.

b) $y = -\frac{x}{3} + \frac{1}{5}$

*Solución:*

Sustituyes la ordenada ($y$) por cero en la ecuación: $-\frac{x}{3} + \frac{1}{5} = 0.$

Despejas $x$: $\frac{1}{5} = \frac{x}{3}$ (observa que se transpone el término $-\frac{x}{3}$ para el otro miembro para que la $x$ nos quede positiva)

$$x = \frac{1}{5} \cdot 3$$

$$x = \frac{3}{5}$$

Luego el cero de la función $y = -\frac{x}{3} + \frac{1}{5}$ es $x_0 = \frac{3}{5}$.

c) $y = -x - 2{,}4$

*Solución:*

Sustituyes la ordenada ($y$) por cero en la ecuación: $-x - 2{,}4 = 0$.
Despejas $x$: $x = -2{,}4$ (observa que se transpone el término $-x$ para el otro miembro para que nos quede positivo)
Luego el cero de la función $y = -x - 2{,}4$ es $x_0 = -2{,}4$.

d) $y = 6$

*Solución:*

Al sustituir la ordenada por cero en la ecuación obtienes una igualdad falsa $0 = 6$, por lo que ningún valor real de $x$ la satisface.
Como ya conoces esta función es *constante* y su gráfica es paralela al eje $x$, por lo que para cualquier valor real de $x$ su imagen es 6. En este caso la recta *no corta* en ningún punto a dicho eje $y$ la función *no tiene cero.*

e) $y = 0$

*Solución:*

Al sustituir la ordenada por cero en la ecuación, obtenemos una igualdad verdadera $0 = 0$, la que se satisface para cualquier valor real de $x$.
Esta función también es *constante* y como $n = 0$, su gráfica es una recta contenida sobre el eje $x$.
En este caso, para cualquier valor real de $x$ su imagen siempre es cero; por lo que esta función tiene *infinitos ceros.*
Como puedes apreciar:

1. En los incisos a, b y c, donde $m \neq 0$, se obtuvo un único cero.
2. En el inciso d, donde $m = 0$ y $n \neq 0$, no existe cero.
3. En el inciso e, donde $m = 0$ y $n = 0$, hay infinitos ceros.

Puedes concluir que:

- Si $m \neq 0$, la función lineal tienen un único cero, $x_0 = \frac{-n}{m}$. En este caso la recta corta al eje $x$ en un único punto.

- Si $m = 0$ y $n \neq 0$, la función lineal no tiene cero. En este caso la recta es paralela al eje $x$.
- Si $m = 0$ y $n = 0$, la función lineal tiene infinitos ceros. En este caso la recta está sobre el eje $x$.

**R ¡!** Ya conoces cómo calcular el cero de una función lineal por lo que puedes comprobar analíticamente, que la vela se gastó a las 2 h de iniciado el proceso de medición como muestra la gráfica del proceso representado.

- Partes de la ecuación que describe el proceso: $h = -100t + 200$.
- Das valor cero a la altura en la ecuación: $-100t + 200 = 0$.
- Calculas el valor de $t$: $t = 200 : 100 = \mathbf{2}$.

En la práctica es importante comprobar, cuando es posible, que los resultados obtenidos por la vía analítica coinciden o por lo menos que tengan sentido común cuando se comparan con la vía gráfica y viceversa. Esto te permite evitar errores de cálculo o apreciación.

## *Ejercicios*

1. Calcula, si existe, el cero de las funciones lineales siguientes:

   a) $y = 5x - 25$ b) $f(x) = 10x - 5$ c) $g(x) = -x + 3{,}5$ d) $h(x) = -0{,}5x - 4$

   e) $y = \dfrac{x}{3} - 1$ f) $f(x) = \dfrac{2}{3}x - 8$ g) $g(x) = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4}$ h) $h(x) = -2x - \dfrac{3}{5}$

   i) $y = 2{,}5 - x$ j) $f(x) = 4$ k) $g(x) = -7$ l) $h(x) = -0{,}1x - 0{,}001$

2. Señala, si existe, el cero de las funciones lineales representadas en la figura 3.82. En caso de no existir, argumenta tu respuesta.

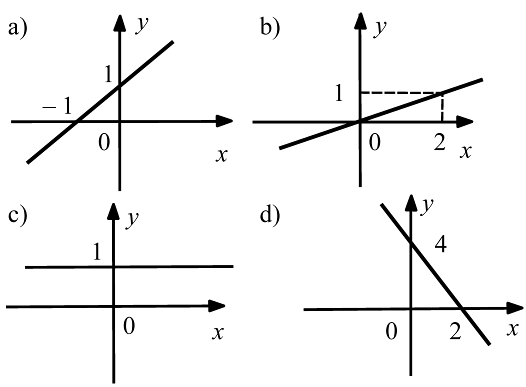



Figura 3.82

2.1. Escribe la ecuación de la función lineal representada en cada caso.

3. Sea la función $g$ dada por su ecuación $g(x)=-\frac{2}{3}x-12$. Se puede afirmar que el cero de la función $g$ es:

a) ___ 18  b) ___ –8  c) ___ 0  d) ___ –18

4. El cero de una función lineal $f$ es $x_0=\frac{1}{3}$. Se puede afirmar que dicha función lineal tiene ecuación:

a) ___ $h(x)=x+\frac{1}{3}$  b) ___ $f(x) = -9x + 3$

c) ___ $g(x) = 9x + 3$  d) ___ $t(x) = -3 + 6x$

5. Sea la función lineal $f$ definida en el conjunto de los números reales por la ecuación $f(x) = 4x - 2$.

a) Calcula su cero.
b) Represéntala en un sistema de coordenadas rectangulares.
c) Determina su imagen.

5.1. De los pares ordenados $A(-1;\ 6)$; $B(0{,}5;\ 18)$ y $C\left(\frac{1}{4};-1\right)$ el que pertenece a la función $f$ es: ___ $A$  ___ $B$  ___ $C$.

5.2. Prueba que: $\frac{f(0)-2f(1{,}5)}{f(-1)}=\frac{5}{3}$.

6. Sean $M(2;\ 6)$ y $N(0;\ -4)$ dos de los puntos de la representación gráfica de una función lineal $g$.

a) Represéntala en un sistema de coordenadas rectangulares.
b) Escribe su ecuación.
c) Di su dominio e imagen.
d) Calcula su cero.
e) Calcula la imagen de –3 por la función $g$.
f) Determina la abscisa del punto $C$ de la gráfica de $g$, cuya ordenada es –2.

7. En la gráfica (fig. 3.83) se ha representado la función lineal $f$ que corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A$ y $B$.

a) Escribe su ecuación.

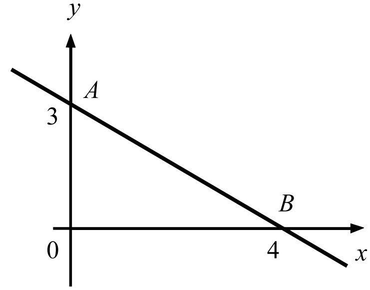


Figura 3.83

b) Calcula el área del $\Delta AOB$, donde $O$ es el origen de coordenadas.
c) Halla el perímetro del $\Delta AOB$.

8. Un tanque contiene cierta cantidad de agua. A las 10:30 a.m. se abre su llave para vaciarlo y limpiarlo. Este proceso se muestra en la figura 3.84:

   $C$: cantidad de agua en litro
   $t$: tiempo en minuto

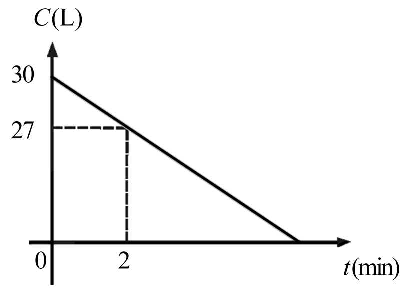


Figura 3.84

   a) ¿Qué cantidad de agua contenía el tanque inicialmente?
   b) Escribe la ecuación del proceso representado.
   c) ¿A qué hora se vació completamente el tanque?
   d) ¿Qué cantidad de agua había en el tanque a los 15 min de iniciado el proceso de vaciado?

9. A medida que el tiempo transcurre, desde el momento de compra hasta el momento de venta, una máquina se desvaloriza.
   Una empresa calculó que el valor de una máquina, al finalizar $t$ años, estaba dada por la ecuación $P = 15\,000 - 1\,500t$, donde $P$ representa el precio de la máquina en peso.

   a) ¿Cuál fue el costo inicial de la máquina?
   b) ¿Cuál será el precio de la máquina a los dos años de haber sido comprada?
   c) ¿Qué tiempo debe transcurrir desde la compra de la máquina, para que esta no tenga valor alguno?
   d) Representa gráficamente la función que muestra la relación precio-tiempo transcurrido.

## 3.4.8 Rectas y funciones

Ya conoces que la gráfica de una función lineal $y = mx + n$ es una recta. Pero existe otra forma de escribir la ecuación de una recta, la cual conduce también a la forma anterior, la que veremos mediante el ejemplo siguiente.

*Ejemplo 1:*

Despeja la variable $y$ en las ecuaciones siguientes:

a) $2x + 2y - 8 = 0$ b) $3x - 2y + 2 = 0$ c) $ax + by + c = 0$ ($b \neq 0$)

*Solución:*

a) $2x + 2y - 8 = 0$
$2y = -2x + 8$ transponiendo al miembro derecho

$y = \dfrac{-2x+8}{2}$ transponiendo el 2 al miembro derecho

$y = -\dfrac{2x}{2} + \dfrac{8}{2}$ dividiendo el binomio por 2

$y = -x + 4$ simplificando cada fracción

Obtenemos una ecuación de la forma $y = mx + n$, donde $m = -1$ y $n = 4$.

b) $3x - 2y + 2 = 0$

$3x + 2 = 2y$ transponiendo $-2y$ al miembro derecho para que la $y$ quede con el coeficiente positivo

$y = \dfrac{3x+2}{2}$ transponiendo el 2 al otro miembro

$y = \dfrac{3x}{2} + \dfrac{2}{2}$ dividiendo el binomio por 2

$y = \dfrac{3x}{2} + 1$ simplificando la segunda fracción

Obtenemos una ecuación de la forma $y = mx + n$, donde $m = \dfrac{3}{2}$ y $n = 1$.

c) $ax + by + c = 0$

$by = -ax - c$ transponiendo al miembro derecho

$y = \dfrac{-ax-c}{b}$ transponiendo el parámetro $b$ al miembro derecho

$y = -\dfrac{ax}{b} - \dfrac{c}{b}$ dividiendo el binomio por $b$

Obtenemos una ecuación de la forma $y = mx + n$, donde $m = -\dfrac{a}{b}$ y $n = -\dfrac{c}{b}$, con ($b \neq 0$).

Como puedes observar al despejar la variable $y$ en cada inciso obtienes ecuaciones de funciones lineales, por lo que su representación gráfica será una recta la cual ya puedes representar sobre un plano coordenado.

Luego puedes concluir que toda ecuación de la forma $ax + by + c = 0$ ($b \neq 0$) define una función lineal.

**Teorema 1:**

Toda ecuación de la forma $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ con $x, y \in \mathbb{R}$ y $a$ y $b$ no simultáneamente iguales a cero, representa una **recta** en el plano coordenado.

## Pendiente de una recta

¡! Luisito obtuvo buenas notas al finalizar el séptimo grado y su papá lo llevó a un campismo. Cierto día su papá le propuso escalar a la cima de una de las montañas (fig. 3.85).

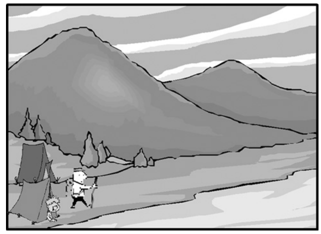


Figura 3.85

Luisito temeroso preguntó:
—¿No está muy alta papá? Vamos a buscar una de menor inclinación.
El papá, que comprendió el temor de su hijo, le contestó:
—Sí, tienes razón, busquemos otra de menor *pendiente.*
Luisito rápidamente reaccionó y preguntó:
—¿Y qué es eso de *pendiente?*

Seguramente en varias ocasiones has tenido la posibilidad de observar la inclinación respecto a la horizontal del suelo de lomas, carreteras, puentes, cubiertas de techo, árboles, de los aviones al despegar en la pista, etcétera; como las que se muestran en las imágenes de las figuras 3.86 a 3.90.

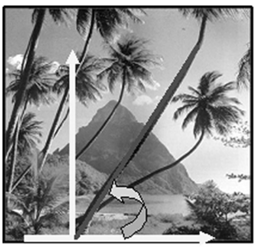


Figura 3.86

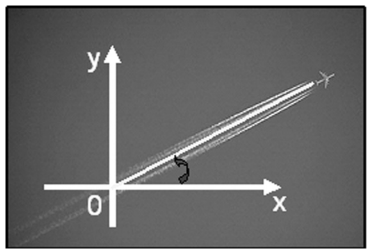



Figura 3.87

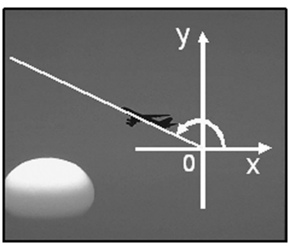



Figura 3.88

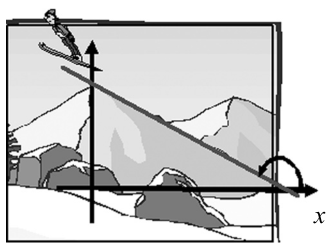



Figura 3.89

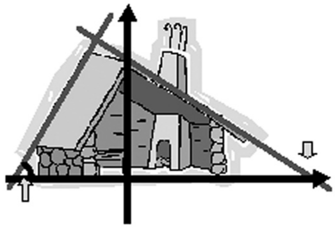


Figura 3.90

Si trazas un sistema de coordenadas, con el eje $x$ paralelo a la línea recta determinada por el suelo, y trazas la recta que nos muestra la inclinación en cada figura, podrás observar que esta *inclinación de la recta* en cada imagen es *diferente* respecto a ese eje $x$. O sea, unas están más inclinadas respecto al suelo que otras, por lo que el ángulo que forma la recta con dicho eje también tiene diferente amplitud.

Ya conoces de epígrafes anteriores que la recta es la representación gráfica de una función lineal, cuya ecuación tiene la forma $y = mx + n$. y aprendiste que el valor de $m$ está relacionado con la inclinación de la recta.

Precisamente a este coeficiente de la variable, que indica la inclinación de la recta, se le denomina *pendiente.*

También se conoce a la *pendiente* de una recta con el nombre de *coeficiente angular,* pues la inclinación de la recta depende del ángulo que esta forma con el eje $x$.

Ya Luisito al igual que tú sabe qué es la pendiente de una recta y, además, conoces que: si $m > 0$, la recta se inclina hacia arriba, si $m < 0$, se inclina hacia abajo y si $m = 0$, la recta es paralela al eje $x$.

Pero, ¿cómo calcular la pendiente de una recta? Observa el ejemplo siguiente:

*Ejemplo 2:*

Una persona se dispone a subir una loma por uno de sus extremos y descender por el otro, como muestra la figura 3.91. La loma tiene 60 m de altura y la distancia de un extremo a otro de la loma es de 100 m. Sabiendo que su cima se encuentra exactamente sobre un punto situado a la mitad entre ambos extremos, determina qué valor tiene, respecto al suelo, la inclinación de la loma por el lugar de ascenso y cuál es dicho valor por el lugar de descenso.

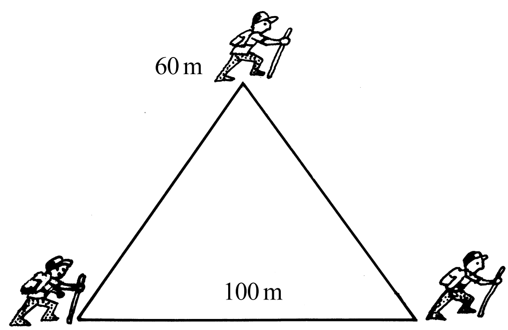


Figura 3.91

*Solución:*

Como ya conoces, el valor de la pendiente nos indica la inclinación de cada recta respecto a la línea horizontal, por lo que es necesario hallar el valor de $m$ de cada una de las rectas trazadas sobre la inclinación de ambos lados de la loma. Trazas un sistema de coordenadas cuyos ejes perpendiculares tienen origen en el punto que representa el lugar por donde la persona comienza el ascenso.

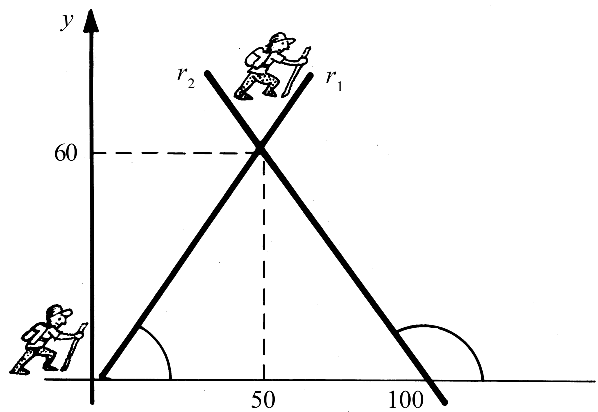


Figura 3.92

Trazas la recta $r_1$, que representa la trayectoria de ascenso a la cima y la recta $r_2$, que nos muestra la trayectoria del descenso (fig. 3.92).

**Cálculo de la pendiente de la recta $r_1$:**

Para calcular la pendiente de la recta $r_1$, obtienes de la gráfica dos pares que pertenezcan a la recta $r_1$,o sea, (0; 0) y (50; 60).

Ahora aplicas el procedimiento utilizado ya en epígrafes anteriores para escribir la ecuación de una función lineal conocidos el valor de $n$ y un punto de su representación gráfica.

Partes de la ecuación de la función lineal $y = mx + n$, donde la $n = 0$, ya que tomas como punto de partida de la persona el origen de coordenadas (0; 0) cuya ordenada es igual a 0.

De ahí que la ecuación toma la forma $y = mx$ y ahora sustituyes en la ecuación el otro punto situado sobre la recta $r_1$, o sea, (50; 60):

$$60 = m \cdot 50$$

$m = \dfrac{60}{50}$, por lo que $m = \dfrac{6}{5} = 1{,}2$.

Luego el valor de la pendiente de la recta $r_1$ es 1,2.

Observa que el valor de la pendiente es positivo, ya que la recta se inclina hacia arriba, y se calculó a partir del cociente entre la ordenada y la abscisa del punto (50; 60).

**Cálculo de la pendiente de la recta $r_2$:**

Para hallar la pendiente de la recta $r_2$, extraes de la gráfica dos de sus puntos; (50; 60) y (100; 0).
Como ves ninguno de los puntos tiene la forma (0; $y$), por lo que no conoces el valor de la $n$ y no es posible utilizar el procedimiento aplicado para la recta $r_1$.

**¿Cómo proceder en este caso para hallar la pendiente de la recta $r_2$?**

Conocer dos puntos de la representación gráfica de una función lineal nos permite aplicar otro procedimiento para hallar los valores de $m$ y de $n$, el cual obtendrás a partir del ejemplo siguiente:

*Ejemplo 3:*

a) En la gráfica aparece representada la función lineal de ecuación $y = x - 4$ (fig. 3.93). Observa que:

La imagen de 0 es – 4.
La imagen de 1 es –3.
La imagen de 2 es –2.

La imagen de 3 es –1.
La imagen de 4 es 0.
¿Qué pasa con la ordenada cuando la abscisa aumenta una unidad?

Cuando la abscisa *aumenta una unidad,* vemos que la ordenada también *aumenta una unidad.*

¿Y qué pasa con la ordenada cuando la abscisa *aumenta dos unidades?*

En este caso la ordenada *también aumenta 2 unidades* (fig. 3.94).

Si hacemos el análisis cuando la abscisa *aumenta tres unidades,* la ordenada *aumentará también tres unidades.*

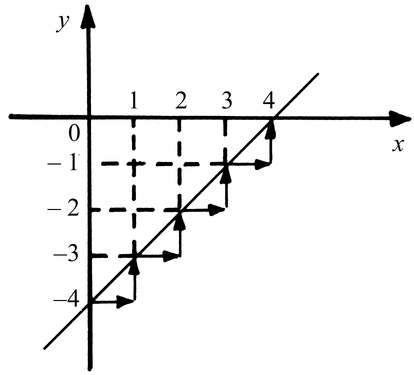



Figura 3.93

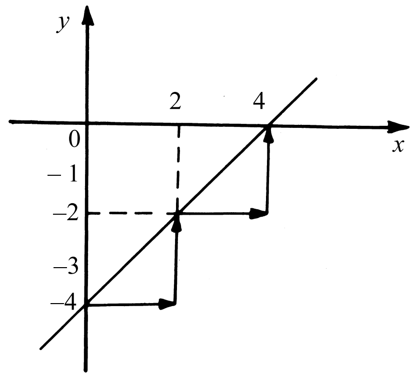



Figura 3.94

Puedes concluir que los cocientes:

$$\frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=1=m.$$

O sea, los cocientes entre la variación de la ordenada y la variación de la abscisa son constantes e iguales al valor de la pendiente *m*.

b) En la gráfica (fig. 3.95) aparece representada la función lineal de ecuación $y = -3x + 6$.
Observa que:

La imagen de 0 es 6.
La imagen de 1 es 3.
La imagen de 2 es 0.
La imagen de 3 es –3.

¿Qué pasa con la ordenada cuando la abscisa aumenta una unidad?

Cuando la abscisa *aumenta una unidad,* vemos que la ordenada *disminuye tres unidades.*

¿Y qué pasa con la ordenada cuando la abscisa *aumenta dos unidades?*

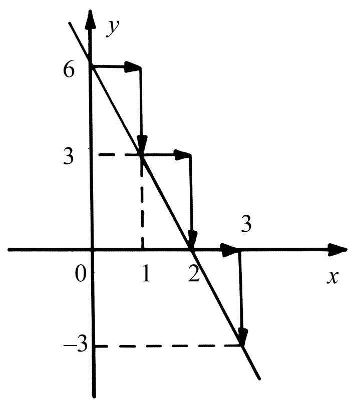



Figura 3.95

Si observas la gráfica (fig. 3.96) llegarás a la conclusión que la ordenada *disminuye seis unidades.*

Y así sucesivamente, cuando la abscisa *aumenta tres unidades,* la ordenada *disminuye nueve.*

Puedes concluir que los cocientes:

$$\frac{-3}{1} = \frac{-6}{2} = \frac{-9}{3} = -3 = m$$

Nuevamente observas que los cocientes entre la variación de la ordenada y la variación de la abscisa son constantes e iguales al valor de la pendiente *m*.

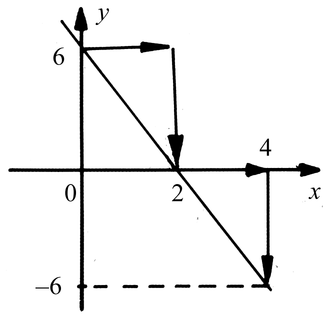



Figura 3.96

c) En la gráfica (fig. 3.97) aparece representada la función lineal de ecuación $y = 2$.
Observa que:

La imagen de –2 es 2.
La imagen de –1 es 2.
La imagen de 0 es 2.
La imagen de 1 es 2.
La imagen de 2 es 2.

En este caso cuando la abscisa *aumenta una unidad,* la ordenada *no aumenta ni disminuye.*

Lo mismo sucede cuando la abscisa aumenta en 2, 3 o más unidades.

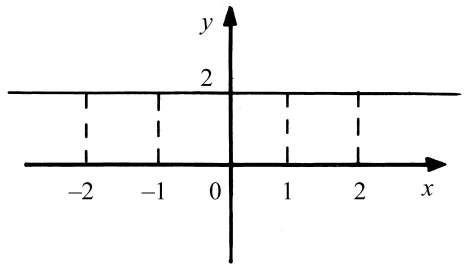



Figura 3.97

Podemos concluir que los cocientes: $\frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} = 0 = m$

En este ejemplo resulta que los cocientes entre la variación de la ordenada y la variación de la abscisa son constantes e iguales a cero, el valor de la pendiente *m*.

De estos tres ejemplos puedes concluir que la *pendiente* está determinada por el *cociente* entre la *variación de la ordenada* y la *variación de la abscisa.*

Esta conclusión te permite obtener una fórmula para calcular la pendiente si conoces las coordenadas de dos puntos de su representación gráfica, la cual te presentamos mediante el teorema siguiente.

**Teorema:**

La pendiente *m* de una recta que pasa por los puntos $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$ se calcula por la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, con $x_1 \neq x_2$.

Regresemos a nuestro problema original, o sea, hallar la pendiente de la recta $r_2$.

De la gráfica de la figura 3.92 podemos obtener el par ordenado **(50; 60)** ya analizado anteriormente, y el par **(100; 0)**, ya que la recta corta al eje de las abscisas en $x = 100$, que como conoces representa el cero de la función.

Aplicas la fórmula utilizando los puntos extraídos del gráfico para escribir la ecuación en el ejemplo propuesto realizando las acciones siguientes:

1. Nombras las coordenadas de ambos puntos (recuerda que cada punto tiene como primera coordenada la $x$ y como segunda la $y$).

$$\begin{array}{cc} (x_1;\ y_1) & (x_2;\ y_2) \\ \downarrow\ \downarrow & \downarrow\ \downarrow \\ (50;\ 60) & (100;\ 0). \end{array}$$

2. Escribes la fórmula para hallar la pendiente: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

3. Sustituyes las coordenadas de ambos puntos en la fórmula: $m = \dfrac{0 - 60}{100 - 50}$.

4. Efectúas las operaciones indicadas: $m = \dfrac{-60}{50}$.

5. Efectúas el cociente indicado: $m = -\dfrac{6}{5} = -1{,}2$.

Luego el valor de la pendiente de la recta $r_2$ es –1,2, un valor negativo, ya que la recta se inclina hacia abajo.

De esta manera se calcula el valor de la pendiente ($m$) conocidos dos puntos de una recta.

