ORIENTACIONES METODOLÓGICAS

MATEMÁTICA
octavo grado

ORIENTACIONES METODOLÓGICAS

MATEMÁTICA

octavo grado

M. Sc. Susana Acosta Hernández
M. Sc. Oscar Domínguez Escobar
M. Sc. Margarita Gort Sánchez
M. Sc. Lourdes Báez Arbesú
Dr. C. Aurelio Quintana Valdés

EDITORIAL
PUEBLO Y EDUCACIÓN

Edición y corrección:

• Claudia Ribalta Contreras

Diseño:

• Instituto Superior de Diseño (ISDi)

Ilustración y emplane:

• Camila Noa Clavero

ISBN 978-959-13-4742-8 (Versión impresa)

ISBN 978-959-13-4743-5 (Versión digital)

EDITORIAL PUEBLO Y EDUCACIÓN
Ave. 3.ª A No. 4601 entre 46 y 60,
Playa, La Habana, Cuba. CP 11300.
epueblo@epe.gemined.cu

ÍNDICE

Consideraciones generales

Estas orientaciones metodológicas para el octavo grado tienen el fin de apoyarlo en su trabajo, familiarizarlo con los objetivos del programa, proponerle sugerencias metodológicas para el tratamiento de los contenidos de la asignatura y ayudarlo en su superación pedagógica.

Sabemos que la contribución de estas orientaciones metodológicas no será suficiente para elevar la calidad de su trabajo. Es necesario que estudie para ampliar su dominio en los contenidos de la asignatura y el conocimiento de su metodología, de modo que pueda comprender mejor estas orientaciones, enriquecerlas con su quehacer diario y seleccionar las vías y métodos más adecuados para desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje con su grupo de educandos, con el fin de contribuir a consolidar el desarrollo y la formación integral de la personalidad del adolescente desde sus formas de sentir, pensar y actuar, expresadas en una profunda preparación científico-investigativa y para la vida, un nivel superior de autodeterminación, creatividad, actitudes, convicciones y comportamientos cívicos que le permitan concebir su proyecto de vida a favor de una participación sentida, consciente, protagónica e incondicional en la construcción y defensa del Sistema Socialista Cubano, y en función de acceder eficientemente a niveles superiores de estudios, de acuerdo con sus potencialidades, aspiraciones laborales, intereses y motivos personales y sociales.

- Sugerencias metodológicas de carácter general que están relacionadas con todas las unidades o con algunas de ellas. Las unidades se corresponden con los capítulos del libro de texto de los educandos y cada una de ellas se divide en unidades temáticas según su contenido. Estas unidades temáticas aparecen indicadas en los programas y se corresponden con los epígrafes de libro de texto.

- Sugerencias específicas por unidades, que contienen:
  - Ideas esenciales.
  - Sugerencias para el tratamiento del contenido.

Concepción didáctica de la asignatura en el grado

En este grado, como en el resto de los grados que conforman el subsistema de la Educación General, el contenido se determina a partir del sistema de objetivos de la Educación Secundaria Básica, de la disciplina, de la asignatura en el grado y de las unidades de estudio que componen el programa y se estructura sobre la base de las líneas directrices de la enseñanza de la Matemática.

Los objetivos de la disciplina se derivan del fin y los objetivos de la Educación Secundaria Básica y expresan lo que deben lograr los educandos con el estudio de la Matemática en esta educación. Es por esto que los objetivos reflejan: el carácter creador y partidista de la disciplina; las relaciones interdisciplinarias que posibilitan la aplicación del contenido matemático en otras áreas del saber; el desarrollo del pensamiento matemático que permite operar con conceptos, relaciones y procedimientos; las habilidades y hábitos que aseguran una educación matemática adecuada; la resolución y formulación de problemas intramatemáticos y extramatemáticos para la fijación de contenidos, la obtención de nuevos conocimientos y la contribución a la educación general integral de los educandos; las habilidades comunicativas, el uso adecuado de la terminología y la simbología matemáticas y la interpretación del lenguaje de los recursos de las tecnologías de la información y las comunicaciones y de otras fuentes; las formas para desarrollar de manera independiente y cooperada un aprendizaje desarrollador y la racionalización eficiente del trabajo mental.