Para hallar la pendiente de la recta $r_1$ también se puede utilizar esta fórmula, pues conoces las coordenadas de dos puntos de la recta (0; 0) y (50; 60), compruébalo.

*Ejemplo 4:*

Determina la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

a) $A(2;\ 4)$ y $B(3;\ 8)$.

*Solución:*

1. Nombras las coordenadas en cada punto:

$$\begin{array}{ccc} A(2;\ 4) & \text{y} & B(3;\ 8) \\ \downarrow\ \downarrow & & \downarrow\ \downarrow \\ (x_1;\ y_1) & & (x_2;\ y_2) \end{array}$$

2. Escribes la fórmula: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

3. Sustituyes las coordenadas de los puntos en la fórmula: $m = \dfrac{8-4}{3-2}$.

4. Efectúas las operaciones indicadas: $m = \dfrac{4}{1}$.

   Luego el valor de la pendiente de la recta es 4.

   Observa que al representar en el sistema de coordenadas la recta que pasa por *A* y *B*, esta se inclina hacia arriba de izquierda a derecha.

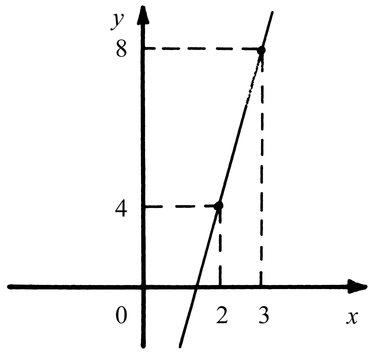



Figura 3.98

b) *C*(–3; –5) y *D*(– 4; 1) (fig. 3.98).

   *Solución:*

1. Nombras las coordenadas en cada punto:
   $C(-3; -5)$ y $D(-4; 1)$
   $\downarrow\ \downarrow \qquad \downarrow\ \downarrow$
   $(x_1; y_1) \qquad (x_2; y_2)$

2. Escribes la fórmula: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

3. Sustituyes las coordenadas de los puntos en la fórmula: $m = \dfrac{1-(-5)}{-4-(-3)}$.

4. Efectúas las operaciones indicadas: $m = \dfrac{1+5}{-4+3} = \dfrac{6}{-1}$

   Luego el valor de la pendiente de la recta es $m = -6$. Observa que al representar en el sistema de coordenadas la recta que pasa por *C* y *D,* esta se inclina hacia abajo de izquierda a derecha (fig. 3.99).

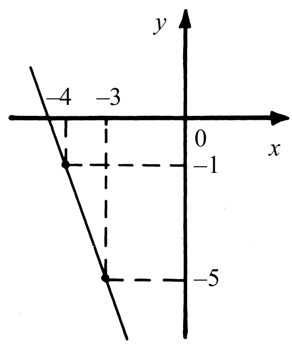



Figura 3.99

   *Importante:* Nota que si las coordenadas $(\boldsymbol{x_1; y_1})$ son negativas debes sustituir su valor en la fórmula entre paréntesis y luego hallar su opuesto. También puedes sustituir directamente colocando el opuesto del número en la fórmula y quedaría adicionando como se muestra en el paso 4.

c) $M\left(\dfrac{2}{3}; 1\right)$ y $N\left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{4}{5}\right)$

*Solución:*

1. Nombras las coordenadas en cada punto $M\left(\frac{2}{3}; 1\right)$ y $N\left(\frac{1}{3}; -\frac{4}{5}\right)$

$$\begin{array}{cc} \downarrow \ \downarrow & \downarrow \ \ \downarrow \\ (x_1; y_1) & (x_2; \ y_2) \end{array}$$

2. Escribes la fórmula: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

3. Sustituyes las coordenadas de los puntos en la fórmula: $m = \dfrac{-\frac{4}{5} - 1}{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}}$.

4. Efectúas las operaciones indicadas: $m = \dfrac{\frac{-4-5}{5}}{-\frac{1}{3}} = \dfrac{-\frac{9}{5}}{-\frac{1}{3}} = -\dfrac{9}{5} \cdot (-3) = \dfrac{27}{5}$

   Luego el valor de la pendiente de la recta es $m = \dfrac{27}{5}$.

   Observa que al representar en el sistema de coordenadas la recta que pasa por *M* y *N,* esta se inclina hacia arriba de izquierda a derecha (fig. 3.100).

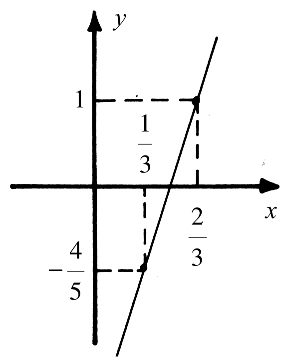



Figura 3.100

d) $P(4; 3)$ y $Q(-7; 3)$

*Solución:*

1. Nombras las coordenadas en cada punto: $P(4; 3)$ y $Q(-7; 3)$

$$\begin{array}{cc} \downarrow \ \downarrow & \downarrow \ \downarrow \\ (x_1; y_1) & (x_2; y_2) \end{array}$$

2. Escribes la fórmula: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

3. Sustituyes las coordenadas de los puntos en la fórmula: $m = \dfrac{3 - 3}{-7 - 4}$.

4. Efectúas las operaciones indicadas: $m = \dfrac{0}{-11}$ .

   Luego el valor de la pendiente de la recta es $m = 0$.

Como ya conoces de epígrafes anteriores, esto significa que la recta es *paralela* al eje $x$, o sea, *no está inclinada* a dicho eje, como muestra la representación gráfica (fig. 3.101).

e) $H(1; 2)$ y $G(1; -3)$

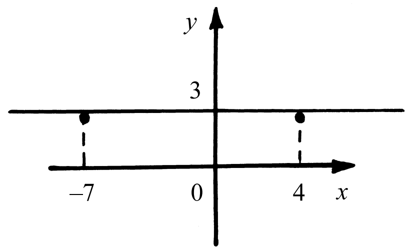


Figura 3.101

*Solución:*

1. Nombras las coordenadas en cada punto:
   $H(1; 2)$ y $G(1; -3)$
   $\downarrow \downarrow \quad \downarrow \downarrow$
   $(x_1; y_1) \quad (x_2; y_2)$

2. Escribes la fórmula: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

3. Sustituyes las coordenadas de los puntos en la fórmula: $m = \dfrac{-3-2}{1-1}$.

4. Efectúas las operaciones indicadas: $m = \dfrac{-5}{0}$.

   Luego la fracción se indefine, esto significa que no existe pendiente y la recta que pasa por esos dos puntos no está inclinada respecto al eje $x$, sino que es *perpendicular* al eje $x$, como se muestra gráficamente (fig. 3.102).

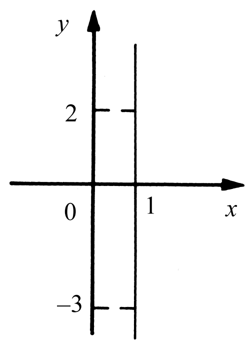


Figura 3.102

Has podido apreciar a partir de los ejemplos 2 y 3 que las pendientes pueden tener valores positivos, negativos o cero. Este resultado tiene relación directa con la inclinación de la recta al representarla en un sistema de coordenadas. Esta relación nos indica otra propiedad de las funciones lineales, la *monotonía.*

En el ejemplo 3 podemos observar que:

- En los incisos a y c, las rectas se elevan de izquierda a derecha y la pendiente es *positiva.* En estos casos a medida que aumentan los valores de $x$, también aumentan los valores de $y$; se dice que la función es *creciente.*
- En el inciso b, la recta se eleva de derecha a izquierda y la pendiente es *negativa.* En este caso a medida que aumentan los valores de $x$, disminuyen los valores de $y$; se dice que la función es *decreciente.*
- En el inciso d, la recta no se inclina respecto al eje $x$, es *paralela.* En este caso a medida que aumentan los valores de $x$, *no varían* los valores de $y$; se dice que la función es *constante.*
- En el inciso e, la recta no se inclina respecto al eje $x$, no existe pendiente y es *perpendicular* a dicho eje. Como ya conoces en este caso *no* estamos en presencia de una función, ya que a un mismo valor de $x$, corresponden infinitos valores de $y$.

Puedes concluir que:

- Si $\boldsymbol{m} > \mathbf{0}$, la función lineal es **creciente.**
- Si $\boldsymbol{m} < \mathbf{0}$, la función lineal es **decreciente.**

O sea, si $m \neq 0$, las funciones lineales son crecientes o decrecientes.

- Si $\boldsymbol{m} = \mathbf{0}$, la función lineal es **constante.**

**Recuerda que:**

Las funciones lineales pueden ser crecientes, decrecientes o constantes según el valor de la pendiente ($m$).

*Ejemplo 5:*

Determina, según la información que se brinda, el valor de la pendiente en cada inciso y analiza la monotonía de la función lineal indicada.

a) La función $f$ tiene ecuación $f(x) = 2x + 5$.

Respuesta:

La pendiente $m = 2$ y como $2 > 0$, la función $f$ es *creciente.*

b) La función $g$ tiene ecuación $g(x) = 6 - x$.

Respuesta:

La pendiente $m = -1$ y como $-1 < 0$, la función $g$ es *decreciente.*

c) La función $h$ tiene ecuación $h(x) = 8{,}3$.

Respuesta:

La pendiente $m = 0$ y la función $h$ es *constante.*

d) La gráfica de la función $p$ pasa por los puntos $(1{,}5; -2)$ y $(3{,}5; -3)$.

*Solución:*

Conoces dos puntos que pertenecen a la función $p$, por lo que debes aplicar la fórmula estudiada:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3-(-2)}{3{,}5-1{,}5} = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}$$

La pendiente es negativa, luego la función $p$ es decreciente.

Como ya sabes para escribir la ecuación de una función lineal necesitamos los valores numéricos de la $m$ y la $n$. En epígrafes anteriores escribiste la ecuación de la función lineal conocidos un punto y la pendiente ($m$), así como un punto y la $n$.

Conocer la fórmula para calcular la pendiente, conocidos dos puntos de la gráfica de una función, te permite escribir su ecuación realizando el procedimiento que se muestra a continuación.

*Ejemplo 6:*

Escribe la ecuación de la función lineal $f$ cuya representación gráfica pasa por los puntos:

a) $A(4;\ 1)$ y $B(2;\ 7)$

Conoces dos puntos de la gráfica de la función, luego podemos hallar la pendiente:

$A(4;\ 1)$ $B(2;\ 7)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-1}{2-4} = \frac{6}{-2} = -3$$

Para hallar el valor de $n$ recuerda que sustituimos el valor de $m$ en la ecuación y cualquiera de los puntos dados (el de coordenadas menos complicadas), ya que ambos pertenecen a la gráfica de la función.

$y = -3x + n$ sustituyendo el valor de $m$
$1 = -3 \cdot (4) + n$ sustituyendo por las coordenadas del punto $A$
$1 = -12 + n$
$1 + 12 = n$ transponiendo el $-12$
$n = 13$

Con los valores de $m$ y $n$ hallados, escribes la ecuación $f(x) = -3x + 13$.

b) $M(2;\ -2)$ y $N\left(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3}\right)$

Conoces dos puntos de la gráfica de la función, luego podemos hallar la pendiente:

$M(2;\ -2)$ $N\left(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3}\right)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-\frac{1}{3}-(-2)}{\frac{1}{2}-2} = \frac{-\frac{1}{3}+2}{\frac{1}{2}-2} = \frac{\frac{-1+6}{3}}{\frac{1-4}{2}} = \frac{\frac{5}{3}}{-\frac{3}{2}} = \frac{5}{3}\cdot(-\frac{2}{3})$$

$$m = -\frac{10}{9}$$

Sustituyes ahora las coordenadas de uno de los puntos y obtienes:

$y = -\frac{10}{9}x + n$ sustituyendo el valor de $m$

$-2 = -\frac{10}{9} \cdot 2 + n$ sustituyendo por las coordenadas del punto $M$

$-2 = -\frac{20}{9} + n$

$-2 + \frac{20}{9} = n$ transponiendo $-\frac{20}{9}$ al miembro izquierdo

$n = \frac{-18 + 20}{9}$

$n = \frac{2}{9}$

Con los valores de $m$ y $n$ hallados, escribes la ecuación $f(x) = -\frac{10}{9}x + \frac{2}{9}$.

## *Ejercicios*

1. Despeja la variable $y$ en cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $x + y - 1 = 0$ b) $y - 3x + 12 = 0$ c) $2x + 2y + 4 = 0$
d) $x - y = 8$ e) $6x - 2y = 0$ f) $x - y = 0$

1.1. Determina la pendiente de cada una de ellas.

1.2. Señala en cada caso la inclinación de la recta atendiendo al valor de su pendiente.

2. Calcula la pendiente de las rectas que pasan por cada uno de los puntos siguientes y represéntalas gráficamente.

a) (2; 2) y (4; 6) b) (3; –1) y (4; 2) c) (–2; –3) y (–1; 5)

d) (3; 0) y (–1; 6) e) (0; 0) y (2,5; 10) f) $\left(2; \frac{1}{3}\right)$ y $\left(1; \frac{4}{3}\right)$

g) $\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{5}\right)$ y $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{5}\right)$ h) (3,2; 0,6) y (5,2; –0,4) i) (3; 9) y (4; 9)

3. Halla las pendientes de los tres lados del triángulo $ABC$ si: $A(-2; -1)$; $B(3; 2)$ y $C(-8; 9)$.

4. Determina cuáles de las siguientes funciones definidas por sus ecuaciones son crecientes, decrecientes o constantes. Fundamenta tu respuesta.

a) $y = 2x$ b) $y = -2x + 8$ c) $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$ d) $g(x) = -0{,}1x - 2$

e) $y = \sqrt{2}x + \sqrt{3}$ f) $y = x$ g) $h(x) = 3 - 2x$ h) $y = 2$

i) $y = -12$ j) $y = \frac{2}{3} - \frac{1}{5}x$ k) $y = \frac{7}{6} + \frac{x}{3}$ l) $s(x) = \frac{2x - 4}{4}$

m) $y = \frac{3 - 2x}{3}$

5. ¿Por qué no existe la pendiente de las rectas determinadas por los puntos:

a) $A(3; 1)$ y $B(3; 4)$? b) $M(0; 0)$ y $N(0; 5)$?

6. En la figura 3.103 se muestra la representación gráfica de tres funciones lineales:

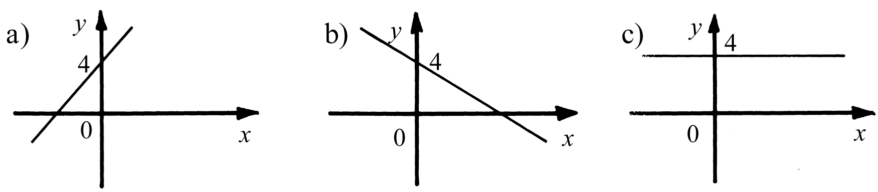



Figura 3.103

6.1. ¿Cuál de las gráficas se corresponde con la ecuación de la función $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$? Fundamenta tu selección.

6.2. Calcula el cero de la función $f$.

6.3. Representa en el mismo gráfico seleccionado una recta que tenga igual cero que la función $f$ y de pendiente negativa.

7. A medida que el aire seco se mueve hacia arriba, se expande y se enfría.
La temperatura $T$ (en grado Celsius) del aire a una altura $h$ (en kilómetro) está dada aproximadamente por una ecuación que define una función lineal.
Selecciona cuál es el gráfico (fig. 3.104) que le corresponde a la situación planteada:

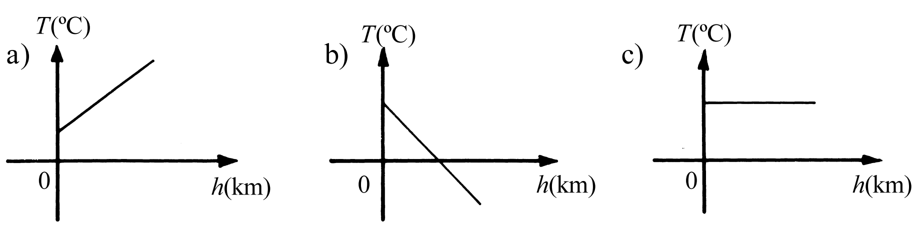



Figura 3.104

8. La gráfica (fig. 3.105) muestra cómo varía la temperatura de dos sustancias, $A$ y $B$, a partir de las 10:30 a.m.

$T$: temperatura en °C
$t$: tiempo en minuto

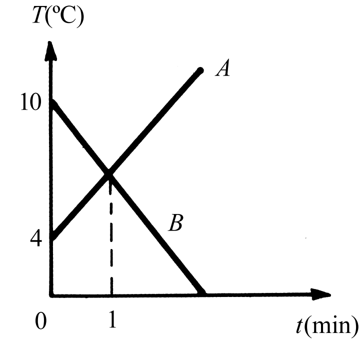



Figura 3.105

a) Señala cuál de las sustancias se calienta y cuál se enfría. Argumenta tu selección.
b) Si la ecuación que describe la variación de la temperatura de la sustancia $A$ es $T = 2t + n$, ¿a qué hora alcanzaron la misma temperatura y de cuánto fue?
c) ¿A los cuántos minutos de haberse iniciado el proceso de medición la temperatura de la sustancia $B$, alcanzó los 0 °C?

9. Se tienen dos recipientes vacíos, $A$ y $B$ de igual altura y capacidad, que se comienzan a llenar por llaves que vierten distinta cantidad de litros por minuto. La gráfica (fig. 3.106) muestra la altura, en decímetro, a la que se encuentra el agua en los recipientes durante varios minutos.

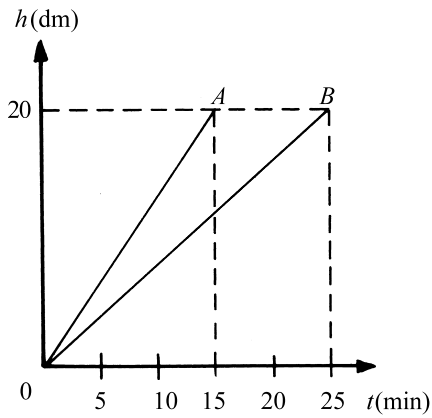



Figura 3.106

a) De continuar el proceso de llenado de cada recipiente con el mismo ritmo, ¿qué recipiente se llenará más rápido? Argumenta tu respuesta.
b) Escribe la ecuación que describe el proceso de llenado de cada recipiente.

c) ¿Representa la correspondencia tiempo-altura una proporcionalidad? En caso afirmativo di de qué tipo.
d) Si la altura de los recipientes es de 30 dm, ¿qué tiempo demorará en llenarse el recipiente *A*?

### 3.4.9 Funciones lineales definidas por tramos

**¡!** Un excursionista realizó una caminata desde su campamento hasta un centro turístico situado a 18 km. Para orientarse contó con un perfil del trayecto (fig. 3.107).

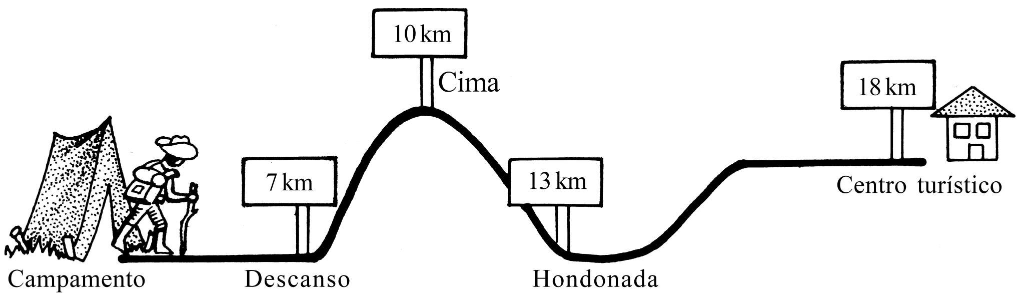



Figura 3.107

La trayectoria del recorrido del excursionista se puede representar mediante un gráfico como el de la figura 3.108, el cual nos permite analizar y responder preguntas como:

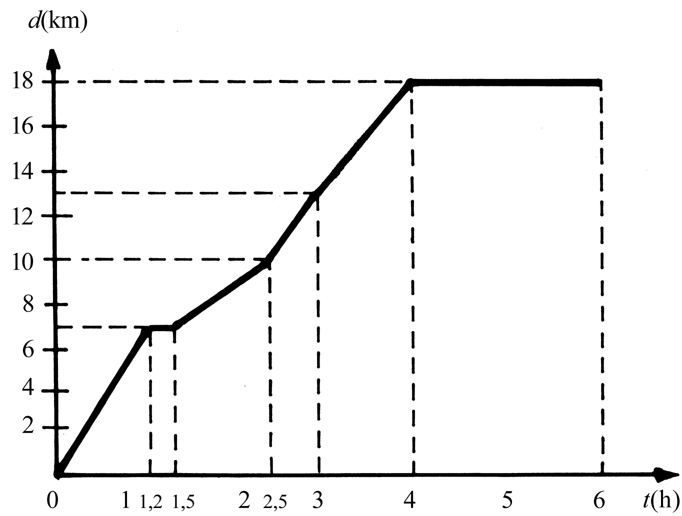



Figura 3.108

a) ¿Cuántos kilómetros caminó el excursionista hasta llegar al primer descanso?
b) ¿Qué tiempo duró el primer descanso?
c) ¿Qué tiempo demoró en llegar a la cima después de continuar la marcha?
d) ¿Cuántos kilómetros separan la hondonada del centro turístico?
e) Si salió del campamento a las 7:00 a.m., ¿a qué hora llegó al centro turístico?

A diferencia de los gráficos de funciones lineales estudiados anteriormente donde aparecían representadas rectas o semirrectas, en este aparecen representados distintos segmentos (tramos) unidos entre sí.

Esto se debe a que existen fenómenos de la naturaleza cuyo comportamiento no es estable, o sea, varían cada cierto tiempo. Es por eso que para representar dicho comportamiento es necesario trazar varios tramos en un mismo sistema de coordenadas.

En este epígrafe aplicarás los conocimientos adquiridos sobre las funciones lineales al cálculo y a la interpretación de gráficos que representan fenómenos de la vida y que mantienen un comportamiento aproximadamente lineal, pero por tramos, los cuales tienen un punto común.

Analicemos algunos ejemplos comenzando por la situación inicial.

*Ejemplo 1:*

Para responder a las preguntas formuladas debes, en primer lugar, comprender la situación presentada en la gráfica de la figura 3.108. Para ello debes preguntarte:

¿Qué magnitud aparece representada en cada eje?
¿En qué unidad aparece cada magnitud?
¿Cuántos tramos tiene la gráfica?
¿Qué posición tiene cada tramo y qué significa?
¿A qué hora comenzó el análisis de la situación mostrada y cuánto tiempo duró el proceso representado?

En la situación inicial puedes observar que:

En el eje horizontal aparece representado el tiempo transcurrido, mientras que en el eje vertical, la distancia recorrida por el excursionista.

El tiempo aparece en hora y la distancia recorrida, en kilómetro.

Aparecen representados en la gráfica 6 tramos.

Los tramos 1, 3, 4 y 5 se inclinan hacia arriba de izquierda a derecha.

Eso significa que a medida que transcurre el tiempo, el excursionista se está desplazando.

En el tramo 2 y en el 6, el segmento es paralelo al eje horizontal. Esto significa que durante el tiempo transcurrido, el excursionista no se está desplazando.
El análisis de la situación planteada comenzó a las 7:00 a.m. cuando el excursionista salió del campamento. Este punto de salida es el origen de coordenadas y terminó 6 h después, cuando llegó a su destino.

Este análisis de la gráfica mostrada puedes hacerlo mentalmente y te ayuda a responder con mayor seguridad cada pregunta como te mostramos a continuación:

a) ¿Cuántos kilómetros caminó el excursionista hasta llegar al primer descanso?

R/ El excursionista caminó 7 km hasta llegar al primer descanso.

Esta pregunta está relacionada con el primer tramo que comenzó en el origen de coordenadas y termina justo cuando el excursionista realiza el primer descanso.

Como se te pregunta la cantidad de kilómetros recorridos, es necesario que te fijes en el eje vertical y proyectas cada extremo del primer segmento sobre ese eje. El primer extremo ya está sobre dicho eje en 0, y al proyectar su otro extremo perpendicular hacia el eje, obtienes el valor 7. Caminó desde 0 hasta 7, lo que nos da 7 km.

b) ¿Qué tiempo duró el primer descanso?

R/ El primer descanso duró 18 min.

Esta pregunta está relacionada con el segundo tramo que está paralelo al eje horizontal. Como te preguntan tiempo, debes proyectar cada extremo de dicho tramo sobre el eje horizontal. Un extremo cae sobre 1,2 y el otro sobre 1,5, luego hallas la diferencia $1{,}5 - 1{,}2 = 0{,}3$ h.

Como sabes cada hora tiene 60 min y para expresar 0,3 h en minuto multiplicas por 60 ese resultado:

$0{,}3 \cdot 60 = 18$ min

c) ¿Qué tiempo demoró en llegar a la cima después de continuar la marcha?

R/ Demoró en llegar a la cima dos horas y media.

Esta pregunta está relacionada con el tercer tramo, ya que si observas el perfil del trayecto, la cima está a los 10 km del campamento. Como te preguntan tiempo la respuesta debes buscarla sobre el eje horizontal. Es por eso que desde el extremo izquierdo del tercer tramo proyectas ese punto sobre el eje horizontal y cae sobre 2,5. La parte entera nos dice que transcurrieron 2 h y la parte decimal, la mitad decimal, nos indica la mitad de la hora siguiente. También se puede responder dos horas y treinta minutos.

d) ¿Cuántos kilómetros separan la hondonada del centro turístico?

R/ Los separan 5 km.

Como te preguntan cantidad de kilómetros, la respuesta la buscas por el eje vertical. Esta pregunta está relacionada con el tramo 5, por lo que debes proyectar cada extremo del tramo sobre el eje vertical.

La hondonada se encuentra en el kilómetro 13 y el centro turístico en el kilómetro 18, luego hallas la diferencia 18 km – 13 km = 5 km.

e) Si salió del campamento a las 7:00 a.m., ¿a qué hora llegó al centro turístico?

R/ Llegó al centro turístico a las 11:00 a.m.

Al responder este inciso debes tener mucho cuidado. La llegada al centro turístico está en el extremo inicial del último tramo, o sea, cuando en el eje vertical se marcan los 18 km. Si proyectas ese extremo sobre el eje horizontal obtienes las 4 h.

Ese tramo es paralelo al eje horizontal, por lo que la llegada al centro turístico es el extremo izquierdo del tramo y no el derecho que termina a las 6 h, mientras que de 4 a 6 lo que nos muestra es el tiempo que está en el centro turístico.

Como puedes observar para responder preguntas sobre gráficas de este tipo, es necesaria una correcta interpretación de cada uno de sus tramos.

Sin embargo, no siempre las preguntas relacionadas con una determinada situación pueden responderse con una simple mirada a la gráfica, en ocasiones es necesario el trabajo analítico, o sea, el cálculo a partir de las ecuaciones correspondientes a los tramos. Es por eso que te mostramos otros ejemplos.

*Ejemplo 2:*

La gráfica (fig. 3.109) muestra cómo varía la temperatura de una sustancia al someterse a un proceso de enfriamiento durante cierto tiempo, a partir de las 8:45 a.m.

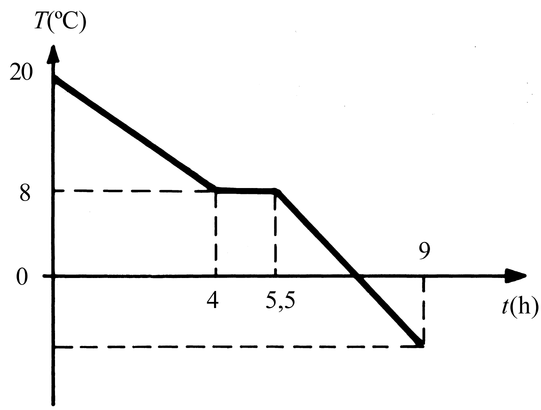



Figura 3.109

2.1. Completa los espacios en blanco:

a) La temperatura inicial de la sustancia fue de __________.

b) La temperatura de la sustancia no varió durante ____________.

c) La sustancia alcanzó su temperatura mínima a las _____ horas de comenzado el proceso.

d) A la 1:00 p.m. la temperatura de la sustancia era de _________

2.2. Marca con una X la respuesta correcta:

a) La ecuación que describe el proceso de enfriamiento de la sustancia durante las primeras 4 h es:

___ $T = -20t + 8$ ___ $T = 3t + 20$ ___ $T = -3t + 20$ ____ $T = -8t + 20$

b) Durante las primeras 4 h la temperatura varió:

___ 20 °C ___ 8 °C ___ 12 °C ___ No se puede determinar

c) Después de las 5,5 h la temperatura estuvo descendiendo durante:

___ 9 h ___ 4 h ___ 210 min ___ 4 h 30 min

2.3. Si la ecuación que describe la variación de la temperatura a partir de las 5,5 h es $T = -4t + n$, ¿a qué hora la sustancia alcanzó los 0 °C de temperatura?

2.4. ¿Cuál fue la temperatura mínima alcanzada por la sustancia?

*Solución:*

2.1. a) 20 °C
(La gráfica parte de 20 en el eje *y*. Recuerda colocar la unidad de medida).

b) Una hora y media

La temperatura no varió en el tramo que es paralelo al eje *x*, o sea, de 4 a 5,5. Al calcular 5,5 – 4 se obtiene 1,5 h.
La parte entera representa una hora y la parte decimal representa la mitad de una hora.

c) 9 h

La temperatura mínima corresponde al valor más pequeño que alcanza la gráfica por el eje vertical y como puedes observar ese valor se alcanza cuando habían transcurrido 9 h.

d) 8 °C

El proceso de medición de la temperatura se inició a las 8:45 a.m., por lo que a la 1:00 p.m. habían transcurrido 4 h 15 min. Este valor se encuentra entre 4 y 5,5, donde la temperatura se mantuvo constante en los 8 °C.

2.2. a) X $T = -3t + 20$

Para seleccionar la ecuación existen varios procedimientos, uno de los cuales puede ser descartar algunas de las ecuaciones por simple inspección en el gráfico. Por ejemplo:

- La primera ecuación queda descartada, pues del gráfico puedes constatar que el valor de *n* es 20.
- Durante las primeras 4 h la gráfica se inclina hacia abajo, luego su pendiente es negativa; así queda descartada la segunda ecuación.

Nos quedan dos posibilidades que se diferencian entre sí por el valor de la pendiente, para seleccionar puedes calcular la pendiente utilizando los pares ordenados (0; 20) y (4; 8) que están situados sobre el tramo que se analiza.

Recuerda que en este caso, al conocer el valor de $n$, puedes utilizar dos procedimientos:

1. Hallar la pendiente sustituyendo $n$ y el otro punto en la ecuación de la función.

$y = mx + n$ (0; 20) y (4; 8)
$8 = m \cdot 4 + 20$
$8 - 20 = 4m$
$-12 = 4m$

$$m = -\frac{12}{4}$$

$m = -3$

2. Hallar la pendiente utilizando la fórmula estudiada.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (0; 20) \text{ y } (4; 8)$$

$$m = \frac{8-20}{4-0}$$

$$m = \frac{-12}{4}$$

$m = -3$

*Nota:* Recuerda sustituir en lugar de la $x$ y la $y$ de la ecuación, las coordenadas del punto que no contiene el valor de $n$.

De esta forma queda seleccionada la ecuación correcta: $T = -3t + 20$

Otro procedimiento puede ser tomar un punto que pertenezca a ese tramo y verificar que sus coordenadas satisfagan una de las 4 ecuaciones dadas.

Por ejemplo: tomamos el par (4; 8) y verificamos a cuál ecuación satisface.

Ya descartamos la primera y la segunda ecuación propuestas, por lo que no es necesario verificar en estas.

Sustituimos $x = 4$ en las otras dos ecuaciones y verificamos en cuál de ellas la ordenada es 8:

| | |
|---|---|
| $T = -3t + 20$ | $T = -8t + 20$ |
| $T = -3 \cdot 4 + 20$ | $T = -8 \cdot 4 + 20$ |
| $T = -12 + 20$ | $T = -32 + 20$ |
| $T = 8$ | $T = -12$ |
| Se cumple | No se cumple |

Luego, la ecuación del primer tramo es $T = -3t + 20$

b) X 12 °C

Al iniciar la medición la temperatura era de 20 °C y a las 4 h alcanzaba los 8 °C, por lo que la diferencia es igual a 12 °C.

c) X 210 min

A partir de las cinco horas y media la temperatura estuvo descendiendo hasta las 9 h. Al hallar la diferencia se obtiene 9 – 5,5 = 3,5, que representan tres horas y media.

Esta respuesta no aparece entre las opciones, por lo que es necesario buscar una respuesta equivalente entre las opciones:
3 h representan 180 min (1 h tiene 60 min).
Media hora son 30 min.
Adicionando $180 + 30 = 210$ min.

2.3. Si la ecuación que describe la variación de la temperatura a partir de las 5,5 h es $T = -4t + n$, ¿a qué hora la sustancia alcanzó los 0 °C de temperatura?

La temperatura alcanza los 0 °C cuando la gráfica corta al eje $x$, o sea, entre las 5,5 y las 9 h. Dicho valor no se encuentra en la gráfica, por lo que es necesario hallarlo a partir de la ecuación correspondiente a ese tramo.

La ecuación dada está incompleta ya que le falta el valor de $n$, el cual se puede obtener si se sustituye un punto de dicho tramo en la ecuación dada:

- Seleccionamos el punto (5,5; 8) que está situado sobre ese tramo.
- Sustituimos en la ecuación: $8 = -4 \cdot 5{,}5 + n$
- Efectuamos el producto: $8 = -22 + n$.
- Transponemos el –22 al miembro izquierdo: $8 + 22 = n$.
- Adicionamos y obtenemos que $n = 30$.
- Escribimos la ecuación: $T = -4t + 30$.

Ahora debes preguntarte para qué estabas escribiendo la ecuación, ya que en ocasiones das como respuesta la ecuación y esa no era la respuesta final del inciso como en este caso.
Para calcular el cero realizamos el procedimiento siguiente:

- Igualamos a cero la ecuación: $0 = -4t + 30$.
- Transponemos al miembro izquierdo el término $-4t$ : $4t = 30$.
- Transponemos el 4 dividiendo al miembro derecho: $t = \dfrac{30}{4}$
- Calculando se obtiene: $t = 7{,}5$, o sea, a las 7 h 30 min.

Hemos obtenido que el cero de la función es $t = 7{,}5$, lo cual puedes verificar gráficamente, ya que la gráfica corta al eje $x$ entre el 5,5 y el 9. Esto te permite minimizar la posibilidad de errores de cálculo.

Al escribir la respuesta del inciso, debes leer nuevamente la pegunta para comprobar cuál es, ya que puede ser una de estas dos:

- ¿A las cuántas horas la sustancia alcanzó los 0 °C?
- ¿A qué hora la sustancia alcanzó los 0 °C?

En este caso nos preguntan la hora, por lo que debes buscar dentro del ejercicio dónde se nos informa la hora del inicio del proceso; la cual encontramos en el enunciado del ejercicio, 8:45 a.m.

Otro aspecto importante que debes tener en cuenta es si el eje horizontal está en hora o en minuto, para adicionar el tiempo correctamente.

En este caso está en hora, por lo que a 8:45 a.m. se deben adicionar 7 h y 30 min.

Adicionando con cuidado los minutos puedes observar que con 15 min se completará una hora y quedan 15 min más; si a partir de las 8 adicionamos 7 h y, además, la que se obtiene de adicionar los minutos, obtenemos las 4 p.m.

R/ La sustancia alcanzó los 0 °C a las 4:15 p.m.

2.4. ¿Cuál fue la temperatura mínima alcanzada por la sustancia?

Nos piden la temperatura mínima alcanzada por la sustancia, valor que no aparece en la gráfica. Es necesario resolver el inciso por la vía analítica, o sea, sustituyendo en la ecuación.

La ecuación de ese tramo la obtuvimos en el inciso anterior: $T = -4t + 30$.

- Sustituimos el tiempo por 9, valor donde se alcanza la temperatura mínima: $T = -4 \cdot 9 + 30$.
- Efectuando el producto: $T = -36 + 30$.
- Efectuando la sustracción: $T = -6$.

R/ La temperatura mínima alcanzada por la sustancia fue de –6 °C.

*Ejemplo 3:*

Un tanque que contenía cierta cantidad de agua se llenó completamente utilizando una manguera a partir de la 1:00 p.m. Después de cierto tiempo se comienza a utilizar el agua para una limpieza general hasta vaciarse completamente. La gráfica muestra la cantidad de litros de agua que contiene el tanque en cada momento (fig. 3.110).

$C$: cantidad de litros de agua que contiene el tanque.
$t$: tiempo en minuto.

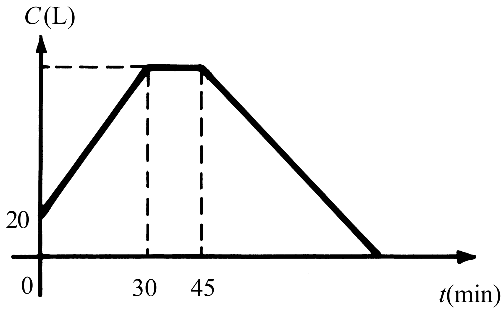



Figura 3.110

a) Si la ecuación que describe el proceso de llenado del tanque es $C = \frac{8}{3}t + n$, ¿cuál es la capacidad del tanque?
b) Durante el proceso de llenado, ¿a los cuántos minutos el tanque contenía agua hasta el 60 % de su capacidad?
c) ¿A qué hora se llenó completamente el tanque?
d) ¿Durante cuántos minutos no se utilizó agua del tanque?
e) Si la ecuación que describe el proceso de vaciado es $C = mt + 200$, ¿a qué hora se vació completamente el tanque?
f) ¿Qué tiempo demoró en vaciarse el tanque?

Respuesta:

a) El tanque tiene una capacidad de 100 L.

El proceso de llenado ocurre durante los primeros 30 min. Como ese tramo parte de 20 en el eje *y*, $n = 20$; por lo que la ecuación quedaría $C = \frac{8}{3}t + 20$.

Para hallar la capacidad del tanque, buscamos en la gráfica la mayor cantidad de litros de agua que alcanza el tanque, para ello observamos en el eje *y* el mayor valor que se alcanza en ese primer tramo.

El valor que corresponde no aparece escrito, por lo que el inciso no se puede responder gráficamente. En este caso es necesario ir al procedimiento analítico, o sea, a la ecuación y sustituir el valor conocido para buscar el valor desconocido.

El tanque se llenó a los 30 min, luego sustituimos en la ecuación el tiempo para calcular la cantidad de agua ($C$).

| | |
|---|---|
| $C = \frac{8}{3} \cdot 30 + 20$ | sustituyendo 30 en la ecuación |
| $C = 80 + 20$ | simplificando el 30 y el 3 y efectuando el producto |
| $C = 100$ | efectuando la adición |

b) El tanque contenía agua hasta el 60 % de su capacidad a los 15 min de iniciado el proceso.

Ya conocemos que la capacidad del tanque es de 100 L, y el 60 % de 100 es 60 L. Nos piden el tiempo cuando la cantidad de agua en el tanque era 60 L.

De nuevo no es posible responder a partir de la gráfica, luego acudimos al procedimiento analítico, o sea, la ecuación.

Como nos hablan del proceso de llenado, la ecuación que se utiliza es la que ya conoces, $C = \frac{8}{3}t + 20$.

Ahora estamos en presencia de una situación inversa a la del inciso anterior, o sea, conocemos el valor de $C$ y debemos hallar el valor de $t$.

| | |
|---|---|
| $60 = \frac{8}{3}t + 20$ | sustituyendo la cantidad de agua en la ecuación |
| $60 - 20 = \frac{8}{3}t$ | transponiendo el 20 al otro miembro con la operación inversa |
| $40 = \frac{8}{3}t$ | efectuando la sustracción |

$t = \frac{40 \cdot 3}{8}$ despejando $t$

$t = 15$ efectuando el producto y el cociente

c) A la 1:30 p.m.

El tanque demoró en llenarse 30 min, luego contamos 30 min a partir de la 1:00 p.m.

d) No se utilizó agua del tanque durante 15 min.
La cantidad de agua en el tanque no varía cuando el tramo es paralelo al eje $x$, o sea, desde los 30 min hasta los 45 min. Al efectuar la sustracción se obtiene 45 – 30 = 15.

e) 2:30 p.m.

El tanque se vació a los 90 min, luego a partir de la 1:00 p.m. adicionamos una hora y media y obtienes las 2:30 p.m.

El tanque se vacía cuando la cantidad de agua es igual a cero, es decir, $C = 0$, o sea, cuando la gráfica toca el eje de las $x$ y esto ocurre en el tercer tramo. Como ya sabes este valor coincide con el cero de la función.

Para calcular el cero de una función debes igualar a cero la ecuación. En este caso es la ecuación correspondiente al tercer tramo, de la cual conoces el valor de $n$, pero no el de $m$.

Para calcular el valor de $m$, como ya conoces de epígrafes anteriores, debes tomar un punto de ese tramo y sustituirlo en la ecuación. En este caso el punto que puedes extraer de ese tramo es (45; 100).

$100 = m \cdot 45 + 200$ sustituyendo en la ecuación las coordenadas del punto

$100 - 200 = m \cdot 45$ transponiendo el 200 al miembro izquierdo

$-100 = 45m$ efectuando la sustracción

$m = -\frac{100}{45}$ transponiendo el 45 al otro miembro

$m = -\frac{20}{9}$ simplificando la fracción

Luego la ecuación del tercer tramo es $C = -\frac{20}{9}t + 200$.

Ya estás en condiciones de calcular el cero de la función:

$0 = -\frac{20}{9}t + 200$ igualando a cero la ecuación

$\frac{20}{9}t = 200$ transponiendo al miembro izquierdo el término $-\frac{20}{9}t$ para que la pendiente nos quede positiva

$t = \dfrac{200 \cdot 9}{20}$ despejando $t$

$t = 90$ simplificando y efectuando el producto

f) Se vació en 45 min.

El tanque comenzó a vaciarse a los 45 min y terminó de vaciarse a los 90 min. Luego, sustraemos $90 - 45 = 45$.

**Recuerda que:**

Como puedes apreciar al trabajar con gráficos que tienen varios tramos, es necesario analizar:

- qué magnitud se refleja en cada eje,
- cuántos tramos tiene,
- cómo se comporta el proceso representado en cada tramo,
- qué inciso se corresponde con cada uno de ellos,
- si el inciso se puede resolver gráfica o analíticamente.

## *Ejercicios*

1. Un tanque contiene cierta cantidad de agua y se desea vaciar para limpiarlo. A las 9:00 a.m. se abre la llave y comienza el proceso de vaciado, el cual se detiene 4 min después para hacer algunos reajustes y luego se vuelve a abrir la llave. El gráfico (fig. 3.111) muestra cuál es la altura del agua durante el tiempo que duró el proceso.

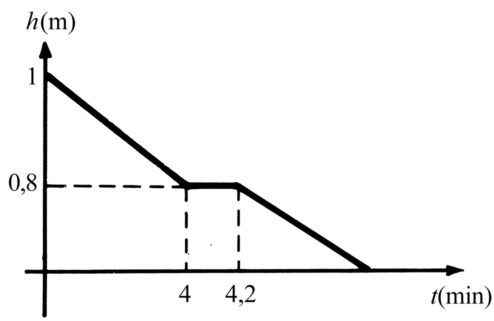


Figura 3.111

   a) ¿A los cuántos minutos de haber comenzado el proceso de vaciado la altura del agua en el tanque era de 0,9 m?
   b) ¿Qué altura tenía el agua en el tanque a las 9:03 a.m.?
   c) ¿Qué tiempo estuvo cerrada la llave para los reajustes?
   d) Si después de abrirse de nuevo la llave la altura del agua varía según la ecuación $h = mt + 1{,}5$, ¿a qué hora se vació completamente?

2. La gráfica (fig. 3.112) muestra cómo varía la temperatura de una sustancia $A$ durante varias horas a partir de las 2:00 p.m. al exponerse a diferentes procesos.

2.1. ¿Al iniciarse el proceso la sustancia se calienta o se enfría? Argumenta tu respuesta.

2.2. Marca con una X la respuesta correcta:
a) La temperatura inicial de la sustancia fue de:

___ 70 °C ___ 30 °C ___ 10 °C

b) La sustancia alcanzó los 30 °C a las:

___ 2:05 p.m. ___ 2:30 p.m.

___ 2:50 p.m. ___ 7:00 p.m.

c) La temperatura estuvo ascendiendo durante:

___ media hora ___ hora y media

___ 70 h ___ 1 h 50 min

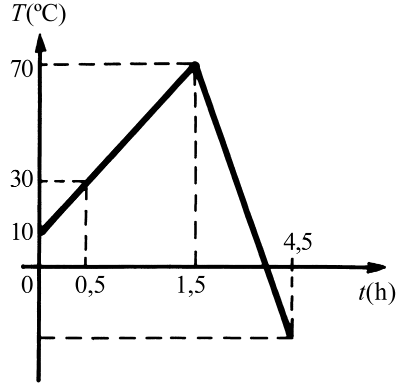



Figura 3.112

2.3. ¿A las cuántas horas de iniciado el proceso, la sustancia alcanzó la temperatura máxima y de cuánto fue?

2.4. Si la sustancia alcanza los 0 °C de temperatura a las 4:00 p.m., ¿cuál fue la temperatura mínima alcanzada?

3. Un abuelo salió a las 7:00 a.m. de su casa y caminó hasta el kiosco de periódico, allí hizo la cola; compró el periódico y fue hacia el parque más cercano donde hizo sus ejercicios con los demás abuelos de su círculo. Al terminar, regresó a su casa. El gráfico (fig. 3.113) muestra un aproximado del recorrido realizado desde que salió de su casa hasta que regresó.

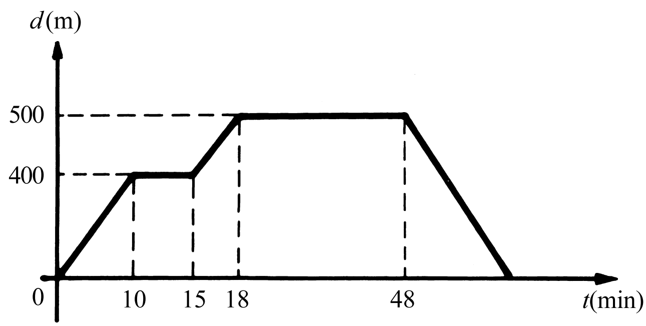



Figura 3.113

3.1. Completa los espacios en blanco:

a) El kiosco se encuentra a _____ metros de la casa del abuelo.

b) El abuelo estuvo en el parque durante _______ hora.

c) El parque se encuentra a ______ del kiosco.

3.2. Marca con una X la respuesta correcta.

a) La ecuación que describe el recorrido del abuelo de su casa al kiosco es:

___ $d = 10t + 400$ ___ $d = 4t$ ___ $d = 40t$ ___ $d = 4t + 400$

b) Durante el trayecto, desde que salió de su casa hasta que regresó a esta, el abuelo recorrió:

___ 400 m ___ 1 km ___ 1 400 m ___ 900 m

3.3. Si la ecuación que describe el regreso a la casa del abuelo es $d = -\frac{125}{3}t + n$, ¿a qué hora regresó a su casa?

4. A las 8:00 a.m. la piscina de un centro deportivo estaba completamente llena para realizar las competencias de natación de la Copa Pioneril. Al finalizar la competencia, se colocan unas bombas de agua para vaciarla y limpiarla.
La gráfica (fig. 3.114) muestra la cantidad de agua que hay en la piscina durante el tiempo que duró el proceso descrito hasta vaciarse completamente.

*t*: tiempo transcurrido en hora.
*C*: cantidad de metros cúbicos de agua que hay en la piscina.

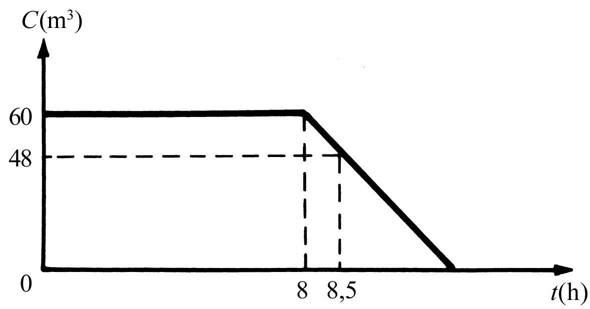



Figura 3.114

4.1. Completa los espacios en blanco:

a) La piscina tiene una capacidad de ______ $m^3$.

b) La piscina se mantuvo llena durante ______ minutos.

c) A las 4:30 p.m. la piscina tenía _____ $m^3$ de agua.

4.2. Marca con una X la respuesta correcta:

a) La ecuación que describe el proceso de vaciado de la piscina es:

___ $C = 24t + 60$ ___ $C = -24t + 60$ ___ $C = -24t + 252$ ___ $C = 8t + 60$

b) La piscina comenzó a vaciarse a las:

___ 8:00 p.m. ___ 8:08 a.m. ___ 4:00 p.m. ___ 6:00 p.m.

4.3. ¿A qué hora se vació completamente la piscina?

5. La gráfica (fig. 3.115) muestra el proceso de llenado de un tanque de agua durante cierto tiempo hasta que se llena totalmente.

   $h$: altura que alcanza el agua del tanque, en decímetro.
   $t$: tiempo transcurrido en minuto.

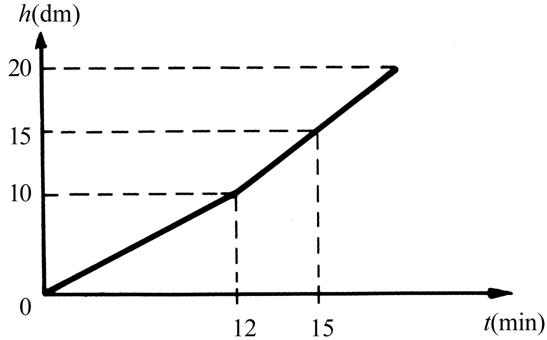


Figura 3.115

   a) Escribe la ecuación que describe el proceso de llenado del tanque durante los primeros 12 min.
   b) Calcula la altura que había alcanzado el agua a los 3 min de iniciado el proceso.
   c) Si la altura máxima que alcanzó el agua en el tanque fue de 20 dm, ¿qué tiempo demoró en llenarse totalmente?
   d) ¿En qué tramo era mayor la presión del agua? Justifica esta situación mediante cálculos.

6. La gráfica (fig. 3.116) muestra la velocidad con que se desplaza un móvil en cada momento durante las primeras horas de recorrido en una autopista.

   $V$: (velocidad en kilómetro por hora)
   $t$: (tiempo en hora)

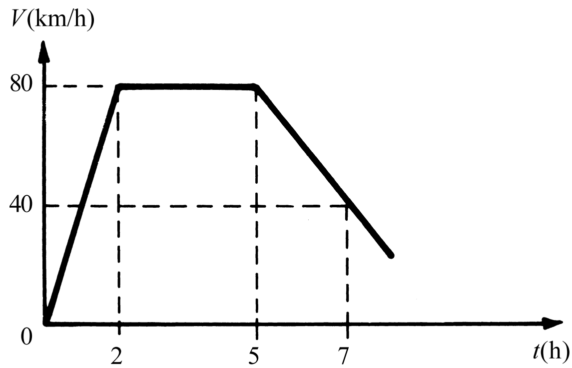


Figura 3.116

6.1. Marca con una X la respuesta correcta.

   a) La ecuación que describe la variación de la velocidad del móvil durante las 2 primeras horas es:

   ___ $V = 2t$ ___ $V = 40t$ ___ $V = \frac{1}{40}t$ ___ $V = 2t + 80$

   b) La velocidad del móvil aumentó durante:
   ___ 2 min ____ 80 h ____ 120 min

6.2. ¿Cómo se comportó la velocidad del móvil de las 2 a las 5 h? Escribe la ecuación que define esta correspondencia en este tramo.