Las exigencias del sistema de objetivos requieren que asumamos la categoría contenida desde una dimensión más amplia, que incluya:[1]

[1] Álvarez P., M., B. Almeida y E. Villegas (2014): *El proceso de enseñanza -aprendizaje de la Matemática*. Documentos metodológicos. La Habana: Editorial Pueblo y Educación, páginas 28-31.

- Conceptos, relaciones y procedimientos matemáticos.
- Habilidades generales intelectuales y específicas; hábitos de planificación, de organización, de autocontrol y de la utilización de recursos para racionalizar el trabajo mental.
- Métodos de la actividad cognoscitiva (inductivo, deductivo, analítico, sintético, por analogía, entre otros) técnicas de trabajo mental, estrategias de aprendizaje, algoritmos y procedimientos heurísticos.
- Cualidades de la personalidad y convicciones filosóficas, políticas, morales e ideológicas fundamentales, relacionadas con la ciencia matemática o que resulten directamente de esta.

El eje central de la concepción general del trabajo en la asignatura Matemática lo constituye la *formulación y resolución de problemas*. Esto exige que la comprensión y aplicación por los educandos de los contenidos de cada núcleo temático (números, magnitudes, ecuaciones, funciones, geometría y trigonometría, estadística, e ideas combinatorias) debe apoyarse en las consideraciones siguientes.

CONSIDERACIONES SOBRE LA LÍNEA DIRECTRIZ FORMULACIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En el aprendizaje de la matemática desempeña un papel trascendental la formulación y resolución de problemas matemáticos. Es por ello por lo que constituye el eje central de la concepción didáctica de la asignatura en todos los niveles educacionales incluyendo la primera infancia.

Con la finalidad de profundizar en la línea directriz antes mencionada, le recomendamos que consulte el libro *El proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática,* en el capítulo dos, epígrafe 2.11 "El transcurso de la línea directriz formulación y resolución de problemas", página 126. El estudio y análisis de este tema contribuirá a la mejor comprensión de los aspectos didácticos y metodológicos que caracterizan el trabajo con problemas matemáticos.

Como complemento del estudio realizado, se ofrecen a continuación algunas consideraciones metodológicas sobre este tema a fin de contribuir al enriquecimiento en su preparación metodológica para la dirección de proceso de enseñanza de la formulación y resolución de problemas. Primeramente, le proponemos que reflexione en torno a la siguiente idea.

¿Qué se entiende por problema?

Muchos autores a nivel internacional y nacional como Polya (1887-1985), M. de Guzmán, A. Schöenfeld (1993), L. Campistrous y C. Rizo (1980, 2002), L. Davidson (1987), S. Ballester y P. Torres (1993), M. Llivina (1999), A. Rebollar (2000), M. Ferrer (2000), D. González (2001), M. Cruz (2002), C. Suárez (2004), J. Ron (2007), entre otros, han investigado y profundizado en aspectos teóricos y prácticos sobre lo que se considera como *problema* y han ofrecido disímiles definiciones en torno a su concepto, desde diferentes posiciones y puntos de vista.

Para Sergio Ballester:

Un problema es un ejercicio que refleja determinadas situaciones a través de elementos y relaciones del dominio de la ciencia a la práctica, en el lenguaje común y exige de medios matemáticos para su solución. Se caracteriza por tener una situación inicial (elementos dados, los datos) conocidos, y una situación final (incógnita, elementos buscados) desconocida, mientras que su vía de solución se obtiene con ayuda de procedimientos heurísticos".[2]

Para Miguel Llivina: *Un ejercicio es un problema si y sólo si la vía de solución es desconocida por la persona.*[3]

Para Luis Campistrous y Celia Rizo, *Un problema es toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía de solución tiene que ser*

[2]Ballester, S. *et al.* (1992). *Metodología de la enseñanza de la Matemática*. Tomo I. Ciudad de La Habana: Editorial Pueblo y Educación, página 407.