6.3. ¿Qué velocidad tenía el móvil a la hora y media de haber iniciado el recorrido?

6.4. Si después de las 5 primeras horas, la variación de la velocidad se mantiene igual hasta detenerse, calcula el tiempo que duró el desplazamiento del móvil desde que se inició el recorrido.

7. En el sistema de coordenadas, los segmentos, $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ trazados, ilustran los kilómetros recorridos por un móvil en las seis primeras horas de un viaje (fig. 3.117).

$t$: tiempo transcurrido en hora
$d$: kilómetros recorridos

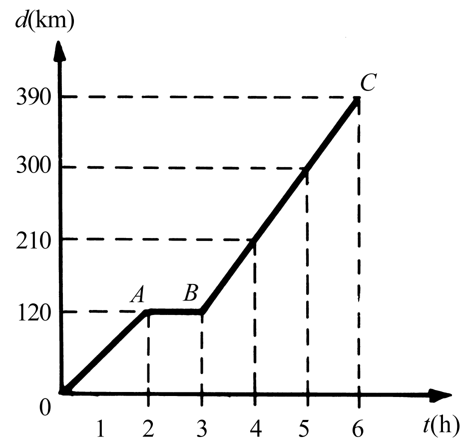


Figura 3.117

7.1. Completa el espacio en blanco.
Después de iniciado el recorrido, el móvil estuvo detenido durante: ______.

7.2. Selecciona la respuesta correcta marcando con una X.

a) En recorrer los últimos 180 km el móvil demoró:

___ 3 h ___ 1,5 h ___ 2 h ___ 2,5 h

b) Si después de las 6 primeras horas transcurridas, el desplazamiento del móvil se describe por la función lineal de ecuación $d = 50t + 90$; entonces ha recorrido 540 km al cabo de:

___ 6,5 h ___ 8 h ___ 9 h ___ 10 h

7.3. Escribe la ecuación de la función lineal que describe el desplazamiento del móvil representado por el segmento $\overline{BC}$.

8. La tabla 3.39 muestra la temperatura a distintas horas de un día determinado.

Tabla 3.39

| **Hora** | 6:00 a.m. | 9:00 a.m. | Medio día | 3:00 p.m. | 6:00 p.m. |
|---|---|---|---|---|---|
| **Temperatura** | 12 ºC | 17 ºC | 14 ºC | 18 ºC | 15 ºC |

De los gráficos de la figura 3.118, ¿cuál pudiera ser la gráfica que muestra la información de la tabla?

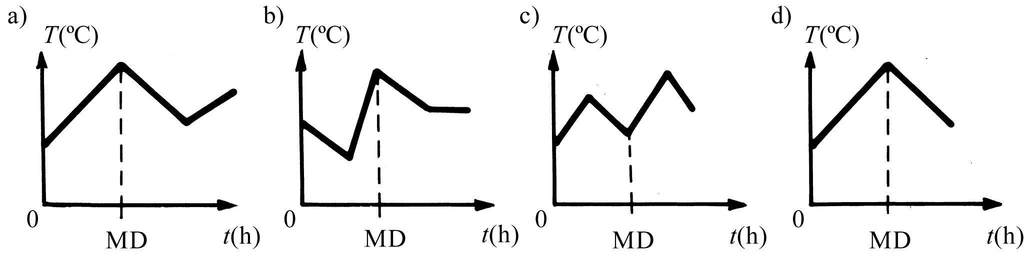



Figura 3.118

9. Un ómnibus escolar debe transportar estudiantes de una secuandaria básica para visitar un lugar de interés histórico-cultural. Se conoce que el ómnibus inició el recorrido a la hora prevista y después de transcurrido cierto tiempo alcanzó la velocidad máxima que mantuvo hasta que inició el proceso de detención.

   De las gráficas de la figura 3.119, ¿cuál es la que representa la situación anteriormente descrita?

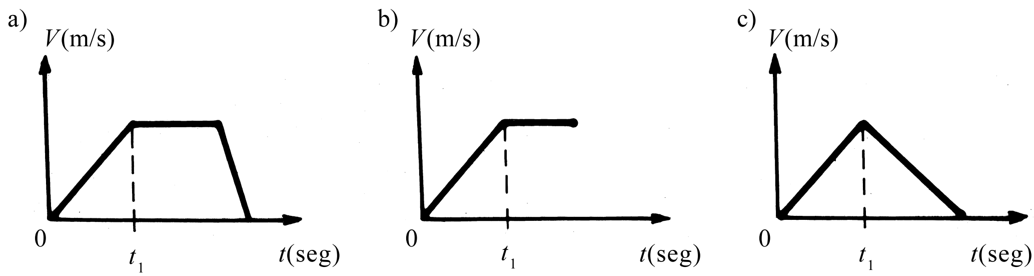



Figura 3.119

10. Al medir la temperatura de 5,0 kg de cobre en estado líquido, se observa que baja durante cierto período de tiempo. Después, se aprecia que permanece constante y finalmente en un tercer momento, se observa que la temperatura vuelve a descender. ¿En cuál de los gráficos de la figura 3.120 se refleja esa situación si en el eje de las abscisas se ha indicado el tiempo $t$ transcurrido (en minuto) y en el eje de las ordenadas, la temperatura $T$ (en °C)?

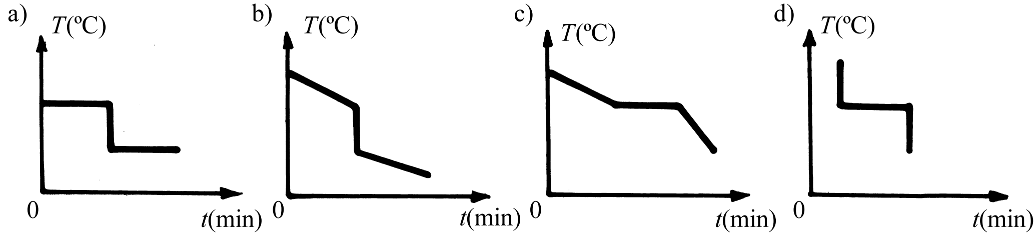



Figura 3.120

11. Eduardo se va de vacaciones a una casa de descanso situada a 400 km de su casa; para ello decide hacer el recorrido en coche. La primera parada, de 30 min, la hace al cabo de hora y media para desayunar, habiendo realizado la mitad del recorrido. Continúa su viaje sin problemas durante 1 h, pero a 100 km del final hace una parada de 15 min. En total tarda 4 h en llegar a su destino.

    a) Representa la situación descrita en una gráfica *tiempo-distancia recorrida*.
    b) Escribe la ecuación que describe la distancia recorrida por Eduardo durante la primera hora y media.
    c) ¿Qué tiempo, en total, estuvo detenido Eduardo durante el recorrido realizado hasta la casa de descanso?
    d) Si Eduardo salió de su casa a las 8:00 a.m., ¿a qué hora llegó a su destino?

## EJERCICIOS DEL CAPÍTULO

1. Dadas las expresiones algebraicas siguientes calcula el valor numérico para los valores que se indican.

    a) $0{,}5\, m^3n^2 - m^2n + 1{,}75m - 3{,}25 \quad m = 0{,}5$ y $n = -1$
    b) $2a^2b^4 + ab^2 - ab \quad a = -2$ y $b = -3$

2. Efectúa:

    a) $3b^2 + bc^2 + 2(7b^2 - 4c^2)$
    b) $3q - p - (2 - 8q)$
    c) $5m - n^2 - (2m + 3 - 4n^2)$
    d) $2cd + d^2 - (4cd - 7d^2)$
    e) $2 - 8x^2 + (3x - 4)(x + 2)$
    f) $(2m - 5)(m^2 + 4m - 1) + 7m$
    g) $7a^2 + 2ab - 3(4a^2 + ab + 1) + 5a^3$
    h) $(x^2 + 2x - 15) : (x - 3)$
    i) $(4a^2 + b)(a^2 - 3b)$
    j) $(2m^3 + 3m^2 + 4) : (m + 2) + m^2 - 4m$
    k) $3x^2 - 7 + (x - 2)(x + 2) + 5x$

3. Simplifica:

    a) $7a^2 - [-3ab - (2a^2 - ab) + 4]$
    b) $3p^2q - \{5pq + [-2p^2q - (pq - 3) + p^2q]\}$
    c) $4x^2 - [2xy + 3x(x - 5y) - x^2]$
    d) $5q^2 + 3[2q^2 - (3p + q)(p - 4q)]$

4. Calcula y simplifica

    a) $(2m + n)(m - 3n) - 3(m^2 - 5n^2)$
    b) $(8b^2 - 10b + 3) : (2b - 1) + (-3b + 4)$
    c) $\dfrac{3x(4x-3)-(4x^2-3x+5)}{2x+1}$

5. Prueba que las igualdades siguientes se cumplen:

    a) $7a^2 - [2ab + (6a^2 - 3ab)] = a^2 + ab$

b) $\dfrac{3m^2 - 13mn - 10n^2}{m - 5n} - 3(m + n) = -n$

6. Sean:

   $A = 3c^2 - 12d^2$ $\qquad B = 2c - 1$ $\qquad C = c - 2d$ $\qquad D = 8c^2 + 16cd$

   Calcula:

   a) $2A + B \cdot C$ b) $A : C - B$ c) $(A \cdot B) - D$ d) $B \cdot C - D$ e) $C^2 - A + D$

7. Resuelve las ecuaciones siguientes:

   a) $4x - (x - 3) + 2x(x - 5) = 13 + 2x(x - 1)$
   b) $4a + a(a + 2) = 4(5 - a) + a^2$
   c) $7(1{,}4x - 2) - 8 = 3x - (-4{,}8x + 6)$
   d) $(2x + 3)(x - 4) = 2x^2 + x$
   *e*) $x(x - 6) + 1 = (x + 5)(x - 3)$

8. Crucigrama (fig. 3.121)

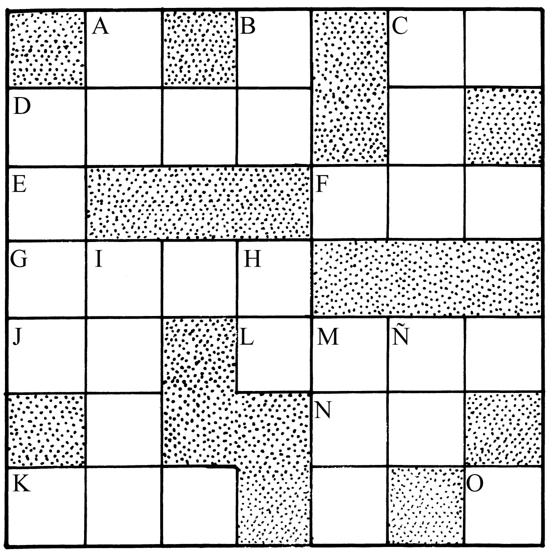



Figura 3.121

*Verticales:*

A. $3x + 2 = 32$
B. $5(x - 2) - 25 = 6(x + 10) - 2(x + 5)$
C. $2(4 - 3x) = 4(110 - 2x)$
E. $3x(x - 3) - 9 = x + (x - 1)(3x - 8) + 10$
H. $9x + 9 = 900$

I. $\dfrac{1}{4}(x - 8) + 2x(x - 1) = (2x + 5)(x + 20) - 30(x - 5) - 17x$

M. $\frac{x}{3} - 11 = x - 233$

Ñ. $(x - 2)(x - 3) + 6x + 5 = (x + 3)^2 - 4(x + 20) - 3$

*Horizontales:*

C. $7x - 4 = 171$

D. $8(x - 7) - 4 = 7(x + 135)$

F. $\frac{1}{2}x + 2(x + 4) - 10x = 8(11 - x)$

G. $8(x - 5) - 3x = 35\ 705$

J. $4(x - 18) = 3x + 8$

K. $(x + 10)(x + 4) + 5(10x - 25) = (x + 25)^2 + 1\ 866$

L. $9x - 77 - (8x + 11) = 5$

N. $(x + 7)(x - 5) - x(x - 1) - 7 = 9x - 7(x + 1)$

Ñ. $8x - \frac{2}{3}(x - 9) = 7(x + 5)$

O. $5x - 4x + 3x + 8 = 8$

9. En el primer año de una escuela pedagógica hay 360 estudiantes. En la especialidad de Educación Especial hay 30 estudiantes más que en la especialidad de Educación Preescolar y en la especialidad de Educación Primaria hay tantos estudiantes como en las dos otras especialidades anteriores juntas. ¿Cuántos estudiantes hay en cada especialidad en el primer año de esa escuela pedagógica?

10. En una cooperativa de producción agropecuaria se tiene cierta cantidad de hectáreas de tierra dedicadas al cultivo de yuca, boniato y cítricos. La sexta parte de las hectáreas está sembrada de yuca, el 40 % de boniato y las restantes 65 ha de cítricos. ¿Cuántas hectáreas están sembradas en esta cooperativa de producción agropecuaria de yuca y boniato?

11. Para la campaña de frío un organopónico sembró tomate, cebollinos y lechuga. En febrero la mitad del total de quintales cosechado fue de tomate, trece quintales fueron de lechuga, y de cebollinos se cosecharon ocho quintales más que la quinta parte del total de quintales cosechados. ¿Cuántos quintales de tomate y cebolla se cosecharon?

12. En un triángulo isósceles de 48 cm de perímetro la longitud de cada uno de sus lados no base es dos veces y media la longitud del lado base. ¿Cuál es la longitud de los lados del triángulo?

13. De dos ángulos suplementarios se conoce que la amplitud de uno es el duplo de la amplitud del otro. ¿Cuál es la amplitud de cada uno de esos ángulos suplementarios?

14. Las longitudes de los tres lados de un triángulo son números naturales consecutivos. Si el perímetro del triángulo es 72 mm, cuáles son las longitudes de sus lados.

15. Calcula el área de un rectángulo sabiendo que la longitud del ancho es el 60 % de la longitud del largo y su perímetro es 64 cm.

16. En un torneo de fútbol suramericano se anotaron 48 goles en total, de ellos 16 los anotó el equipo de Argentina, 12 el de Brasil y 4 el de Colombia.
Halla la razón entre:

a) El número de goles anotados por Argentina y el total de goles anotados en el torneo.
b) El número de goles anotados por Brasil y el total de goles anotados en el torneo.
c) El número de goles anotados por Colombia y el total de goles anotados en el torneo.
d) El número de goles anotados por Argentina y el número de goles anotados por Brasil.
e) El número de goles anotados por Brasil y el número de goles anotados por Colombia.

17. La razón entre las hectáreas sembradas de col y lechuga en un organopónico es 2 : 5. Si hay sembradas 30 ha de col,

a) ¿cuántas hectáreas hay sembradas de lechuga?;
b) ¿cuántas hectáreas hay sembradas en total?

18. Se realizó una encuesta a 840 personas para conocer quién es el mejor jugador del mundo actualmente, entre el argentino Lionel Messi y el portugués Cristiano Ronaldo. Dos de cada tres encuestados votó por el astro argentino.
¿Cuántos votos obtuvo cada jugador?

19. Sea el conjunto $M = \{1; 3; 7; 9; 12; 21; 24; 60\}$
Forma subconjuntos de $M$ cuyos elementos estén en la razón:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 7

20. Las tablas 3.40 a 3.42 muestran proporcionalidades directas o inversas. Identifica que tabla corresponde a cada una, halla el factor de proporcionalidad y completa la tabla.

Tabla 3.40

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Masa del aluminio** | 2,7 | 5,4 | | 13,5 |
| **Volumen del aluminio** | 1 | 2 | 3 | |

Tabla 3.41

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Cantidad de obreros** | | 14 | 9 | 6 |
| **Tiempo (en día)** | 1 | 18 | | 42 |

Tabla 3.42

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Cantidad de piezas producidas** | 120 | | 300 | 510 |
| **Tiempo (en hora)** | 2 | 2,5 | 5 | |

21. En la CPA de Holguín Guillermón Moncada, se alcanzó en el año 2012 un rendimiento aproximado de 7,1 t/ha en el cultivo del arroz. La CPA cuenta actualmente con 26 ha sembradas de arroz.

    a) ¿Cuántas toneladas de arroz se podrán cultivar de mantener igual rendimiento?
    b) ¿Cuántas hectáreas se necesitan sembrar para obtener 248,5 t de arroz?

22. Un ganadero tiene pienso suficiente para alimentar 220 terneras durante 45 días. ¿Cuántos días podrá alimentar con igual cantidad de pienso a 450 terneras?

23. Si cuatro personas pueden escribir en la computadora un trabajo en 8 días, ¿cuántas personas más se necesitarán para escribir el trabajo en el 25 % de ese tiempo, si se trabaja a igual ritmo?

24. Luis y Ariel se encuentran en la playa y observan la longitud de su sombra sobre la arena. Luis tiene 1,80 m de estatura y comprueba que su sombra era de 0,60 m. ¿Cuál es la estatura de Ariel, si su sombra tenía, en ese momento, 0,55 m?

25. Representa por sus correspondientes puntos del plano, respecto a un sistema de coordenadas rectangulares, los pares siguientes:

    a) (1; 4) b) (–3; 2) c) $\left(\frac{8}{5}; -4\right)$ d) (–2,8; – 7) e) (5,5; 0)

    f) (0; 6) g) (–3; 0) h) (0; –8,8) i) $\left(\frac{1}{5}; \frac{4}{5}\right)$ j) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{8}\right)$

26. Determina las coordenadas de los puntos representados en la figura 3.122.

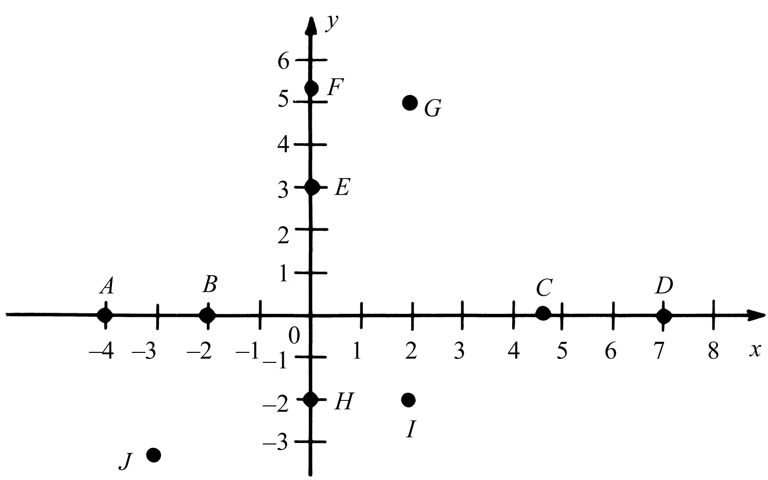



Figura 3.122

27. Representa gráficamente las figuras siguientes:

    a) El segmento cuyos extremos son $A(3; -1)$ y $B(0; 6)$.
    b) La recta $MN$ que pasa por los puntos $C(-2; -2)$ y $D(4; 3)$.
    c) El triángulo de vértices $M(-4; 0)$, $N(6; 0)$ y $P(-2; 5)$.

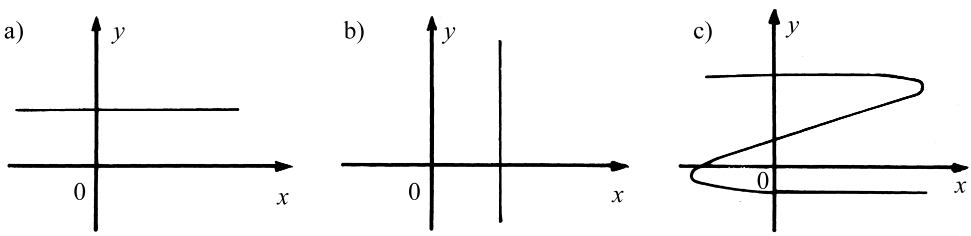
28. Dados los puntos A(3; 5), B(– 4; 2), C(1; –1), D(–2; –5) y E(0; 0).

    a) Determina las coordenadas de los puntos simétricos a los dados respecto al eje $x$.
    b) Determina las coordenadas de los puntos simétricos a los dados respecto al eje $y$.
    c) Determina las coordenadas de los puntos simétricos a los dados respecto al origen de coordenadas.

29. Determina cuáles de las siguientes correspondencias son funciones y cuáles no. Fundamenta tu respuesta.

    a) La correspondencia de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que a cada número real asocia su cuádruplo, es una función.
    b) La correspondencia de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ que a cada número racional asocia su raíz cúbica, es una función.
    c) La correspondencia de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que a cada número natural asocia su antecesor, es una función.
    d) La correspondencia de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ que a cada número entero asocia su sucesor, es una función.
    e) La correspondencia de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que a cada número real asocia el cuadrado de –2, es una función.
    f) La correspondencia de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ que a cada número entero asocia su mitad, es una función.
    g) La correspondencia de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ que a cada número real $x \to \sqrt{x}$, es una función.
    h) La correspondencia de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$ que a cada número natural $x \to |x|$, es una función

30. Analiza si las correspondencias de la figura 3.123 son funciones o no. Fundamenta tu respuesta en cada caso.



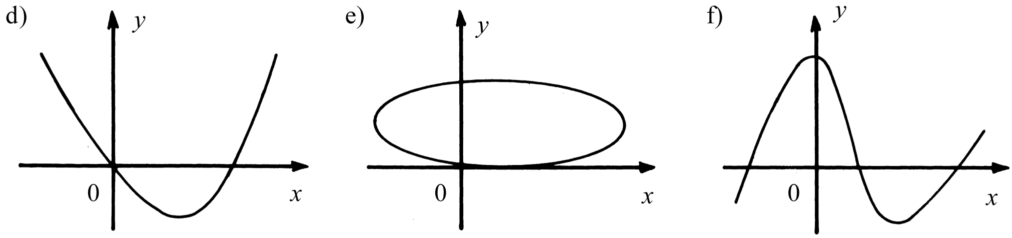



Figura 3.123

31. Marca con una X la respuesta correcta.
De las correspondencias de la figura 3.124 la que no representa una función es:

a) ___ b) ___ c) ___ d) ___

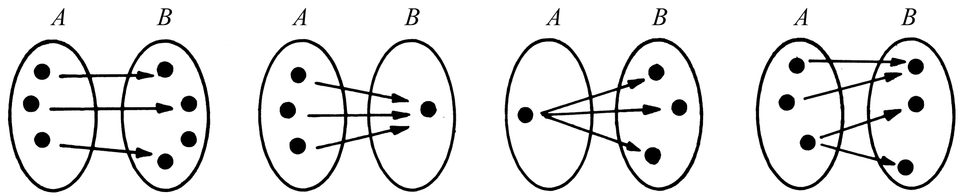



Figura 3.124

32. Determina cuáles de las correspondencias, dadas en las tablas 3.43 a 3.45, son funciones y cuáles no. Fundamenta tu respuesta.

Tabla 3.43

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 1,5 | 2 | 1,5 | 2 |
| $y$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

Tabla 3.44

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
| $b$ | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |

Tabla 3.45

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | 0 | 0,3 | 1,2 | 1,7 | 2 |
| $n$ | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 |

32.1. Escribe el dominio y la imagen en las correspondencias que consideraste como funciones.

33. Sean los conjuntos $F$ ={Messi; Cristiano; Pirlo; Neymar; Casillas; Podolski} y $P$ = {España; Cuba; Argentina; Brasil; Portugal; Alemania; Italia; Inglaterra; Uruguay}. Di si la correspondencia que a cada futbolista del conjunto $F$ le asocia su país de origen es una función.

34. Analiza si la correspondencia que a cada imagen del conjunto $A$ se le hace corresponder su significado en el conjunto $B$, es una función (fig. 3.125). Fundamenta tu respuesta.

*A* *B*

*photographer*

*teacher*

*cameraman*

*sportsman*

*secretary*

*actress*

*policeman*

Figura 3.125

35. Sean los conjuntos $O$ = *{Oda a las casas; La sierra; Santa Juana de América}* y $G$ = {Dramático; Lírico; Épico}. Di si la correspondencia que a cada obra literaria del conjunto $O$ le asocia su género en el conjunto $G$ es una función.

36. Sean los conjuntos $P$ = {Cuba; Venezuela; Bolivia; Ecuador; Rusia; Japón; España} y $C$ = {Tokio; La Paz; La Habana; Moscú; Caracas; Lima; Beijing; Buenos Aires}. Di si la correspondencia que a cada país $P$ le asocia su capital $C$ es una función.

37. Sea la función $f$ definida en los reales por la ecuación $f(x) = 3x - 5$.

    a) Represéntala en un sistema de coordenadas rectangulares.
    b) Di su monotonía. Argumenta tu respuesta.
    c) Verifica si el punto $M\left(-\frac{1}{3}; -6\right)$ pertenece a la función $f$.
    d) Calcula: $2f(-1) + \sqrt[3]{64}$.
    e) Calcula el área del triángulo limitado por la recta trazada y los ejes de coordenadas.
    f) Calcula el valor de $a$ si $f(2a) = f(a - 1)$

38. Sean la función $g$ definida por la ecuación $g(x) = mx - 2$ y $A(2; -1)$ un punto de su representación gráfica.

    a) Halla el valor de $m$.

b) Representa gráficamente la función $g$.
c) Calcula su cero.
d) Di su monotonía.

e) Prueba que: $\dfrac{g(-4)+4g(1)}{10} = -0{,}7$.

f) Halla la abscisa del punto de la gráfica de $g$ cuya ordenada es –3.

39. a) Determina la ecuación de una función lineal $h$ cuya gráfica pasa por los puntos $P(2;\ 3)$ y $R(-2;\ 1)$.

  b) Traza en un sistema de coordenadas el segmento $\overline{PR}$.

  c) Escribe las coordenadas de un punto que se encuentre sobre el segmento $\overline{PR}$.

  d) Traza desde los puntos $P$ y $R$ segmentos perpendiculares al eje $x$ y calcula el área del cuadrilátero limitado por el segmento $\overline{PR}$, los dos segmentos trazados y el eje $x$.

40. En la gráfica (fig. 3.126) aparece representada una función lineal de ecuación $f(x) = mx + n$.

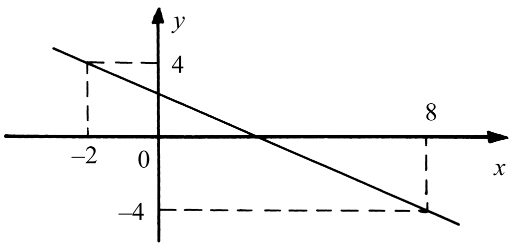



Figura 3.126

Escribe verdadero (V) o falso (F). Argumenta las que consideres falsas.

a) ___ La función $f$ es creciente.

b) ___ La ecuación de la función $f$ es $f(x) = -\dfrac{4}{5}x + \dfrac{12}{5}$.

c) ___ El dominio de $f$ son los reales.

d) ___ El cero de la función $f$ es (3; 0).

e) ___ La intersección de la gráfica con el eje de las ordenadas es el punto de coordenadas (0; 2,4).

f) ___ El par (–1; 3,2) pertenece a la representación gráfica de $f$.

g) ___ Al calcular $f(-2{,}5)$ se obtiene un número fraccionario.

41. Una piscina llena de agua se vacía utilizando una bomba de agua. Al cabo de cierto tiempo se detiene el proceso de extracción por fallas de la bomba y se coloca otra. La gráfica (fig. 3.127) muestra cómo varía la altura del agua en la piscina a partir de las 8:00 p.m.

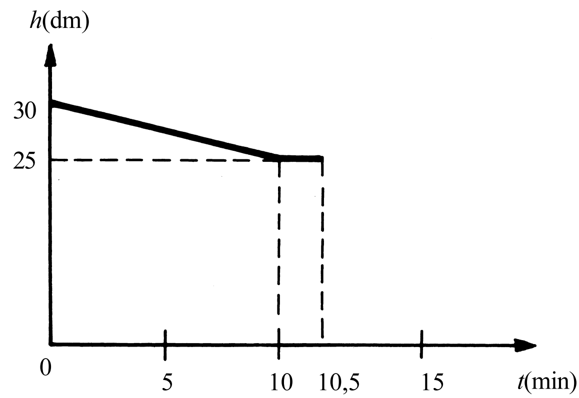



Figura 3.127

41.1. Completa los espacios en blanco.

a) La altura del agua en la piscina estando llena era de ______.
b) La bomba de agua se detuvo a las _____ p.m.
c) A las 8:10 p.m. el agua alcanzaba una altura de: ______.

41.2. Marca con una X la respuesta correcta.

a) La ecuación que describe el proceso de vaciado durante los primeros 10 min es:

___ $h = 0{,}5t + 30$ ___ $h = -0{,}5t + 25$

___ $h = -\,0{,}5t + 30$ ___ $h = -25t + 30$

b) La bomba de agua se cambió en:
___ 30 min ___ 30 s ___ 10,5 min ___ 5 min

41.3. ¿A qué altura se encontraba el agua de la piscina a los 4 min de iniciado el proceso de vaciado?

41.4. ¿A los cuántos minutos de iniciado el proceso de vaciado la altura del agua alcanzó los 26 dm?

41.5. Si a partir del cambio de bomba la altura del agua varió según la ecuación $h(t) = -5t + 77{,}5$, ¿cuántos minutos en total demoró la piscina en vaciarse completamente?

41.6. Representa en la misma gráfica el proceso de vaciado de la piscina después del cambio de la bomba de agua.

41.7. ¿Cuál de las bombas de agua utilizadas tuvo mayor rendimiento? Argumenta tu respuesta.

42. En la gráfica (fig. 3.128) se ha representado la variación de la temperatura de dos sustancias $A$ y $B$, a partir de las 9:00 a.m. La ecuación que describe el comportamiento de la variación de la temperatura de la sustancia $B$ es $T = -\frac{5}{4}t + 20$.

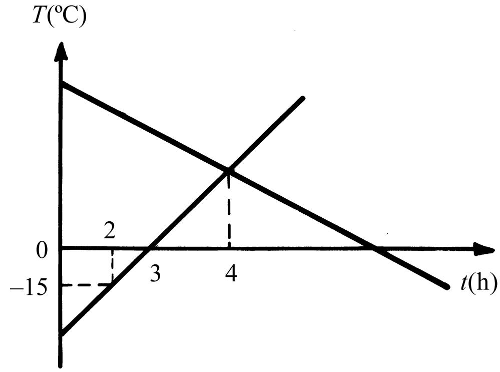



Figura 3.128

a) Identifica marcando con la letra correspondiente al lado de cada semirrecta, cuál es la gráfica de $A$ y cuál la de $B$. Argumenta.
b) ¿Cuál era la temperatura inicial de cada sustancia.
c) ¿Cuál de las sustancias es la que se enfría? Argumenta.
d) ¿A qué hora cada sustancia alcanzó los 0 °C?
e) ¿A las cuántas horas de iniciada la medición, las sustancias $A$ y $B$ alcanzaron la misma temperatura y de cuánto fue?

43. Desde su casa hasta la parada del metrobús, María tarda 5 min. La parada está a 200 m de su casa, espera durante 10 min, y al ver que el metrobús tarda más de lo normal, decide ir caminando a su lugar de trabajo, situado a 1 km de su casa. Al cuarto de hora de estar caminando y a 300 m de su trabajo, se da cuenta de que había olvidado sus documentos personales en casa y regresa a buscarlos, tardando 10 min en llegar.

a) Representa la gráfica tiempo-distancia a su casa.
b) Escribe la ecuación de la función lineal que describe la distancia recorrida por María entre los 15 y 30 min.
c) Si María salió de su casa a las 7:00 a.m., ¿a qué hora llegó a su casa de regreso?
d) ¿Cuántos metros caminó María desde que salió de su casa hasta su regreso?

## PARA LA AUTOEVALUACIÓN

### Reflexiona sobre lo aprendido

¿Cuál es el grado de un polinomio?

¿Qué tienes en cuenta cuando eliminas los paréntesis en una expresión algebraica?

¿Cómo procedes al efectuar la multiplicación de dos polinomios?

¿Cuál es la relación existente entre el dividendo, el divisor y el resto, en la división de un polinomio por un binomio?

¿Cuándo una ecuación en una variable es lineal?

¿A qué llamamos razón? ¿Y proporción?

¿Cómo determinas si una proporcionalidad es directa o inversa?

¿Sabes resolver problemas de proporcionalidad?

¿A qué llamamos función?

¿Cuál es el dominio y la imagen de una función?

¿A qué llamamos función lineal?

¿Qué representan en la ecuación los parámetros $m$ y $n$?

¿Cuál es la representación gráfica de una función lineal?

¿Sabes escribir la ecuación de una función lineal?

¿Sabes hallar su cero?

¿Cuál es la monotonía de una función lineal y de qué depende?

¿Cómo interpretar gráficos de funciones lineales definidas por tramos?

PONTE A PRUEBA

1. Dadas las expresiones $M = 4x^2 + 18x - 7$, $N = 5x^3 - 3x^2 - 32x - 12$, $P = x - 3$

   a) Halla el valor numérico de la expresión $2P - [M - 3N]$ para $x = -3$.
   b) Calcula $N : P - M$.

2. Resuelve las ecuaciones siguientes:

   a) $4x + 3(2x - 5) = 19 - 2(7 - 3x)$
   b) $10 - (x + 2)(x + 4) = 5x - x(x - 3)$

3. Alejandro le dice a sus compañeros de aula: “Mañana es el cumpleaños de mi mamá. La cantidad de años que cumple es el triplo de los que cumplió hace 26 años”. ¿Cuántos años cumple la mamá de Alejandro?

4. En 50 L de agua de mar hay 1 300 g de sal.

   a) ¿Cuántos litros de agua de mar contendrán 5,2 kg de sal?
   b) ¿Cuántos gramos de sal hay en 20 L de agua de mar?

5. Para envasar cierta cantidad de vino se necesitan 8 toneles de 200 L de capacidad cada uno.

   a) Para envasar la misma cantidad de vino empleando 32 toneles, ¿cuál deberá ser la capacidad de esos toneles?
   b) Si se consiguen toneles de 8 L de capacidad, ¿cuántos toneles se necesitarán para envasar esa cantidad de vino?

6. Escribe verdadero (V) o falso (F) según corresponda. Argumenta las que consideres falsas.

a) ___ La ecuación $2(x + 1) = 7$ tiene solución en el conjunto de los números naturales.
b) ___ Las ecuaciones $x(x + 5) + 7 = 2x - x(1 - x)$ y $5x + 7 = x$ son equivalentes.
c) ___ Toda ecuación lineal tiene solución en el conjunto de los números reales.
d) ___ La correspondencia definida de Z en Z que a cada número entero le asocia su mitad aumentada en 5, es una función.
e) ___ La función $f$ definida en el conjunto de los números reales por la ecuación $f(x) = -2 + 4x$ es decreciente.
f) ___ Sea la función $g$ dada por su ecuación $g(x) = -\frac{2}{5}x - 4$, entonces $g\left(-\frac{5}{2}\right) = -3$.
g) ___ Toda ecuación de la forma $y = n$ representa una recta paralela al eje de las ordenadas.
h) ___ El par $(-2;\ 2{,}5)$ pertenece a la representación gráfica de la función $t(x) = -0{,}2x + 2{,}1$.

7. Marca con una X la respuesta correcta:

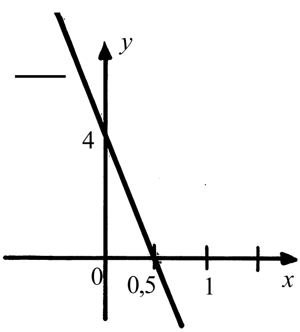
a) La función f de ecuación $f(x) = -\frac{1}{3}x - 3$:

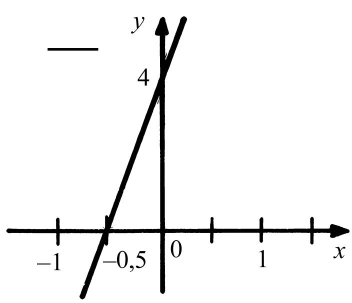
___ tiene cero $x = 9$ ___ es creciente ___ interseca al eje $y$ en $-3$.

b) La pendiente de la recta que pasa por los puntos $M(2;\ 7)$ y $N(3;\ -1)$ es:

___ $-8$ ___ $-\frac{1}{8}$ ___ $6$ ___ $-\frac{1}{6}$

c) De las gráficas de la figura 3.129 la que corresponde a la función $h$ de ecuación $h(x) = 4 - 8x$ es:

___ 


___ 

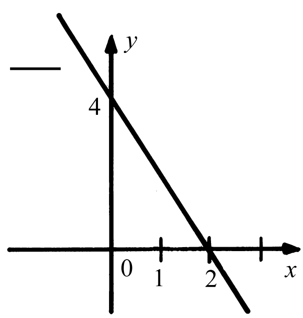

___ 


Figura 3.129

d) El par ordenado que pertenece a la representación gráfica de la función $g$ de ecuación $g(x) = \frac{2}{5}$ es:

___ (0; 0) ___ $\left(\frac{2}{5}; 0\right)$ ___ $\left(0; \frac{2}{5}\right)$ ___ No se puede determinar

8. Un frigorífico almacena varios productos. A las 8:00 a.m. se abre para cargar varios camiones que transportarán los productos hacia varios destinos. La gráfica (fig. 3.130) muestra la variación de la temperatura del frigorífico durante el tiempo que duró la descarga.

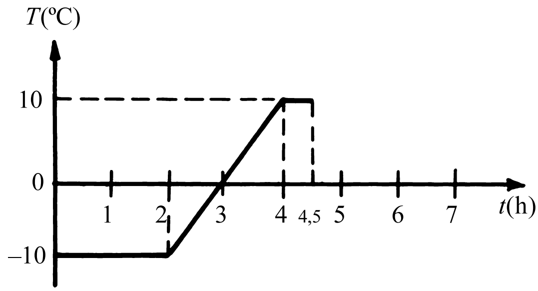



Figura 3.130

8.1. Completa los espacios en blanco.

a) La temperatura en el frigorífico a las 8:00 a.m. era de ______ °C.

b) A las 8:45 a.m., la temperatura en el frigorífico era de ______ °C.

c) La temperatura en el frigorífico estuvo ascendiendo durante _____.

d) Entre las 2 y las 4 h, la temperatura en el frigorífico varió _____ °C.

8.2. Marca con una X la respuesta correcta.

a) La temperatura en el frigorífico alcanzó los 0 °C a las:

___ 8:30 a.m. ___ 11:00 a.m. ___ 8:03 a.m. ___ 3:00 p.m.

b) A partir de las 4 h la temperatura del frigorífico no varió durante:

___ 5 min ___ 50 min ___ 30 min ___ 4 h 5 min

c) La ecuación que describe el proceso de ascenso de la temperatura en el frigorífico es:

___ $T = 10t - 10$ ___ $T = 10t + 10$ ___ $T = 10t + 30$ ___ $T = 10t - 30$

8.3. A partir de las cuatro horas y media se cierra el frigorífico y la temperatura comienza a descender. Si la ecuación que describe dicho proceso es $T = mt + 70$, ¿qué tiempo demoró el alcanzar nuevamente los 0 °C la temperatura del frigorífico?

8.4. Representa en la misma gráfica, el proceso de descenso de la temperatura hasta que el frigorífico alcanza nuevamente su temperatura inicial.

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS

**Epígrafe 3.1**

1. a) $4n$ $n$: un número b) $2n$ $n$: un número c) $\frac{3}{5}n$ $n$: un número

   d) $n - 1$ $n$: un número natural distinto de cero e) $2n + 1$ $n$: un número natural

   f) $\frac{1}{4}n$ $n$: un número g) $n$, $n + 1$ $n$: un número natural

   h) $8z$ $z$: un número entero i) $x - 10 = y$ $x$: número mayor, $y$: número menor

   j) $3n + \frac{2}{5}m$ $n$: un número, $m$: otro número

2. a) $p$ $p$: cantidad de piezas producidas por la fábrica.

   b) $\frac{1}{2}h$ $h$: pobreza extrema y el hambre.

   c) $\frac{1}{5}a$ $a$: área de un terreno que se dedica al cultivo de cebollas.

   d) $2x + y$ $x$: amplitud de los ángulos base de un triángulo isósceles
   $y$: amplitud del ángulo opuesto a la base de un triángulo isósceles

   e) $2(a + b)$ $a$: longitud del lado mayor del rectángulo
   $b$: longitud del lado menor del rectángulo

   f) $g + \frac{3}{50}g$ $g$: ganancia planificada por EPCOMA para el 2012.

   g) $\frac{bh}{2}$ $b$: longitud de la base del triángulo rectángulo,
   $h$: longitud de la altura del triángulo rectángulo

   h) $\frac{4}{5}g$ $g$: gastos de una empresa

   i) $d + \frac{1}{10}d$ $d$: índice de desocupación en Portugal hace cinco años.

   j) $p + \frac{1}{5}p$ $p$: promoción de una escuela

k) $\frac{9}{10}f$  $f$: cantidad de fumadores

l) $\frac{2}{3}e$  $e$: cantidad de estudiantes de una escuela

m) $\frac{3}{5}m$  $m$: cantidad de estudiantes de un grupo.

n) $n-\frac{13}{100}n$  $n$: tasa de natalidad de Cuba en 1970

$c-\frac{3}{50}c$  $c$: tasa de crecimiento en Cuba en 1970

3. 3.1. b) 3.2. d) 3.3. c) 3.4. d) 3.5. a) 3.6. b) 3.7. c) 3.8. c) 3.9. c)

4. Ver la tabla 3.46.

Tabla 3.46

| **Situación matemática** | **Significado de la variable *m*** | **Expresión algebraica en función de la variable *m*** | **Valor numérico de la expresión para *m* = 5** |
|---|---|---|---|
| Área de un cuadrado | *m:* longitud del lado del cuadrado | $m^2$ | $m^2 = 5^2 = 25$ |
| El perímetro de un triángulo equilátero | *m:* longitud de los lados de un triángulo equilátero | $3m$ | $3m = 3 \cdot 5 = 15$ |
| El 60 % del área de un trapecio | *m:* área de un trapecio | $\frac{3}{5}m$ | $\frac{3}{5}m = \frac{3}{5} \cdot 5 = 3$ |
| El producto de un número natural y su sucesor | *m:* un número natural | $m(m + 1)$ | $m(m + 1) = 5(5 + 1) = 30$ |
| La mitad de la amplitud de un ángulo aumentada en tres | *m:* amplitud de un ángulo | $\frac{1}{2}m+3$ | $\frac{1}{2}m+3=\frac{1}{2}\cdot 5+3=$ $=\frac{11}{2}=5{,}5$ |

## Epígrafe 3.1.1

1. a) –10,5 b) –13 c) 0,4 d) –19 e) – 1,5 f) 20,4 g) –31 h) –7 i) –3,5 j) 24 k) 84

2. Ver la tabla 3.47.

Tabla 3.47

| **Expresión algebraica** | $\boldsymbol{m = 2}$ | $\boldsymbol{m = -1}$ | $\boldsymbol{m = \frac{1}{4}}$ | $\boldsymbol{m = 1{,}5}$ |
|---|---|---|---|---|
| $-3m$ | $-6$ | $3$ | $-\frac{3}{4}$ | $-4{,}5$ |
| $2m - 7$ | $-3$ | $-9$ | $-\frac{13}{2}$ | $-4$ |
| $4m^2 - 1$ | $15$ | $3$ | $-\frac{3}{4}$ | $8$ |
| $m^2 + 3m + 2$ | $12$ | $0$ | $\frac{45}{16}$ | $8{,}75$ |

3. a) 26 b) $\frac{1}{2}$ c) 0 d) $-\frac{9}{2}$

4. a) $-13{,}125 \in \mathbb{Q}$ b) $10{,}05 \in \mathbb{Q}_+$ c) $14 \in \mathbb{N}$ d) $-5 \in \mathbb{Z}$

5. 1

6. El valor numérico del polinomio para $x = -\frac{1}{3}$, $y = -5$ es 36 que es un múltiplo de cuatro.

7. a) Segundo grado b) Primer grado c) Segundo grado d) Cero grado
e) Tercer grado f) Noveno grado g) Sexto grado h) Octavo grado

8. El monomio de mayor grado es $4a^2b^4c^3$, pues es de noveno grado y los grados de los otros monomios son menores que nueve.

9. a) Primer grado b) Segundo grado c) Segundo grado d) Tercer grado
e) Segundo grado f) Cuarto grado g) Séptimo grado

**Epígrafe 3.2**

1. a) $9p$ b) $4d - 1$ c) $2 - jk$ d) $-q^3 - 3q^2 + 7q + 1$ e) $2w^2 - 5wv - v^2$
f) $2a^2b + 2ab - 6ab^2$ g) $12x^3y^2 - 4x^2y + x^3y^3 - 3x^3$ h) $6{,}8e^2g^2h - 7{,}5eg^2h$
i) $8s^2t - 14st + 3st^2$ j) $\frac{1}{5}a^3bc^2 + 5a^3b^2c - a^3b^3c^3 + 5$

2. a) $-3st - 2$ b) $-4z - 1$ c) $-7q + p + 11$ d) $8x - 5xy - x^2$ e) $-6mn^2 + 5$
f) $13p^2q + 3pq^3 - 5$ g) $12{,}7 - 2{,}5z^2$ h) $8a^2 - 1{,}8ab$ i) $7p + 5$

3. a) $8{,}6g + 7$. Valor numérico: $-1{,}6$ b) $-5hkj + 2$. Valor numérico: 62

5. a) $3{,}3a - 10b + 6{,}5$ b) $9{,}6a - 2{,}2b - 7$ c) $2{,}7a - 2b - 5{,}5$ d) $-1{,}9a + 11b - 13{,}5$
e) $11{,}6a - 11{,}2b + 14$ f) $11{,}7a - 7{,}2b + 5{,}5$

6. a) $-4x^4 - \frac{7}{4}x^3 - x - 1$ b) $4x^4 + \frac{1}{4}x^3 + 2x^2 - 5x + 7$

7. a) $7pq^2 - 3$ b) $-32$

8. a) $\frac{3}{2}x$ b) Perímetro de *AGFECD*: 72 cm, área de *AGFECD*: 216 cm$^2$

9. a) $C = 2x^3 - 11x^2 + 2x - 4$ b) Tercer grado

11. a) $S = 2x^3 - 2x^2 - 8x + 11$ b) Tercer grado c) 44,25

12. a) $P = 2x^2 - 2x - 6$ b) Segundo grado

**Epígrafe 3.2.2**

1. a) $15h^2k^3$ b) $-4{,}76g^7s^2$ c) $5k^2 + 10k$ d) $3v^5x^2 - 27v^5$ e) $-2z^2p - 2z^2p^2$
f) $8{,}3n^3 - 24{,}9n^2 + 16{,}6n$ g) $3w^4 + 6w^3 - 12w$ h) $h^4k^3 + h^3k^4 - 3h^3k^3$
i) $h^2 + 14h + 45$ j) $a^2 - 7a - 7b + ab$ k) $8m^2 + 10mn + 2n^2$
l) $2q^3r - 4qr^3 - q^2r^2 + 2r^4$ m) $x^2y^2 + 6xyz + 9z^2$ n) $k^3 + 6k^2 + 6k + 5$
ñ) $v^3 + 2v^2 - v - 2$ o) $5m^3 - 8m^2 + 16m + 8$
p) $3a^3b + 5a^2 + 6a^2b^2 + 3ab^3 + 10ab + 5b^2$
q) $2c^3d^4 - 4c^2d^3 + 10d^2c + c^2d^2 - 2cd + 5$ r) $7x^4 + 2{,}8x^3 - 8x^2 - 0{,}4x + 1$
s) $8p^5 + 6p^4 - 8p^3 + 5p^2 + 8p - 4$ t) $2q^4 - 2q^3p - q^2 + pq - 2p^2$
u) $4z^3 - 4zt^2 - 12z - 2tz^2 + 2t^3 + 6t$ v) $3x^2 - 6xy + 7x - 8y + 4$
w) $8x^5 - 6x^3 + 8x^2 + x - 2$

2. Ver la tabla 3.48.

Tabla 3.48

| $A - (B + C)$ | $(A + B)C$ | $A + B \cdot C$ | $A \cdot C + B$ |
|---|---|---|---|
| $-4x - 20$ | $2x^3 + 27x^2 + 120x + 175$ | $x^3 + 16x^2 + 82x + 135$ | $x^3 + 13x^2 + 55x + 75$ |
| $2x - 14$ | $2x^3 - 29x^2 - 98x - 49$ | $x^3 - 15x^2 + 71x - 105$ | $x^3 - 12x^2 + 26x + 63$ |
| $-2x^3 + 3x^2 + 9x - 5$ | $4x^4 - 11x^2 + 9x - 2$ | $4x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 19x - 6$ | $6x^3 + 3x^2 - 15x + 6$ |
| $-5x^2 + 7x + 6$ | $75x^3 + 215x^2 + 177x + 45$ | $50x^3 + 90x^2 + 71x + 21$ | $25x^3 + 140x^2 + 140x + 39$ |
| $14x - 14$ | $2x^3 - 13x^2 + 20x - 9$ | $x^3 - x^2 + 9x - 9$ | $x^3 - 14x^2 + 22x - 9$ |

3. a) $14a - 2ab + 21a^2b$ b) $160a^3b^2 + 5ab^2 - 60ab$ c) $-10{,}5$

4. a) $x^2 + xy - 6y^2$ b) $x^3 + x^2y - 5xy^2 + 3y^3$ c) $x^3 - 4x^2y + 5xy^2 - 2y^3$
d) $x^3 - 4x^2y + 5xy^2 - 2y^3 + x + 3y$ e) $-5x^2y + 10xy^2 - 5y^3$

5. a) $-2k^2 + 14$ b) $23k^2 + 3k - 10$ c) $-12k^2 + 3k - 5$ d) $5k^2 + 13$ e) $21k^3 + 51k^2 - 14$

7. $\frac{t}{3}(3t+9)+(t+2)(t-7)-2(t^2-t-7)$
$= t^2 + 3t + (t^2 - 7t + 2t - 14) - 2t^2 + 2t + 14$
$= t^2 + 3t + (t^2 - 5t - 14) - 2t^2 + 2t + 14$
$= t^2 + 3t + t^2 - 5t - 14 - 2t^2 + 2t + 14$
$= 0$

8. $A + 2aA$
$= (a - 3b) + 2a(a - 3b)$
$= a - 3b + 2a^2 - 6ab$
$= 2a^2 - 6ab + a - 3b$
Luego, $A + 2aA = AB$

$AB$
$= (a - 3b)(2a + 1)$
$= 2a^2 + a - 6ab - 3b$
$= 2a^2 - 6ab + a - 3b$

9. $-x^2y^2 + 2xy^2 - 3x^2y$

**División de polinomios**

1. a) $7p$ b) $-4m^2n$ c) $4{,}6w^3$ d) $2p + 3$ e) $3x^2 + 2$ f) $a^2 + a + 1$
g) $\frac{1}{2}-\frac{3d^2}{2c}$ h) $\frac{2}{3}a^2-\frac{2}{3}b^2$ i) $2z - 1$ j) $\frac{h^2}{k}-2+\frac{k}{h}$
k) $2p^5-\frac{p^6}{q}-\frac{p^5}{5}$ l) $\frac{1}{2}x^2y^2+xy^2-\frac{1}{3}x^3y+\frac{1}{4}xy$

2. a) Cociente: $m - 2$, resto: 0 b) Cociente: $-2w^2 - 3w - 5$, resto: $-5$
c) Cociente: $t - 3$, resto: 15 d) Cociente: $2d + 13$, resto : 52
e) Cociente: $q + 5$, resto: 0 f) Cociente: $a^2 + 2a + 4$, resto: 2
g) Cociente: $2x^2 + 3x + 1$, resto: $-7$ h) Cociente: $3p - 2$, resto: $-8$
i) Cociente: $k^2 + 2k + 2$, resto: 0 j) Cociente: $y^2 + 2y + 3$, resto: 1
k) Cociente: $2x^2 - 9x + 18$, resto: $-24$

3. a) $4(x^2 + x) = 4x^2 + 4x$ b) $x(6x + 2) = 6x^2 + 2x$ c) $2y(3x + 2) = 6xy + 4y$
d) $(x + 3)(x - 5) = x^2 - 2x - 15$ e) $(2x + 1)(2x^3 - 3x + 2) = 4x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x + 2$
f) $(x^3 - 5)(3x + 2) = 3x^4 + 2x^3 - 15x - 10$

4. $7a^2bc^2 - 3a^2b^2c + 9$

5. $m + 4$

6. Cociente: $2x + 7$ y resto: 3

7. El divisor es $2x + 3$.

8. $C = x^2 + 1$

9. Ver la tabla 3.49:

Tabla 3.49

| **Dividendo** | **Divisor** | **Cociente** | **Resto** |
|---|---|---|---|
| $x^2 - x + 8$ | $x - 2$ | $x + 1$ | 10 |
| $2x^2 + 7x + 3$ | $x + 3$ | $2x + 1$ | 0 |
| $x^3 + 1$ | $x + 2$ | $x^2 - 2x + 4$ | –7 |
| $x^2 + 2x - 1$ | $x - 1$ | $x + 3$ | 2 |

10. a) $4x^2 - 5x - 7$ b) $2x^3 - 27x + 8$ c) $4x^3 - 20x^2 + 55x - 23$ d) $x^2 + 3x - 7$
e) $-4x^3 + 20x^2 - 55x + 23$

11. $A = 2x^2 - 5x - 3$ a) El polinomio $A$ es de segundo grado.