[3] Llivina, M. J. (1999). Una propuesta metodológica para contribuir al desarrollo de la capacidad para resolver problemas matemáticos. [Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas]. La Habana: Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona", página 48.

desconocida y el individuo quiere hacer la transformación, es decir, quiere resolver el problema.[4]

Para José Ron, *Un problema es toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo, la vía de solución es desconocida y el educando posee los saberes relativos a la exigencia o es capaz de construirlos*.[5]

Las definiciones anteriores te inducen a identificar los rasgos comunes que tienen las situaciones consideradas como problemas en los que se revela: el planeamiento inicial que caracteriza un problema, el desconocimiento de la vía y la exigencia de transformarlo para su solución, también la disposición de resolverlo.

¿Qué se entiende por resolución, solución y vía de solución de un problema?

Según José Ron Galindo, la *resolución de problemas* es: el proceso mediante el cual se construye la vía de solución o se contradice la existencia de una vía. Por *solución* de un problema todo objeto que satisfaga la exigencia planteada y por **vía de solución**, todo conjunto de proposiciones verdaderas que a través de inferencias enlaza el planteamiento inicial (elementos dados, datos) con la exigencia (incógnita, elementos buscados).[6]

La resolución de problemas es una actividad que requiere fundamentalmente de la aplicación de conocimientos, del establecimiento de relaciones, de la creatividad y de la aplicación de los llamados procedimientos heurísticos, definidos estos como *recursos mentales de búsqueda que permitan orientarse y obtener la*

[4] Campistrous, L. y Rizo, C. (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación, página 1.

[5] Ron, J. (2007). Una estrategia didáctica para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas en las clases de Matemática en la Educación Secundaria Básica. [Tesis en opción al grado científico de doctor en Ciencias Pedagógicas]. La Habana: Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona", página 26.

[6] Ron, J. (2007). Una estrategia didáctica para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas en las clases de Matemática en la Educación Secundaria Básica. [Tesis en opción al grado científico de doctor en Ciencias Pedagógicas]. La Habana: Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona", página 26.

vía de solución durante el proceso de resolución de un problema matemático.[7]

Otro aspecto importante que se describe en la línea directriz y como parte de la concepción didáctica de la asignatura es la **formulación de problemas** entendida como: *la actividad de estudio que consiste en identificar, crear, narrar, redactar un problema matemático en forma individual o colectiva, a partir de una situación inicial dada o creada por la o las personas que la realizan.*[8]

La formulación de problemas no es exclusiva de un grado ni de un contenido matemático en particular, se trata de un objetivo a lograr a lo largo de todo el ciclo educativo y de manera gradual en todo el sistema de conocimientos que debe adquirir el educando. Tiene su inicio en el sistema de actividades que preparan los docentes en las tareas de aprendizaje para estimular a los educandos que expresen libremente sus dudas, creencias, preguntas, estrategias y conclusiones.

No se trata de proporcionar datos a los educandos para que elaboren un problema, la idea es que puedan expresar interrogantes y formular problemas a partir de una situación dada, de una expresión matemática, de un modelo gráfico, de la interacción con un objeto matemático por diferentes vías: *software,* variación de parámetros, condiciones de un problema dado. Un nivel superior lo constituye la reformulación de problemas mediante la variación de condiciones que permitan su limitación o la generalización.

[7] Torres, P. (2000). La Instrucción Heurística de la Matemática Escolar. Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona". La Habana, páginas 14 y 15.

[8] González, D. (2001). La superación de los maestros primarios en la formulación de problemas matemáticos. [Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas]. La Habana. Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona", página 105.