12. a) $-x^2 + x + 8$ b) El polinomio resultante es de segundo grado. c) 4,25

13. $P \cdot h = 2(a + b)h$
$= (2a + 2b)h$
$= 2ah + 2bh$
$= A_L$

**Epígrafe 3.3**

1. a) F, ya que depende del dominio de la variable.
   b) F, porque el valor de la variable que transforma la ecuación en una proposición verdadera no es un número natural.
   c) V
   d) F, porque para ningún valor de la variable $x$ la ecuación $0 \cdot x = 2$ se transforma en una proposición verdadera.
   e) V
   f) F, ya que toda ecuación lineal en una variable en el conjunto de los números reales tiene solución única.
   g) F, porque la solución de la ecuación no es un número fraccionario.
   h) V
   i) V

j) F, pues la solución de la ecuación es $x = \dfrac{15}{2}$ y, por lo tanto, su conjunto solución es

$S = \left\{ \dfrac{15}{2} \right\}$.

2. Para $x = \dfrac{4}{3}$

3. La ecuación se transforma en una proposición falsa para todos los números reales distintos de dos.

4. a) $m = -1$ b) $p = -2$ c) $x = \dfrac{1}{3}$ d) $a = 2$ e) $x = 5$ f) $x = \dfrac{6}{5}$ g) $q = 3$

h) $x = 8$ i) $x = 1{,}75$ j) $t = \dfrac{5}{3}$ k) $b = 2$ l) $p = \dfrac{4}{5}$ m) $n = -5$

n) $y = 5$ ñ) $m = -\dfrac{1}{3}$ o) $d = -22$ p) $w = \dfrac{1}{5}$

5. a) $S = \left\{ \dfrac{8}{3} \right\}$ b) $S = \{2\}$ c) $S = \{-2\}$ d) $S = \{3\}$ e) $S = \{1\}$ f) $S = \{6\}$

g) $S = \{0\}$ h) $S = \left\{ \dfrac{1}{3} \right\}$ i) $S = \left\{ -\dfrac{13}{5} \right\}$ j) $S = \{3\}$ k) $S = \{1\}$

6. a) $p = 0{,}4$ b) $x = 20$ c) $b = 8$ d) $a = -0{,}5$ e) $q = -1$ f) $x = 1$
g) $x = 0$ h) $n = -5$ i) $p = -1$ j) $y = -5$ k) $d = -7$ l) $m = -0{,}5$

7. Ver la figura 3.131.

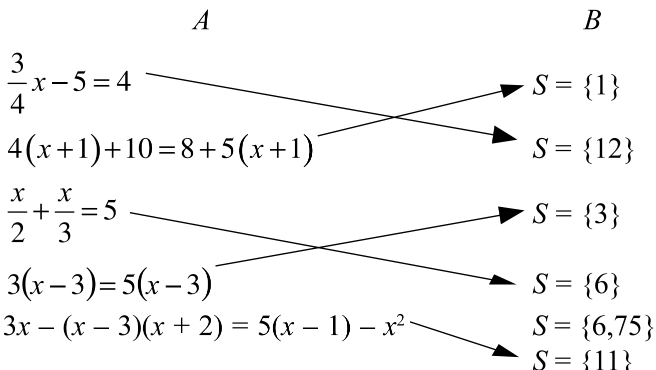



Figura 3.131

11. a = 11, 5

12. $b = -\dfrac{11}{2}$

13. 13.1. b) 13.2. c) 13.3. d) 13.4. a)

14. a) Ningún número natural satisface la ecuación.
    b) Ningún número fraccionario satisface la ecuación.
    c) El número racional –1 satisface la ecuación.

15. Ningún número fraccionario satisface la ecuación porque el valor que transforma la ecuación en una proposición verdadera no es un número fraccionario.

16. Ver la tabla 3.50.

Tabla 3.50

| **Ecuación** | **Conjunto solución para el dominio de la variable** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $\mathbb{N}$ | $\mathbb{Q}_+$ | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Q}$ |
| $5x - 2 = 3(x+2)$ | $S = \{4\}$ | $S = \{4\}$ | $S = \{4\}$ | $S = \{4\}$ |
| $4(2-a) + 5a = 2a + 9$ | $S = \phi$ | $S = \phi$ | $S = \{-1\}$ | $S = \{-1\}$ |
| $2(y+3{,}1) = 2(1{,}1 - 4y) + 2y$ | $S = \phi$ | $S = \phi$ | $S = \phi$ | $S = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ |
| $7t - 3 = 2(2t+3) + 3\left(t - \dfrac{1}{2}\right)$ | $S = \phi$ | $S = \phi$ | $S = \{-11\}$ | $S = \{-11\}$ |
| $2(q-2) + q = 3(q-1) - 1$ | $S = \mathbb{N}$ | $S = \mathbb{Q}_+$ | $S = \mathbb{Z}$ | $S = \mathbb{Q}$ |
| $(3d + 1)(d - 2) = 3d^2 + 7d - 26$ | $S = \{2\}$ | $S = \{2\}$ | $S = \{2\}$ | $S = \{2\}$ |
| $(2p + 3)(p - 4) - 8 = 2p(p - 1)$ | $S = \phi$ | $S = \phi$ | $S = \phi$ | $S = \left\{-\dfrac{20}{3}\right\}$ |

18. a) Tienen el mismo conjunto solución porque al aplicar transformaciones equivalentes la ecuación $4x + 3 = x - 3$ se reduce a la ecuación $3x - 6$.
    b) No tienen el mismo conjunto solución, pues 2 no es una solución de la ecuación $4x = 4x + 2$ porque no transforma la ecuación en una proposición verdadera.
    c) No tienen el mismo conjunto solución, ya que la ecuación $7(x - 5) - 7x + 5 = x + 3$ no se reduce mediante transformaciones equivalentes a la ecuación $0 = x + 3$.

19. a) Para $p = 2$

b) Para que la ecuación tenga solución en N se tiene que cumplir que $\frac{p+3}{p-2} \in \mathbb{N}$, para eso $p + 3$ tiene que ser divisible por $p - 2$. Por ejemplo, para $p = 3$, $p = 7$ y $p = -3$.

c) $p = -\frac{6}{7}$

20. Para $a = \frac{3}{4}$

**Epígrafe 3.3.1**

1. a) $\frac{F_g}{m} = g$ b) $m\Delta_t$ =Q c) $\sqrt{A} = l$ d) $t = \frac{\text{w}}{\text{p}}$ e) $\frac{A_L}{2\pi r} = h$ f) $\frac{3V}{A_B} = h$

g) $\frac{s - s_0}{V} = t$ h) $\frac{L}{2\pi} = r$ i) $\frac{D - r}{c} = d$ j) $\frac{V - V_0}{a} = t$ k) $\frac{A - 2ab}{2(a+b)} = h$

l) $\frac{a_n - a_l}{n-1} = d$ m) $\frac{2A}{d_2} = d_1$ n) $\frac{A - \pi r^2}{\pi r} = g$

2. 2.1. d) 2.2. c) 2.3. a)
3. La longitud del radio de la circunferencia es aproximadamente 3,9 cm.
4. 4.1. $\frac{2A - h(p+r)}{h} = q$ 4.2. $F = \frac{9C + 160}{5}$ 4.3. $L = \frac{360^\circ b}{\alpha}$
5. a) $\frac{c - a}{c + 3} = d$ b) $\frac{m - 2}{m + 5} = a$ c) $\frac{5p - 3m}{2} = n$

**Epígrafe 3.3.2**

1.1. a) 1.2. d) 1.3. b) 1.4. b) 1.5. c) 1.6. d)

3.1. $8x$ 3.2. $3x^2$

4. Los otros lados del triángulo isósceles miden 4,5 cm.

5. Cada pedazo serruchado tiene una longitud de 60 cm.

6. En el puesto de venta hay 40 naranjas, 80 limones y 10 guayabas.

7. Gabriela fue elegida jefa de colectivo al obtener la mayoría de los votos (141).

8. La secundaria básica Lidia Doce fue la que menos árboles sembró (187).

9. En el ejercicio Meteoro 2013 en esa secundaria participaron 137 estudiantes, 22 trabajadores y 11 padres.

10. El pionero el primer día leyó 72 páginas; el segundo, 18 y el tercero, 36.

11. Los estudiantes recuperaron 272 lb de cartón y papel.

12. El 50,5 % de los delegados provinciales son mujeres.

13. El trapecio tiene un área de 28 $dm^2$.

14. El rectángulo tiene un área de 1,2 $m^2$.

15. La amplitud del ángulo mayor es de 110°, la el mediano 40° y la del menor 30°.

16. Al consumo de hospitales fueron destinadas 100 000 t de papa.

17. Al cultivo de frutas se emplearon 20 caballerías y 6, a viandas.

18. Están interesados en matricular en la escuela pedagógica 98 estudiantes.

19. En la competencia participaron 25 féminas ajedrecistas.

20. a) El tanque tenía al inicio 300 L de refresco.
    b) En la mañana se vendieron 180 L de refresco.
    c) El tanque tiene una capacidad de 400 L.

21. a) De lechuga hay sembradas 12 ha.
    b) Faltan por recoger en total 32 ha.

22. a) Joanna llevó a la feria 100 pesos.
    b) Cada libro tenía un precio de 12 pesos.
    c) Joanna destinó a la merienda el 10 % del dinero que llevó a la feria.

23. a) La matrícula de la escuela es de 600 estudiantes.
    b) Hay cuatro grupos de séptimo grado, cinco de octavo y siete de noveno.

24. Antes de realizar la escuela de padres un aula tenía 16 sillas y la otra 32.

25. El Círculo de Interés Pedagógico tiene 30 integrantes y el de Medicina Natural y Tradicional, 10.

26. a) En la votación participaron 35 pioneros.
    b) Ninguna porque Brenda y Laura obtuvieron la misma cantidad de votos, por lo que hubo que realizar una nueva votación.

27. La amplitud del ángulo $\alpha$ es 141° y la del ángulo $\beta$ es 39°.

28. Los números son 5 y 8.

29. Los lados del rectángulo tienen 48 y 12 cm de longitud.

**Epígrafe 3.4**

1. a) 5 b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{5}{2}$ e) $\frac{1}{8}$ f) 8 g) $\frac{1}{3}$ h) 28 i) $\frac{4}{3}$ j) $\frac{1}{18}$

2. Algunos números pueden ser: a) 8 y 10; 16 y 25; 40 y 50
   b) 6 y 4; 21 y 14; 36 y 24 c) 4 y 12; 5 y 15; 0,3 y 0,9 d) 9 y 21; 12 y 28; 11 y 77

3. 3.1. a) 3 b) 2 c) 3 3.2. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{4}$ 3.3. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$

4. a) $\frac{8}{9}$ b) 3 c) 50 d) 2

5. a) No b) Sí c) No d) No e) Sí

6. 12 cuadraditos

7. Ver la figura 3.132.

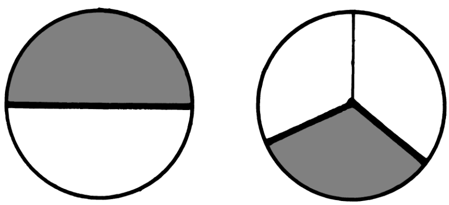


Figura 3.132

8. a) No b) Sí c) Sí d) No

9. a) $x = \frac{1}{3}$ b) y = 21 c) a = ± 40

10. 393

11. 105

12. 21

13. 36

14. 66

15. $7,20.

## Epígrafe 3.4.1

### Proporcionalidad directta

1. a, c, e, g y h
2. a y c
3. a) $k = 1{,}6$; 3,2 y 11 b) $k = 0{,}085$; 4,25 y 10,2 c) $k = 18$; 7 y 2 169
4. 4.1. a 4.2. c
5. a) 1 080 piezas b) 150 h
6. a) $50,00 b) 172 h
7. 275 km
8. $180,00
9. 2,4 m
10. 295,5 km
11. 16 kg
12. 6 estudiantes
13. 43,75 %
14. 90 ejercicios
15. a) 3 840 km b) 14,5 cm.
16. 18, 24 y 36
17. 3 cm; 6 cm y 7,5 cm
18. 15; 20 y 25

### Proporcionalidad inversa

1. a, c, d y e
2. a; b
3. a) $k = 250$; 12,5 y 5 b) $k = 135$; 15 y 2,25
4. 4.1. d 4.2. b 4.3. a
5. 2 días y medio

6. 6 hombres más

7. 2 h

8. a) 36 b) 6

9. 27 min

10. En $4,00

**Epígrafe 3.4.2**

2. *A*(4; 3), *B*(0; –1,5), *C*(0; 2), *D*(5; 0), *E*(–3; 1), *F*(–2; –2,5) y *G*(2; –3)

3. Triángulo *ABC*: *A*(0; 3), *B*(0; 0) y *C*(2,5; 0). Área: 3,75 $u^2$.
   Rectángulo *DEFG*: *D*(–2; –3), *E*(1; –3), *F*(1; –1) y *G*(–2; –1). Área: 6 $u^2$
   Paralelogramo *HIJK*: *H*(3; 1,5), *I*(5; 1,5), *J*(6; 4) y *K*(4; 4). Área: 5 $u^2$
   Trapecio rectángulo *LMNÑ*: *L*(0; –2), *M*(6; –2), *N*(6; 0) y *Ñ*(4; 0). Área: 8 $u^2$

4. a) II cuadrante b) IV cuadrante c) III cuadrante d) I cuadrante
   e) III cuadrante f) IV cuadrante

5. Ver la figura 3.133.

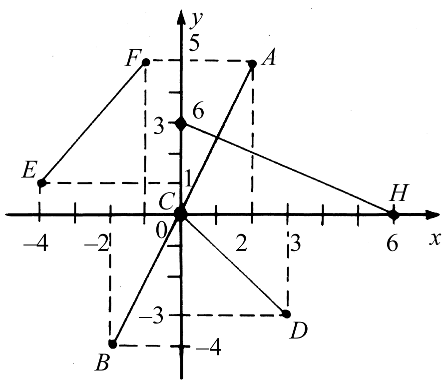



Figura 3.133

6. Una solución puede ser la figura 3.134.

   a) *A*(0; 2) y *B*(4; 2)
   b) *C*(–2,5; 0,5) y *D*(–2,5; 3)
   c) *M*(2; 0) y *N*(3; 0)
   d) *P*(0; –2,2) y *Q*(0; –1)

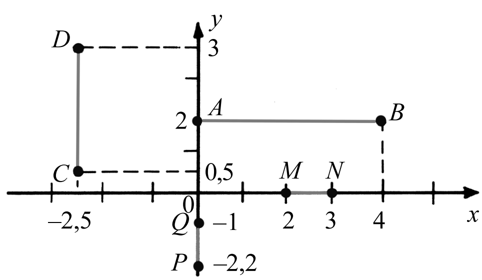



Figura 3.134

7. a) *Q*(–1; 0) c) 12 $u^2$

8. Triángulo *ABC* isósceles de base $\overline{AC}$.

9. Ver la figura 3.135.

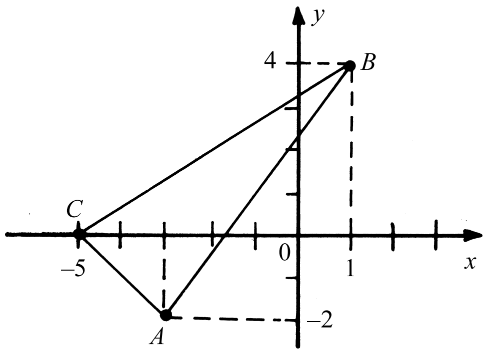



Figura 3.135

10. $P'(-2;\ 3)$, $R'(5;\ 2)$, $M'(4;\ 1)$ (fig. 3.136)

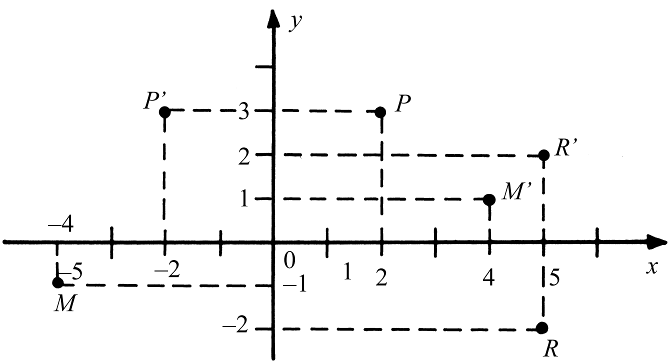



Figura 3.136

11. a) Un punto (fig. 3.137)

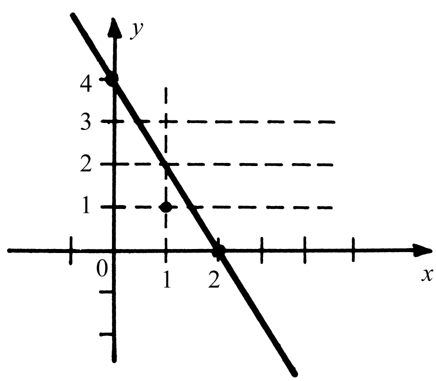



Figura 3.137

b) Tres puntos (fig. 3.138)

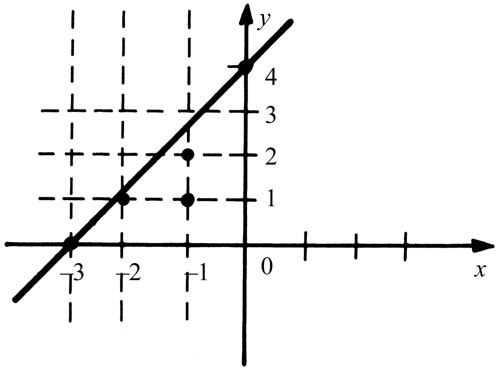



Figura 3.138

c) Dos puntos (fig. 3.139)

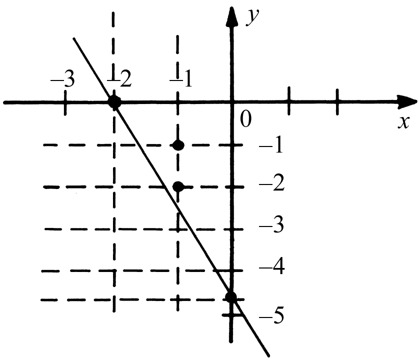



Figura 3.139

## Epígrafe 3.4.3

1. a) Sí
   b) No, porque al último elemento del conjunto de partida le corresponden dos elementos en el de llegada.
   c) Sí
   d) No, porque hay un elemento del conjunto de partida que no está relacionado con ningún elemento del conjunto de llegada.
   e) No, al elemento 2 del conjunto de partida en la tabla se le asocian dos elementos.
   f) No, si trazas una paralela al eje $y$ y la trasladas hacia ambos lados, dicha recta corta en varias ocasiones a la gráfica en dos puntos.

2. a) $N = \{-8; -5; -1; -2; 0; 2; 3; 6; 7\}$ b) $P = \{4; 2{,}5; \frac{1}{2}; 1; 0; -1; -1{,}5; -3; -3\frac{1}{2}\}$

c) $A = \{4; 2{,}5; \frac{1}{2}; 0; 1; 1{,}5; 3; 3\frac{1}{2}\}$  d) $B = \{16; 6{,}25; \frac{1}{4}; 1; 0; 2{,}25; 9; 12\frac{1}{4}\}$

3. Ver la figura 3.140.

a) No  b) Sí  c) Sí

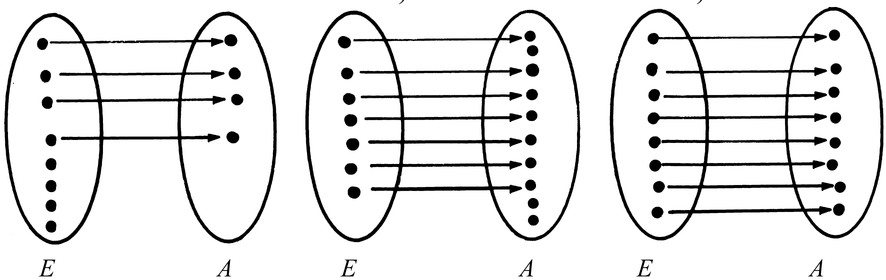



Figura 3.140

4. a) Sí  b) Sí  c) No, el cero no tiene recíproco  d) Sí  e) Sí
   f) No, ya que el cocodrilo no pertenece a ninguno de los grupos relacionados en el conjunto de llegada.
   g) No, en el conjunto de llegada no está el significado de *boy.*
   h) Sí

4.1. a) Dominio: los reales, imagen: los reales
   b) Dominio: elementos del conjunto *A*, imagen: {1959; 1953; 1878; 1961; 1956; 1869}
   d) Dominio: {  }, imagen: {3; 4; 5; 6}
   e) Dominio: el conjunto formado por todas las personas,
   imagen: el conjunto formado por todos los números de carné de identidad
   h) Dominio: {Cauto; Volga; Amazonas; Nilo; Amarillo},
   imagen: {América; Europa; Suramérica; África; Asia}

6. a) $P$ = {Estados Unidos; Chile; Cuba; España; Colombia}

8. a) Sí  b) 5  c) $2x - 1$

9. a) Imagen: –5; 9 y 23  b) Imagen: 0; $-\frac{7}{4}$ y $-\frac{7}{2}$  c) Imagen: 4; 2,25 y 25

10. a) 1; $\frac{33}{8}$; 3  b) 3,5; $\frac{31}{16}$; 2,5  c) –9; $\frac{3}{8}$; –3

11. a) 5  b) $\frac{1}{3}$  c) $-\frac{5}{8}$

12. a) $a = 3{,}5$  b) $a = 2$  c) $a = 5{,}5$

## Epígrafe 3.4.4

1. a) ($m = 3$ y $n = 2$) b) ($m = 1$ y $n = -5$) e) ($m = 3$ y $n = 0$) f) ($m = \frac{1}{3}$ y $n = 3$)

   h) ($m = 0$ y $n = 7{,}5$) i) ($m = 0$ y $n = -4$) k) ($m = -2$ y $n = 5$)

   l) $\left(m = -\frac{1}{4} \text{ y } n = 2\right)$ m) $m = \frac{2}{3}$ y $n = \frac{8}{3}$ n) ($m = -2$ y $n = 0$)

   ñ) ($m = 1$ y $n = -8$) o) ($m = -1$ y $n = 2$)

2. c

3. a) $y = x - 1$ b) $y = -3x + 0{,}6$ c) $y = \frac{2}{3}x - \frac{3}{2}$ d) $y = 4x$ e) y = 9

   f) $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$

4. a) $m = -2$ y $n = -\frac{3}{2}$

   b) $f(0) = -\frac{3}{2}$ ; $f(-1) = \frac{1}{2}$ ; $f\left(-\frac{3}{4}\right) = 0$ ; $f(1{,}2) = -3{,}9$

   c) $x = -\frac{3}{4}$; $x = -\frac{3}{2}$; $x = 0$

5. a) $d = 60t$ b) $s = 3h + 450$ c) $p = 85$ d) $h = \frac{1}{3}A$

## Epígrafe 3.4.5

1.1. Sí, porque en cada ecuación $n = 0$ que es la intersección de la gráfica con el eje $y$.

1.2. No, porque en unos casos $m > 0$ y en otros $m < 0$; y la inclinación está dada por el signo de la pendiente.

2.1. No, porque en cada caso $n \neq 0$.

2.2. No, porque en unos casos $m > 0$ y en otros $m < 0$; y la inclinación está dada por el signo de la pendiente.

3.1. Las rectas son paralelas al eje $x$, ya que la pendiente en cada caso es igual a cero.

4. c) Sí, pertenece d) $x = -\frac{4}{3}$

5. Ver la figura 3.141.

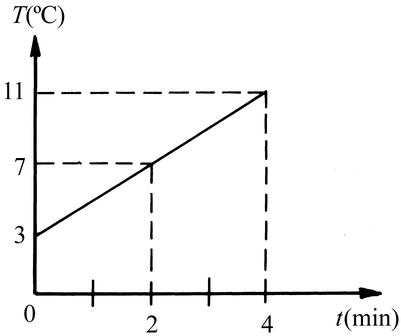



Figura 3.141

6. Ver la figura 3.142.

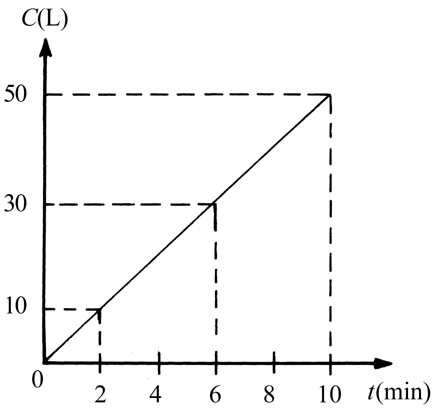



Figura 3.142

7. Ver la figura 3.143.

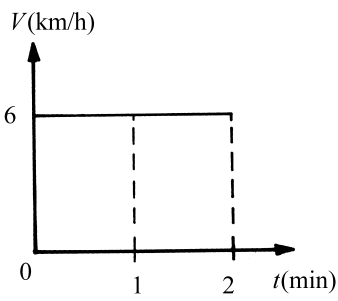



Figura 3.143

**Epígrafe 3.4.6**

1. a) $y = 5x$ b) $y = -3x + 4$ c) $y = -1$ d) $y \ \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ e) $y = -2x + 3$

f) $y=-\frac{5}{7}x+2{,}5$ g) $y=-\frac{1}{10}x+\frac{1}{5}$ h) $y=\frac{8}{15}x$ i) $y=-2{,}4$.

2. a) $y=\frac{3}{2}x-2$ b) $y=-x+1$ c) $y=4$

2.1. a) Dominio: $\{x \in \mathbb{R}\}$, imagen: $\{y \in \mathbb{R}\}$ b) Dominio: $\{x \in \mathbb{R}\}$, imagen: $\{y \in \mathbb{R}\}$
c) Dominio: $\{x \in \mathbb{R}\}$, imagen: $\{4\}$

3. a) $n=-7$ b) $n=-3$ c) $n=0$ d) $n=-\frac{14}{3}$ e) $n=7$

4. a) $m=3$ b) $m=\frac{1}{3}$ c) $m=\frac{1}{3}$ d) $m=\frac{8}{5}$ e) $m=\frac{2}{3}$

5. 5.1. a) $f(x)=-4x-5$ b) $F\left(-\frac{1}{4};-4\right)$ c) 5

5.2. Ver la figura 3.144.

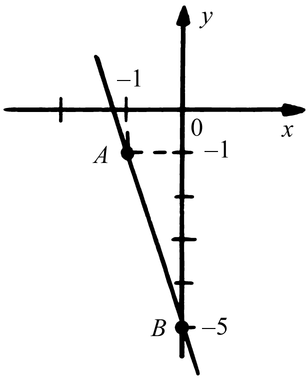



Figura 3.144

5.3. Dominio: $\{x \in \mathbb{R}\}$, imagen: $\{y \in \mathbb{R}\}$

6. a) Ver la figura 3.145.

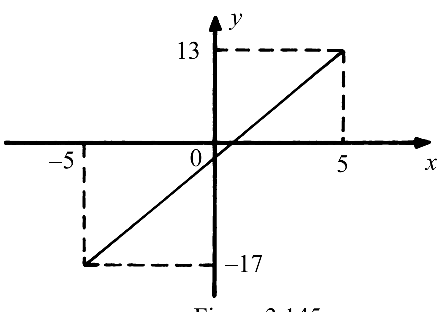



Figura 3.145

b) Dominio $h$: $\{x \in \mathbb{R}: -5 \le x \le 5\}$, imagen $h$: $\{y \in \mathbb{R}: -17 \le y \le 13\}$

7. a) $C = 2t + 20$  b) 20 L  c) 50 L  d) 20 min  e) 8:40 a.m.

8. a) $T = -\dfrac{23}{2}t + 46$  b) 0 °C  c) –11,5 °C  d) 11:05 p.m.

9. 9.1. a) $h(t) = -0{,}1t + 1$  b) 0,2 m

9.2. a) 1 m  b) 12 meridiano

**Epígrafe 3.4.7**

1. a) $x = 5$  b) $x = 0{,}5$  c) $x = 3{,}5$  d) $x = -8$  e) $x = 3$  f) $x = 12$
   g) $x = 1{,}5$  h) $x = -0{,}3$  i) $x = 2{,}5$  j) No tiene  k) No tiene  l) –0,01

2. a) $x = -1$  b) $x = 0$  c) No tiene  d) $x = 2$

2.1. a) $y = x + 1$  b) $y = 0{,}5x$  c) $y = 1$  d) $y = -2x + 4$

3. –18

4. $f(x) = -9x + 3$

5. a) $x = 0{,}5$  b) Ver la figura 3.146.  c) Imagen: $\{y \in \mathbb{R}\}$  5.1. $C$

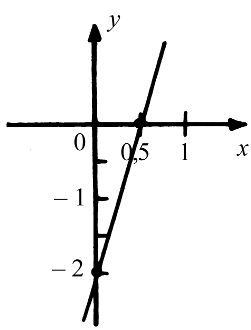



Figura 3.146

6. a) Ver la figura 3.147.

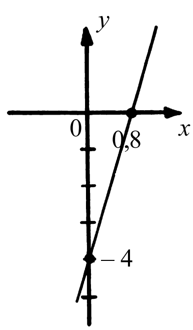



Figura 3.147

b) $y = 5x - 4$  c) Dom: $\mathbb{R}$, imagen: $\mathbb{R}$  d) $x = 0{,}8$  e) $y = -19$  f) $x = 0{,}4$

7. a) $y = -\dfrac{3}{4}x + 3$  b) $A = 6$ u$^2$  c) 12 u

8. a) 30 L  b) $C = -\dfrac{3}{2}t + 30$  c) 10:50 a.m.  d) 7,5 L

9. a) 15 000 pesos  b) 12 000 pesos  c) 10 años  d) Ver la figura 3.148

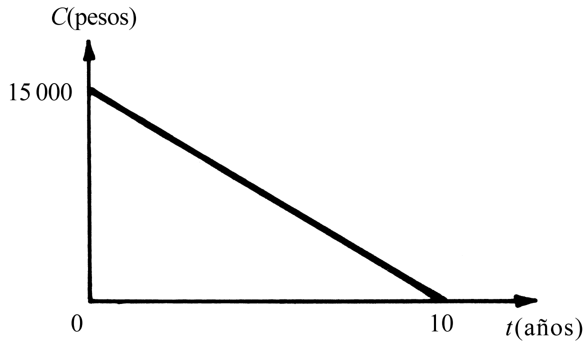



Figura 3.148

**Epígrafe 3.4.8**

1. a) $y = -x + 1$  b) $y = 3x - 12$  c) $y = -x - 2$  d) $y = x - 8$
   e) $y = 3x$  f) $y = x$

1.1. a) $m = -1$  b) $m = 3$  c) $m = -1$  d) $m = 1$  e) $m = 3$  f) $m = 1$

1.2. La recta se inclina hacia: a) abajo  b) arriba  c) abajo  d) e) y f) arriba

2. a) $m = 2$  b) $m = 3$  c) $m = 8$  d) $m = -\dfrac{3}{2}$  e) $m = 4$  f) $m = -1$

   g) $m = -\dfrac{6}{5}$  h) $m = -\dfrac{1}{2}$  i) $m = 0$

3. $m_{\overline{AB}} = \dfrac{3}{5}$; $m_{\overline{AC}} = -\dfrac{5}{3}$ y $m_{\overline{BC}} = -\dfrac{7}{11}$

4. a) Creciente  b) Decreciente  c) Creciente  d) Decreciente  e) Creciente
   f) Creciente  g) Decreciente  h) Constante  i) Constante  j) Decreciente
   k) Creciente  l) Creciente  m) Decreciente

5. Porque el denominador de la fracción se hace cero. En este caso la recta es perpendicular al eje $x$.

6. a) La gráfica b, ya que como $m=-\dfrac{2}{3}$ en la ecuación la recta se inclina hacia abajo.

   b) $x = 6$

7. b

8. a) $A$: se calienta, porque su temperatura asciende. $B$: se enfría, porque su temperatura desciende.

   b) A las 10:31 a.m. y es de 6 °C. c) A los dos minutos y medio.

9. a) El recipiente $A$, ya que su gráfica está más inclinada hacia arriba respecto al eje vertical que la gráfica del recipiente $B$.

   b) $A: h=\dfrac{4}{3}t$ y $B: h=\dfrac{4}{5}t$ c) Sí, una proporcionalidad directa.

   d) El recipiente $A$ demoró en llenarse 22 minutos y medio.

**Epígrafe 3.4.9**

1. a) A los 2 min b) Tenía 0,85 m de altura.
c) Estuvo cerrada 12 min d) Se vació completamente a las 9:09 a.m.

2. 2.1. Se calienta, porque la temperatura asciende.

2.2. a) 10 °C b) 2:30 p.m. c) Hora y media

2.3. A las 3:30 p.m. y fue de 70 °C.

2.4. La temperatura mínima alcanzada fue de –14 °C.

3. 3.1. a) 400 m b) Media c) 100 m

3.2. a) $d = 40$ t b) 1 km

3.3. El abuelo regresó a su casa a las 8:00 a.m.

4. 4.1. a) 60 $m^3$ b) 8 h c) 48 $m^3$

4.2. a) $C = -24t + 252$ b) 4:00 p.m.

4.3. La piscina se vació completamente a las 6:30 p.m.

5. a) $h=\dfrac{5}{6}t$ b) A los 3 min la altura del agua era de 2,5 dm.

   c) El tanque demoró en llenarse 18 min.

d) Hubo mayor presión en el tramo de 12 a 18 min, ya que la altura del agua subió 10 dm en 6 min; mientras en el tramo de 0 a 10 min, subió también 10 dm, pero en 10 min.

6. 6.1. a) $V = 40t$ b) 120 min

6.2. La velocidad se mantuvo constante. $V = 80$

6.3. Tenía una velocidad de 60 km/h.

6.4. El desplazamiento del móvil duró 9 h.

7. 7.1. a) 1 h 7.2. a) 2 h b) 9 h 7.3. $d = 90t - 150$

8. c

9. a

10. c

11. a) Ver la figura 3.149.

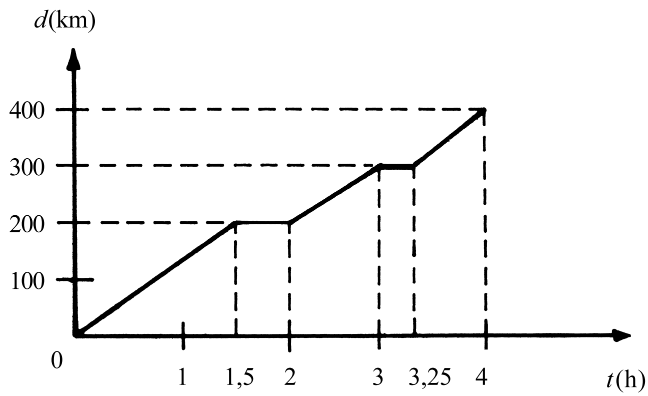



Figura 3.149

b) $d = \dfrac{400}{3}t$ c) 45 min d) Llegó a su destino a las 12 m.

**Ejercicios del capítulo**

1. a) –2,0625 b) 624

2. a) $17b^2 + bc^2 - 8c^2$ b) $11q - p - 2$ c) $3n^2 + 3m - 3$ d) $8d^2 - 2cd$
e) $-5x^2 + 2x - 6$ f) $2m^3 + 3m^2 - 15m + 5$ g) $5a^3 - 5a^2 - ab - 3$ h) $x + 5$
i) $4a^4 - 11a^2b - 3b^2$ j) $3m^2 - 5m + 2$ k) $4x^2 + 5x - 11$

3. a) $9a^2 + 2ab - 4$  b) $4p^2q - 4pq - 3$  c) $2x^2 + 13xy$  d) $23q^2 - 9p^2 + 33pq$

4. a) $-m^2 - 5mn + 12n^2$  b) $b + 1$  c) $4x - 5$

6. a) $6c^2 - 24d^2 - 4cd - c + 2d$  b) $c + 6d + 1$
   c) $6c^3 - 24d^2c - 11c^2 + 12d^2 - 16cd$  d) $-6c^2 - 20cd - c + 2d$
   e) $6c^2 + 12cd + 16d^2$

7. a) $x = -2$  b) $a = 2$  c) $x = 8$  d) $x = -2$  e) $x = 2$

8. Ver la figura 3.150.

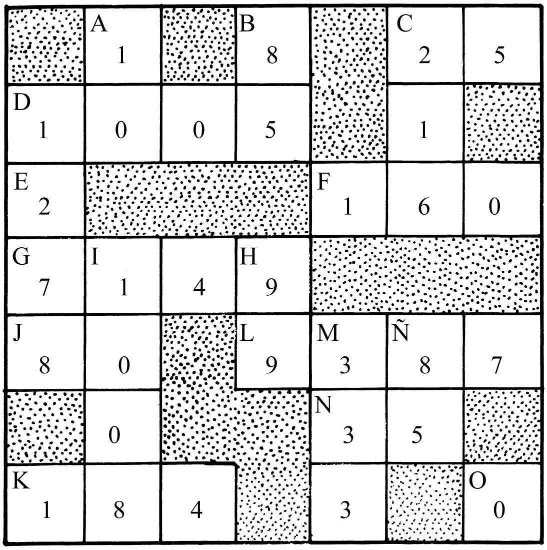



Figura 3.150

9. En la especialidad Educación Preescolar hay 75 estudiantes en primer año, en Educación Especial 105 y en Educación Primaria 180.

10. En esta cooperativa de producción agropecuaria están sembradas 25 ha de yuca y 60 de boniato.

11. Se cosecharon 35 q de tomate y 22 q de cebollinos.

12. La base del triángulo tiene 8 cm de longitud y los lados no base 20 cm de longitud.

13. Un ángulo tiene una amplitud de 60° y el otro 120°.

14. Las longitudes de los lados del triángulo son 23 mm, 24 mm y 25 mm.

15. Área del rectángulo: 240 $cm^2$

16. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{4}{3}$ e) 3

17. a) 75 ha b) 105 ha

18. Messi: 560 votos y Cristiano: 280 votos

19. a) $M_1 = \{1; 3\}$, $M_2 = \{3; 9\}$, $M_3 = 7; 21\}$ b) $M_1 = \{24; 60\}$
c) $M_1 = \{3; 12\}$ d) $M_1 = \{7; 1\}$ y $M_2 = \{21; 3\}$

20. a) Proporcionalidad directa, factor de proporcionalidad: 2,7, términos que faltan: 8,1 y 5
b) Proporcionalidad inversa, factor de proporcionalidad: 252, términos que faltan: 252 y 28
c) Proporcionalidad directa, factor de proporcionalidad: 60, términos que faltan: 150 y 8,5

21. a) 184,6 t b) 35 ha

22. 22 días

23. 12 personas más

24. 1,65 m

26. $A(-4; 0)$, $B(-2; 0)$, $C(4{,}5; 0)$, $D(7; 0)$, $E(0; 3)$, $F(0; 5{,}5)$, $G(2; 5)$, $H(0; -2)$, $I(2; -2)$, $J(-3; -3)$.

27. Ver la figura 3.151.

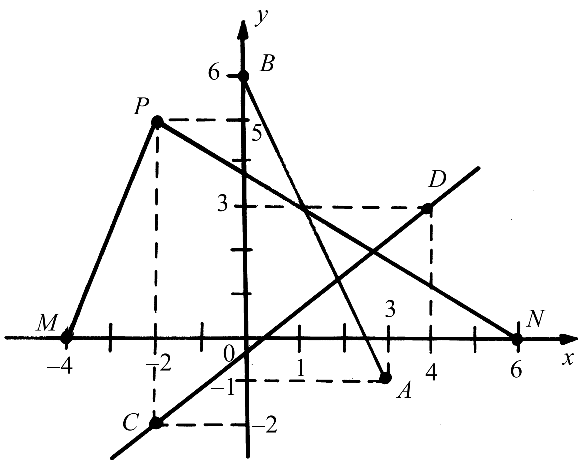



Figura 3.151

28. a) $A'(3; -5)$, $B'(-4; -2)$, $C'(1; 1)$, $D'(-2; 5)$ y $E'(0; 0)$
b) $A'(-3; 5)$, $B'(4; 2)$, $C'(-1; -1)$, $D'(2; -5)$ y $E'(0; 0)$
c) $A'(-3; -5)$, $B'(4; -2)$, $C'(-1; 1)$, $D'(2; 5)$ y $E'(0; 0)$

29. a) Sí, porque el cuádruplo de un número real siempre existe y es único.
    b) No, porque hay raíces cúbicas de números racionales que son irracionales como la $\sqrt[3]{2}$.
    c) No, porque el antecesor de 0 es –1 que no es un número natural.
    d) Sí, cada número entero tiene un único sucesor.
    e) Sí, el cuadrado de –2 es 4, por lo que todos los elementos del conjunto de partida se asocian a un único número, el 4.
    f) No, porque hay números enteros cuya mitad no es entera, por ejemplo, la mitad de 3 es 1,5; que no es un número entero.
    g) No, porque las raíces cuadradas de números negativos no existen.
    h) Sí, porque todo número tiene módulo y este valor es único.

30. a) Sí, porque si trazas paralelas al eje $x$, estas cortan a la gráfica en un solo punto.
    b) No, porque a un valor de $x$ se le asocian infinitos valores de $y$.
    c) No, porque si trazas paralelas al eje $x$, estas cortan a la gráfica en más de un punto.
    d) Sí, porque si trazas paralelas al eje $x$, estas cortan a la gráfica en un solo punto.
    e) No, porque si trazas paralelas al eje $x$, algunas cortan en dos puntos.
    f) Sí, porque si trazas paralelas al eje $x$, estas cortan a la gráfica en un solo punto.

31. c

32. a) No, porque al elemento 2 corresponden dos valores;
    b) Sí, porque a cada valor de $a$ se le asocia un único valor de $b$.
    c) Sí, porque a cada valor de $m$ se le asocia un único valor de $n$.

32.1. b) Dominio: {–2; –1; 0; 1; 2}, imagen: {8}
      c) Dominio: {0; 0,3; 1,2; 1,7; 2}, imagen: {0; 2}

33. Sí

34. Sí

35. Sí

36. No, porque los países España y Ecuador no tienen su capital en el otro conjunto.

37. a) Ver la figura 3.152.

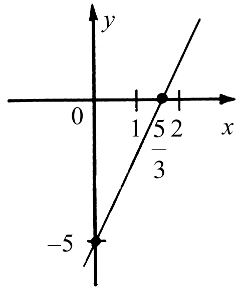



Figura 3.152

b) Creciente, porque $m = 3 > 0$ c) Sí d) –12 e) $\frac{25}{6}u^2$ f) $a = -1$

38. a) $m = \frac{1}{2}$ b) Ver la figura 3.153. c) $x = 4$ d) Creciente f) $x = -2$

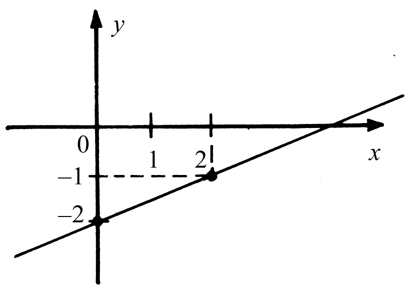



Figura 3.153

39. a) $h(x) = \frac{1}{2}x + 2$ b) Ver la figura 3.154. c) (0; 2) d) 8 u²

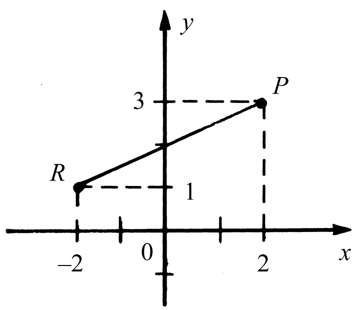



Figura 3.154

40. a) Falso, porque se inclina hacia abajo de izquierda a derecha. (Otra variante: porque a medida que aumentan los valores de $x$, disminuyen los valores de la $y$).
   b) Verdadero.
   c) Verdadero.
   d) Falso, el cero es la abscisa del punto, o sea, $x = 3$.
   e) Verdadero.
   f) Verdadero.
   g) Falso, porque se obtiene una fracción negativa y los números negativos no pertenecen al conjunto de los números fraccionarios.

41. 41.1. a) 30 dm b) 8:10 p.m. c) 25 dm

42.2. a) $h = -0{,}5t + 30$     b) 30 s

41.3. 28 dm     41.4. 8 min     41.5. 15 min 30 s

41.7. La segunda bomba, ya que en 5 min la altura del agua baja 25 dm; y con la primera en 10 min solo desciende 5 dm.

42. a) La gráfica de *B* es la que desciende, ya que en la ecuación dada la pendiente es negativa. La de *A* es la que asciende.
b) *B*: 20 °C y *A*: – 45 °C     c) La *B*, porque la temperatura desciende.
d) *A*: 12 m y *B*: 1:00 a.m.     e) 4 h y de 15 °C.

43. a) Ver la figura 3.155.

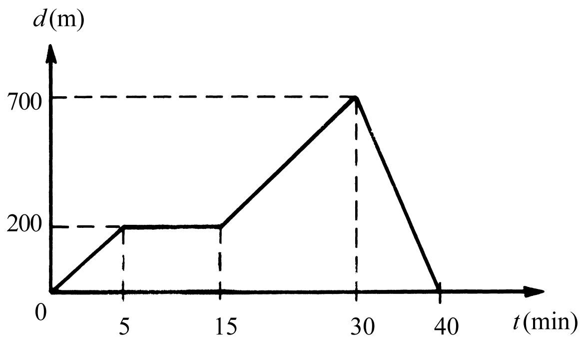



Figura 3.155

b) $d = \frac{100}{3}t - 300$     c) 7:40 a.m.     d) 1 400 m

**TABLA DE CUADRADOS**

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1,0** | 1,000 | 1,020 | 1,040 | 1,061 | 1,082 | 1,103 | 1,124 | 1,145 | 1,166 | 1,188 |
| **1,1** | 1,210 | 1,232 | 1,254 | 1,277 | 1,300 | 1,323 | 1,346 | 1,369 | 1,392 | 1,416 |
| **1,2** | 1,440 | 1,464 | 1,488 | 1,513 | 1,538 | 1,563 | 1,588 | 1,613 | 1,638 | 1,664 |
| **1,3** | 1,690 | 1,716 | 1,742 | 1,769 | 1,796 | 1,823 | 1,850 | 1,877 | 1,904 | 1,932 |
| **1,4** | 1,960 | 1,988 | 2,016 | 2,045 | 2,074 | 2,103 | 2,132 | 2,161 | 2,190 | 2,220 |
| **1,5** | 2,250 | 2,280 | 2,310 | 2,341 | 2,372 | 2,403 | 2,434 | 2,465 | 2,496 | 2,528 |
| **1,6** | 2,560 | 2,592 | 2,624 | 2,657 | 2,690 | 2,723 | 2,756 | 2,789 | 2,822 | 2,856 |
| **1,7** | 2,890 | 2,924 | 2,958 | 2,993 | 3,028 | 3,063 | 3,098 | 3,133 | 3,168 | 3,204 |
| **1,8** | 3,240 | 3,276 | 3,312 | 3,349 | 3,386 | 3,423 | 3,460 | 3,497 | 3,534 | 3,572 |
| **1,9** | 3,610 | 3,648 | 3,686 | 3,725 | 3,764 | 3,803 | 3,842 | 3,881 | 3,920 | 3,960 |
| **2,0** | 4,000 | 4,040 | 4,080 | 4,121 | 4,162 | 4,203 | 4,244 | 4,285 | 4,326 | 4,368 |
| **2,1** | 4,410 | 4,452 | 4,494 | 4,537 | 4,580 | 4,623 | 4,666 | 4,709 | 4,752 | 4,796 |
| **2,2** | 4,840 | 4,884 | 4,928 | 4,973 | 5,018 | 5,063 | 5,108 | 5,153 | 5,198 | 5,244 |
| **2,3** | 5,290 | 5,336 | 5,382 | 5,429 | 5,476 | 5,523 | 5,570 | 5,617 | 5,664 | 5,712 |
| **2,4** | 5,760 | 5,808 | 5,856 | 5,905 | 5,954 | 6,003 | 6,052 | 6,101 | 6,150 | 6,200 |
| **2,5** | 6,250 | 6,300 | 6,350 | 6,401 | 6,452 | 6,503 | 6,554 | 6,605 | 6,656 | 6,708 |
| **2,6** | 6,760 | 6,812 | 6,864 | 6,917 | 6,970 | 7,023 | 7,076 | 7,129 | 7,182 | 7,236 |
| **2,7** | 7,290 | 7,344 | 7,398 | 7,453 | 7,508 | 7,563 | 7,618 | 7,673 | 7,728 | 7,784 |
| **2,8** | 7,840 | 7,896 | 7,952 | 8,009 | 8,066 | 8,123 | 8,180 | 8,237 | 8,294 | 8,352 |
| **2,9** | 8,410 | 8,468 | 8,526 | 8,585 | 8,644 | 8,703 | 8,762 | 8,821 | 8,880 | 8,940 |
| **3,0** | 9,000 | 9,060 | 9,120 | 9,181 | 9,242 | 9,303 | 9,364 | 9,425 | 9,486 | 9,548 |
| **3,1** | 9,610 | 9,672 | 9,734 | 9,797 | 9,860 | 9,923 | 9,986 | 10,05 | 10,11 | 10,18 |
| **3,2** | 10,24 | 10,30 | 10,37 | 10,43 | 10,50 | 10,56 | 10,63 | 10,69 | 10,76 | 10,82 |
| **3,3** | 10,89 | 10,96 | 11,02 | 11,09 | 11,16 | 11,22 | 11,29 | 11,36 | 11,42 | 11,49 |
| **3,4** | 11,56 | 11,63 | 11,70 | 11,76 | 11,83 | 11,90 | 11,97 | 12,04 | 12,11 | 12,18 |
| **3,5** | 12,25 | 12,32 | 12,39 | 12,46 | 12,53 | 12,60 | 12,67 | 12,74 | 12,82 | 12,89 |
| **3,6** | 12,96 | 13,03 | 13,10 | 13,18 | 13,25 | 13,32 | 13,40 | 13,47 | 13,54 | 13,62 |
| **3,7** | 13,69 | 13,76 | 13,84 | 13,91 | 13,99 | 14,06 | 14,14 | 14,21 | 14,29 | 14,36 |
| **3,8** | 14,44 | 14,52 | 14,59 | 14,67 | 14,75 | 14,82 | 14,90 | 14,98 | 15,05 | 15,13 |
| **3,9** | 15,21 | 15,29 | 15,37 | 15,44 | 15,52 | 15,60 | 15,68 | 15,76 | 15,84 | 15,92 |
| **4,0** | 16,00 | 16,08 | 16,16 | 16,24 | 16,32 | 16,40 | 16,48 | 16,56 | 16,65 | 16,73 |
| **4,1** | 16,81 | 16,89 | 16,97 | 17,06 | 17,14 | 17,22 | 17,31 | 17,39 | 17,47 | 17,56 |
| **4,2** | 17,64 | 17,72 | 17,81 | 17,89 | 17,98 | 18,06 | 18,15 | 18,23 | 18,32 | 18,40 |
| **4,3** | 18,49 | 18,58 | 18,66 | 18,75 | 18,84 | 18,92 | 19,01 | 19,10 | 19,18 | 19,27 |
| **4,4** | 19,36 | 19,45 | 19,54 | 19,62 | 19,71 | 19,80 | 19,89 | 19,98 | 20,07 | 20,16 |
| **4,5** | 20,25 | 20,34 | 20,43 | 20,52 | 20,61 | 20,70 | 20,79 | 20,88 | 20,98 | 21,07 |
| **4,6** | 21,16 | 21,25 | 21,34 | 21,44 | 21,53 | 21,62 | 21,72 | 21,81 | 21,90 | 22,00 |
| **4,7** | 22,09 | 22,18 | 22,28 | 22,37 | 22,47 | 22,56 | 22,66 | 22,75 | 22,85 | 22,94 |
| **4,8** | 23,04 | 23,14 | 23,23 | 23,33 | 23,43 | 23,52 | 23,62 | 23,72 | 23,81 | 23,91 |
| **4,9** | 24,01 | 24,11 | 24,21 | 24,30 | 24,40 | 24,50 | 24,60 | 24,70 | 24,80 | 24,90 |
| **5,0** | 25,00 | 25,10 | 25,20 | 25,30 | 25,40 | 25,50 | 25,60 | 25,70 | 25,81 | 25,91 |
| **5,1** | 26,01 | 26,11 | 26,21 | 26,32 | 26,42 | 26,52 | 26,63 | 26,73 | 26,83 | 26,94 |
| **5,2** | 27,04 | 27,14 | 27,25 | 27,35 | 27,46 | 27,56 | 27,67 | 27,77 | 27,88 | 27,98 |
| **5,3** | 28,09 | 28,20 | 28,30 | 28,41 | 28,52 | 28,62 | 28,73 | 28,84 | 28,94 | 29,05 |
| **5,4** | 29,16 | 29,27 | 29,38 | 29,48 | 29,59 | 29,70 | 29,81 | 29,92 | 30,03 | 30,14 |

## TABLA DE CUADRADOS

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **5,5** | 30,25 | 30,36 | 30,47 | 30,58 | 30,69 | 30,80 | 30,91 | 31,02 | 31,14 | 31,25 |
| **5,6** | 31,36 | 31,47 | 31,58 | 31,70 | 31,81 | 31,92 | 32,04 | 32,15 | 32,26 | 32,38 |
| **5,7** | 32,49 | 32,60 | 32,72 | 32,83 | 32,95 | 33,06 | 33,18 | 33,29 | 33,41 | 33,52 |
| **5,8** | 33,64 | 33,76 | 33,87 | 33,99 | 34,11 | 34,22 | 34,34 | 34,46 | 34,57 | 34,69 |
| **5,9** | 34,81 | 34,93 | 35,05 | 35,16 | 35,28 | 35,40 | 35,52 | 35,64 | 35,76 | 35,88 |
| **6,0** | 36,00 | 36,12 | 36,24 | 36,36 | 36,48 | 36,60 | 36,72 | 36,84 | 36,97 | 37,09 |
| **6,1** | 37,21 | 37,33 | 37,45 | 37,58 | 37,70 | 37,82 | 37,95 | 38,07 | 38,19 | 38,32 |
| **6,2** | 38,44 | 38,56 | 38,69 | 38,81 | 38,94 | 39,06 | 39,19 | 39,31 | 39,44 | 39,56 |
| **6,3** | 39,69 | 39,82 | 39,94 | 40,07 | 40,20 | 40,32 | 40,45 | 40,58 | 40,70 | 40,83 |
| **6,4** | 40,96 | 41,09 | 41,22 | 41,34 | 41,47 | 41,60 | 41,73 | 41,86 | 41,99 | 42,12 |
| **6,5** | 42,25 | 42,38 | 42,51 | 42,64 | 42,77 | 42,90 | 43,03 | 43,16 | 43,30 | 43,43 |
| **6,6** | 43,56 | 43,69 | 43,82 | 43,96 | 44,09 | 44,22 | 44,36 | 44,49 | 44,62 | 44,76 |
| **6,7** | 44,89 | 45,02 | 45,16 | 45,29 | 45,43 | 45,56 | 45,70 | 45,83 | 45,97 | 46,10 |
| **6,8** | 46,24 | 46,38 | 46,51 | 46,65 | 46,79 | 46,92 | 47,06 | 47,20 | 47,33 | 47,47 |
| **6,9** | 47,61 | 47,75 | 47,89 | 48,02 | 48,16 | 48,30 | 48,44 | 48,58 | 48,72 | 48,86 |
| **7,0** | 49,00 | 49,14 | 49,28 | 49,42 | 49,56 | 49,70 | 49,84 | 49,98 | 50,13 | 50,27 |
| **7,1** | 50,41 | 50,55 | 50,69 | 50,84 | 50,98 | 51,12 | 51,27 | 51,41 | 51,55 | 51,70 |
| **7,2** | 51,84 | 51,98 | 52,13 | 52,27 | 52,42 | 52,56 | 52,71 | 52,85 | 53,00 | 53,14 |
| **7,3** | 53,29 | 53,44 | 53,58 | 53,73 | 53,88 | 54,02 | 54,17 | 54,32 | 54,46 | 54,61 |
| **7,4** | 54,76 | 54,91 | 55,06 | 55,20 | 55,35 | 55,50 | 55,65 | 55,80 | 55,95 | 56,10 |
| **7,5** | 56,25 | 56,40 | 56,55 | 56,70 | 56,85 | 57,00 | 57,15 | 57,30 | 57,46 | 57,61 |
| **7,6** | 57,76 | 57,91 | 58,06 | 58,22 | 58,37 | 58,52 | 58,68 | 58,83 | 58,98 | 59,14 |
| **7,7** | 59,29 | 59,44 | 59,60 | 59,75 | 59,91 | 60,06 | 60,22 | 60,37 | 60,53 | 60,68 |
| **7,8** | 60,84 | 61,00 | 61,15 | 61,31 | 61,47 | 61,62 | 61,78 | 61,94 | 62,09 | 62,25 |
| **7,9** | 62,41 | 62,57 | 62,73 | 62,88 | 63,04 | 63,20 | 63,36 | 63,52 | 63,68 | 63,84 |
| **8,0** | 64,00 | 64,16 | 64,32 | 64,48 | 64,64 | 64,80 | 64,96 | 65,12 | 65,29 | 65,45 |
| **8,1** | 65,61 | 65,77 | 65,93 | 66,10 | 66,26 | 66,42 | 66,59 | 66,75 | 66,91 | 67,08 |
| **8,2** | 67;24 | 67,40 | 67,57 | 67,73 | 67,90 | 68,06 | 68,23 | 68,39 | 68,56 | 68,72 |
| **8,3** | 68,89 | 69,06 | 69,22 | 69,39 | 69,56 | 69,72 | 69,89 | 70,06 | 70,22 | 70,39 |
| **8,4** | 70,56 | 70,73 | 70,90 | 71,06 | 71,23 | 71,40 | 71,57 | 71,74 | 71,91 | 72,08 |
| **8,5** | 72,25 | 72,42 | 72,59 | 72,76 | 72,93 | 73,10 | 73,27 | 73,44 | 73,62 | 73,79 |
| **8,6** | 73,96 | 74,13 | 74,30 | 74,48 | 74,65 | 74,82 | 75,00 | 75,17 | 75,34 | 75,52 |
| **8,7** | 75,69 | 75,86 | 76,04 | 76,21 | 76,39 | 76,56 | 76,74 | 76,91 | 77,09 | 77,26 |
| **8,8** | 77,44 | 77,62 | 77,79 | 77,97 | 78,15 | 78,32 | 78,50 | 78,68 | 78,85 | 79,03 |
| **8,9** | 79,21 | 79,39 | 79,57 | 79,74 | 79,92 | 80,10 | 80,28 | 80,46 | 80,64 | 80,82 |
| **9,0** | 81,00 | 81,18 | 81,36 | 81,54 | 81,72 | 81,90 | 82,08 | 82,26 | 82,45 | 82,63 |
| **9,1** | 82,81 | 82,99 | 83,17 | 83,36 | 83,54 | 83,72 | 83,91 | 84,09 | 84,27 | 84,46 |
| **9,2** | 84,64 | 84,82 | 85,01 | 85,19 | 85,38 | 85,56 | 85,75 | 85,93 | 86,12 | 86,30 |
| **9,3** | 86,49 | 86,68 | 86,86 | 87,05 | 87,24 | 87,42 | 87,61 | 87,80 | 87,98 | 88,17 |
| **9,4** | 88,36 | 88,55 | 88,74 | 88,92 | 89,11 | 89,30 | 89,49 | 89,68 | 89,87 | 90,06 |
| **9,5** | 90,25 | 90,44 | 90,63 | 90,82 | 91,01 | 91,20 | 91,39 | 91,58 | 91,78 | 91,97 |
| **9,6** | 92,16 | 92,35 | 92,54 | 92,74 | 92,93 | 93,12 | 93,32 | 93,51 | 93,70 | 93,90 |
| **9,7** | 94,09 | 94,28 | 94,48 | 94,67 | 94,87 | 95,06 | 95,26 | 95,45 | 95,65 | 95,84 |
| **9,8** | 96,04 | 96,24 | 96,43 | 96,63 | 96,83 | 97,02 | 97,22 | 97,42 | 97,61 | 97,81 |
| **9,9** | 98,01 | 98,21 | 98,41 | 98,60 | 98,80 | 99,00 | 99,20 | 99,40 | 99,60 | 99,80 |

## TABLA DE CUBOS

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1,0** | 1,000 | 1,030 | 1,061 | 1,093 | 1,125 | 1,158 | 1,191 | 1,225 | 1,260 | 1,295 |
| **1,1** | 1,331 | 1,368 | 1,405 | 1,443 | 1,482 | 1,521 | 1,561 | 1,602 | 1,643 | 1,685 |
| **1,2** | 1,728 | 1,772 | 1,816 | 1,861 | 1,907 | 1,953 | 2,000 | 2,048 | 2,097 | 2,147 |
| **1,3** | 2,197 | 2,248 | 2,300 | 2,353 | 2,406 | 2,460 | 2,515 | 2,571 | 2,628 | 2,686 |
| **1,4** | 2,744 | 2,803 | 2,863 | 2,924 | 2,986 | 3,049 | 3,112 | 3,177 | 3,242 | 3,308 |
| **1,5** | 3,375 | 3,443 | 3,512 | 3,582 | 3,652 | 3,724 | 3,796 | 3,870 | 3,944 | 4,020 |
| **1,6** | 4,096 | 4,173 | 4,252 | 4,331 | 4,411 | 4,492 | 4,574 | 4,657 | 4,742 | 4,827 |
| **1,7** | 4,913 | 5,000 | 5,088 | 5,178 | 5,268 | 5,359 | 5,452 | 5,545 | 5,640 | 5,735 |
| **1,8** | 5,832 | 5,930 | 6,029 | 6,128 | 6,230 | 6,332 | 6,435 | 6,539 | 6,645 | 6,751 |
| **1,9** | 6,859 | 6,968 | 7,078 | 7,189 | 7,301 | 7,415 | 7,530 | 7,645 | 7,762 | 7,881 |
| **2,0** | 8,000 | 8,121 | 8,242 | 8,365 | 8,490 | 8,615 | 8,742 | 8,870 | 8,999 | 9,129 |
| **2,1** | 9,261 | 9,394 | 9,528 | 9,664 | 9,800 | 9,938 | 10,08 | 10,22 | 10,36 | 10,50 |
| **2,2** | 10,65 | 10,79 | 10,94 | 11,09 | 11,24 | 11,39 | 11,54 | 11,70 | 11,85 | 12,01 |
| **2,3** | 12,17 | 12,33 | 12,49 | 12,65 | 12,81 | 12,98 | 13,14 | 13,31 | 13,48 | 13,65 |
| **2,4** | 13,82 | 14,00 | 14,17 | 14,35 | 14,53 | 14,71 | 14,89 | 15,07 | 15,25 | 15,44 |
| **2,5** | 15,63 | 15,81 | 16,00 | 16,19 | 16,39 | 16,58 | 16,78 | 16,97 | 17,17 | 17,37 |
| **2,6** | 17,58 | 17,78 | 17,98 | 18,19 | 18,40 | 18,61 | 18,82 | 19,03 | 19,25 | 19,47 |
| **2,7** | 19,68 | 19,90 | 20,12 | 20,35 | 20,57 | 20,80 | 21,02 | 21,25 | 21,48 | 21,72 |
| **2,8** | 21,95 | 22,19 | 22,43 | 22,67 | 22,91 | 23,15 | 23,39 | 23,64 | 23,89 | 24,14 |
| **2,9** | 24,39 | 24,64 | 24,90 | 25,15 | 25,41 | 25,67 | 25,93 | 26,20 | 26,46 | 26,73 |
| **3,0** | 27,00 | 27,27 | 27,54 | 27,82 | 28,09 | 28,37 | 28,65 | 28,93 | 29,22 | 29,50 |
| **3,1** | 29,79 | 30,08 | 30,37 | 30,66 | 30,96 | 31,26 | 31,55 | 31,86 | 32,16 | 32,46 |
| **3,2** | 32,77 | 33,08 | 33,39 | 33,70 | 34,01 | 34,33 | 34,65 | 34,97 | 35,29 | 35,61 |
| **3,3** | 35,94 | 36,26 | 36,59 | 36,93 | 37,26 | 37,60 | 37,93 | 38,27 | 38,61 | 38,96 |
| **3,4** | 39,30 | 39,65 | 40,00 | 40,35 | 40,71 | 41,06 | 41,42 | 41,78 | 42,14 | 42,51 |
| **3,5** | 42,88 | 43,24 | 43,61 | 43,99 | 44,36 | 44,74 | 45,12 | 45,50 | 45,88 | 46,27 |
| **3,6** | 46,66 | 47,05 | 47,44 | 47,83 | 48,23 | 48,63 | 49,03 | 49,43 | 49,84 | 50,24 |
| **3,7** | 50,65 | 51,06 | 51,48 | 51,90 | 52,31 | 52,73 | 53,16 | 53,58 | 54,01 | 54,44 |
| **3,8** | 54,87 | 55,31 | 55,74 | 56,18 | 56,62 | 57,07 | 57,51 | 57,96 | 58,41 | 58,86 |
| **3,9** | 59,32 | 59,78 | 60,24 | 60,70 | 61,16 | 61,63 | 62,10 | 62,57 | 63,04 | 63,52 |
| **4,0** | 64,00 | 64,48 | 64,96 | 65,45 | 65,94 | 66,43 | 66,92 | 67,42 | 67,92 | 68,42 |
| **4,1** | 68,92 | 69,43 | 69,93 | 70,44 | 70,96 | 71,47 | 71,99 | 72,51 | 73,03 | 73,56 |
| **4,2** | 74,09 | 74,62 | 75,15 | 75,69 | 76,23 | 76,77 | 77,31 | 77,85 | 78,40 | 78,95 |
| **4,3** | 79,51 | 80,06 | 80,62 | 81,18 | 81,75 | 82,31 | 82,88 | 83,45 | 84,03 | 84,60 |
| **4,4** | 85,18 | 85,77 | 86,35 | 86,94 | 87,53 | 88,12 | 88,72 | 89,31 | 89,92 | 90,52 |
| **4,5** | 91,13 | 91,73 | 92,35 | 92,96 | 93,58 | 94,20 | 94,82 | 95,44 | 96,07 | 96,70 |
| **4,6** | 97,34 | 97,97 | 98,61 | 99,25 | 99,90 | 100,5 | 101,2 | 101,8 | 102,5 | 103,2 |
| **4,7** | 103,8 | 104,5 | 105,2 | 105,8 | 106,5 | 107,2 | 107,9 | 108,5 | 109,2 | 109,9 |
| **4,8** | 110,6 | 111,3 | 112,0 | 112,7 | 113,4 | 114,1 | 114,8 | 115,5 | 116,2 | 116,9 |
| **4,9** | 117,6 | 118,4 | 119,1 | 119,8 | 120,6 | 121,3 | 122,0 | 122,8 | 123,5 | 124,3 |
| **5,0** | 125,0 | 125,8 | 126,5 | 127,3 | 128,0 | 128,8 | 129,6 | 130,3 | 131,1 | 131,9 |
| **5,1** | 132,7 | 133,4 | 134,2 | 135,0 | 135,8 | 136,6 | 137,4 | 138,2 | 139,0 | 139,8 |
| **5,2** | 140,6 | 141,4 | 142,2 | 143,1 | 143,9 | 144,7 | 145,5 | 146,4 | 147,2 | 148,0 |
| **5,3** | 148,9 | 149,7 | 150,6 | 151,4 | 152,3 | 153,1 | 154,0 | 154,9 | 155,7 | 156,6 |
| **5.4** | 157,5 | 158,3 | 159,2 | 160,1 | 161,0 | 161,9 | 162,8 | 163,7 | 164,6 | 165,5 |

## TABLA DE CUBOS

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **5,5** | 166,4 | 167,3 | 168,2 | 169,1 | 170,0 | 171,0 | 171,9 | 172,8 | 173,7 | 174,7 |
| **5,6** | 175,6 | 176,6 | 177,5 | 178,5 | 179,4 | 180,4 | 181,3 | 182,3 | 183,3 | 184,2 |
| **5,7** | 185,2 | 186,2 | 187,1 | 188,1 | 189,1 | 190,1 | 191,1 | 192,1 | 193,1 | 194,1 |
| **5,8** | 195,1 | 196,1 | 197,1 | 198,2 | 199,2 | 200,2 | 201,2 | 202,3 | 203,3 | 204,3 |
| **5,9** | 205,4 | 206,4 | 207,5 | 208,5 | 209,6 | 210,6 | 211,7 | 212,8 | 213,8 | 214,9 |
| **6,0** | 216,0 | 217,1 | 218,2 | 219,3 | 220,3 | 221,4 | 222,5 | 223,6 | 224,8 | 225,9 |
| **6,1** | 227,0 | 228,1 | 229,2 | 230,3 | 231,5 | 232,6 | 233,7 | 234,9 | 236,0 | 237,2 |
| **6,2** | 238,3 | 239,5 | 240,6 | 241,8 | 243,0 | 244,1 | 245,3 | 246,5 | 247,7 | 248,9 |
| **6,3** | 250,0 | 251,2 | 252,4 | 253,6 | 254,8 | 256,0 | 257,3 | 258,5 | 259,7 | 260,9 |
| **6,4** | 262,1 | 263,4 | 264,6 | 265,8 | 267,1 | 268,3 | 269,6 | 270,8 | 272,1 | 273,4 |
| **6,5** | 274,6 | 275,9 | 277,2 | 278,4 | 279,7 | 281,0 | 282,3 | 283,6 | 284,9 | 286,2 |
| **6,6** | 287,5 | 288,8 | 290,1 | 291,4 | 292,8 | 294,1 | 295,4 | 296,7 | 298,1 | 299,4 |
| **6,7** | 300,8 | 302,1 | 303,5 | 304,8 | 306,2 | 307,5 | 308,9 | 310,3 | 311,7 | 313,0 |
| **6,8** | 314,4 | 315,8 | 317,2 | 318,6 | 320,0 | 321,4 | 322,8 | 324,2 | 325,7 | 327,1 |
| **6,9** | 328,5 | 329,9 | 331,4 | 332,8 | 334,3 | 335,7 | 337,2 | 338,6 | 340,1 | 341,5 |
| **7,0** | 343,0 | 344,5 | 345,9 | 347,4 | 348,9 | 350,4 | 351,9 | 353,4 | 354,9 | 356,4 |
| **7,1** | 357,9 | 359,4 | 360,9 | 362,5 | 364,0 | 365,5 | 367,1 | 368,6 | 370,1 | 371,7 |
| **7,2** | 373,2 | 374,8 | 376,4 | 377,9 | 379,5 | 381,1 | 382,7 | 384,2 | 385,8 | 387,4 |
| **7,3** | 389,0 | 390,6 | 392,2 | 393,8 | 395,4 | 397,1 | 398,7 | 400,3 | 401,9 | 403,6 |
| **7,4** | 405,2 | 406,9 | 408,5 | 410,2 | 411,8 | 413,5 | 415,2 | 416,8 | 418,5 | 420,2 |
| **7,5** | 421,9 | 423,6 | 425,3 | 427,0 | 428,7 | 430,4 | 432,1 | 433,8 | 435,5 | 437,2 |
| **7,6** | 439,0 | 440,7 | 442,5 | 444,2 | 445,9 | 447,7 | 449,5 | 451,2 | 453,0 | 454,8 |
| **7,7** | 456,5 | 458,3 | 460,1 | 461,9 | 463,7 | 465,5 | 467,3 | 469,1 | 470,9 | 472,7 |
| **7,8** | 474,6 | 476,4 | 478,2 | 480,0 | 481,9 | 483,7 | 485,6 | 487,4 | 489,3 | 491,2 |
| **7,9** | 493,0 | 494,9 | 496,8 | 498,7 | 500,6 | 502,5 | 504,4 | 506,3 | 508,2 | 510,1 |
| **8,0** | 512,0 | 513,9 | 515,8 | 517,8 | 519,7 | 521,7 | 523,6 | 525,6 | 527,5 | 529,5 |
| **8,1** | 531,4 | 533,4 | 535,4 | 537,4 | 539,4 | 541,3 | 543,3 | 545,3 | 547,3 | 549,4 |
| **8,2** | 551,4 | 553,4 | 555,4 | 557,4 | 559,5 | 561,5 | 563,6 | 565,6 | 567,7 | 569,7 |
| **8,3** | 571,8 | 573,9 | 575,9 | 578,0 | 580,1 | 582,2 | 584,3 | 586,4 | 588,5 | 590,6 |
| **8,4** | 592,7 | 594,8 | 596,9 | 599,1 | 601,2 | 603,4 | 605,5 | 607,6 | 609,8 | 612,0 |
| **8,5** | 614,1 | 616,3 | 618,5 | 620,7 | 622,8 | 625,0 | 627,2 | 629,4 | 631,6 | 633,8 |
| **8,6** | 636,1 | 638,3 | 640,5 | 642,7 | 645,0 | 647,2 | 649,5 | 651,7 | 654,0 | 656,2 |
| **8,7** | 658,5 | 660,8 | 663,1 | 665,3 | 667,6 | 669,9 | 672,2 | 674,5 | 676,8 | 679,2 |
| **8,8** | 681,5 | 683,8 | 686,1 | 688,5 | 690,8 | 693,2 | 695,5 | 697,9 | 700,2 | 702,6 |
| **8,9** | 705,0 | 707,3 | 709,7 | 712,1 | 714,5 | 716,9 | 719,3 | 721,7 | 724,2 | 726,6 |
| **9,0** | 729,0 | 731,4 | 733,9 | 736,3 | 738,8 | 741,2 | 743,7 | 746,1 | 748,6 | 751,1 |
| **9,1** | 753,6 | 756,1 | 758,6 | 761,0 | 763,6 | 766,1 | 768,6 | 771,1 | 773,6 | 776,2 |
| **9,2** | 778,7 | 781,2 | 783,8 | 786,3 | 788,9 | 791,5 | 794,0 | 796,6 | 799,2 | 801,8 |
| **9,3** | 804,4 | 807,0 | 809,6 | 812,2 | 814,8 | 817,4 | 820,0 | 822,7 | 825,3 | 827,9 |
| **9,4** | 830,6 | 833,2 | 835,9 | 838,6 | 841,2 | 843,9 | 846,6 | 849,3 | 852,0 | 854,7 |
| **9,5** | 857,4 | 860,1 | 862,8 | 865,5 | 868,3 | 871,0 | 873,7 | 876,5 | 879,2 | 882,0 |
| **9,6** | 884,7 | 887,5 | 890,3 | 893,1 | 895,8 | 898,6 | 901,4 | 904,2 | 907,0 | 909,9 |
| **9,7** | 912,7 | 915,5 | 918,3 | 921,2 | 924,0 | 926,9 | 929,7 | 932,6 | 935,4 | 938,3 |
| **9,8** | 941,2 | 944,1 | 947,0 | 949,9 | 952,8 | 955,7 | 958,6 | 961,5 | 964,4 | 967,4 |
| **9,9** | 970,3 | 973,2 | 976,2 | 979,1 | 982,1 | 985,1 | 988,0 | 991,0 | 994,0 | 997,0 |

Colección Secundaria Básica

*Matemática 8º. grado* es el texto básico para los estudiantes de este nivel de la Educación General. Consta de tres capítulos: "Dominio de los números reales y estadística descriptiva", "Geometría plana y cálculo de cuerpos" y "Variables, ecuaciones y funciones"; en todos ellos aparecen definiciones, teoremas, ejemplos, y diferentes ejercicios que, en su conjunto, contribuyen a recordar lo aprendido y a enriquecer los conocimientos a partir de la práctica, con la posibilidad de comprobar las respuestas al final de cada capítulo. Se incluye, además, un examen para la autoevaluación.

Asimismo aparecen numerosas ilustraciones que facilitan la comprensión de los contenidos tratados; se incluyen las tablas de cuadrados y cubos que resultan de gran utilidad para la solución de los ejercicios propuestos.

9789591328564