Sugerencias específicas para el tratamiento didáctico y metodológico del contenido de cada unidad del programa

En el tratamiento del contenido de las unidades se deben utilizar las secciones del libro de texto, los asistentes matemáticos (Ejemplo: Geómetra y GeoGebra), los *softwares* y los objetos virtuales de aprendizaje tales como: Plataforma del Portal Educativo CubaEduca, la Biblioteca del Docente y el Portafolio del Docente.

Ejemplo de cómo trabajar con la Plataforma del Portal Educativo CubaEduca:

Las secciones que aparecen en el libro son:

De la historia: En esta aparecen referentes históricos relacionados con el contenido a tratar que permiten al educando adquirir una cultura científica.

Reflexiona: Se muestran situaciones problémicas prácticas relacionadas con los diferentes objetivos generales de la educación que posibilitan la conducción del pensamiento lógico para la adquisición y reactivación del conocimiento, en las que deben los educandos *poner en práctica todo el caudal de conocimientos que posean para encontrarle una solución.*

¿Sabías que...?: Se actualiza el conocimiento y se enriquece con informaciones relevantes en el tema que se trata, expresadas brevemente relacionadas con los diferentes objetivos generales de la educación: una noticia, un descubrimiento o una aplicación de la matemática.

Recuerda que...: Se reafirman los contenidos adquiridos (definiciones, teoremas, relaciones, etc.) con anterioridad que permiten la comprensión del nuevo contenido a tratar y forman parte del caudal de conocimiento acumulado para el pensamiento lógico.

Atención: Constituye una alerta de posibles errores que no se pueden cometer y de acciones que no se pueden dejar de efectuar en los diferentes procedimientos.

Investiga y aprende: Se proponen tareas para investigar y así enriquecer el conocimiento con el aprendizaje de nuevos procederes.

Saber más: Se incorporan informaciones, procedimientos y aplicaciones de mayor nivel de complejidad relacionadas con el conocimiento que se trata.

Aplica tus conocimientos: Aparecen tareas para aplicar los conocimientos adquiridos que pueden solucionar nuevas problemáticas intra y extramatemáticas, relacionadas con los diferentes objetivos generales de la educación, o racionalizar los procedimientos anteriormente adquiridos con los nuevos.

Consejos útiles: Se sugieren pasos lógicos que permiten realizar las tareas con mayor agilidad y racionalidad.

Para el tratamiento con el Portal Educativo Cubano CubaEduca: www.matemática.cubaeduca.cu

Es importante dar a conocer a los educandos que en el Portal Educativo Cubano encontrarán las secciones **Temas, Actividades de aprendizaje** y **¿Cómo se hace?**

En **Temas** aparece, para cada una de las subtemáticas del programa del grado, un módulo que se inicia con una introducción en la que, a partir de la presentación de un problema, se explica qué se aprenderá en el tema, para qué le servirá al educando y qué debe saber para poder estudiar esta temática, para lo que se les propone un test de autoevaluación que es evaluado y en el que aparecen las respuestas correctas con las correspondientes explicaciones. El contenido se presenta con propuestas de actividades y sus respuestas. En **Consolida los conocimientos** se proponen ejercicios interactivos y en las **Preguntas de síntesis** se resume lo más importante.

También se ofrecen herramientas transversales en las que aparecen por cada una de las temáticas preguntas de síntesis, glosario, referencias e índice de palabras claves.

En **Actividades de aprendizaje** se brindan ejercicios interactivos, tareas y juegos para el contenido de cada una de las subtemáticas del grado. Además, los educandos interesados en continuar sus estudios en los institutos preuniversitarios vocacionales de ciencias exactas encontrarán temarios de pruebas de ingreso de cursos anteriores que pueden utilizar para su preparación.

En **¿Cómo se hace?** encontrarán algunos procedimientos que no se enseñan en la escuela y que pueden ser útiles e interesantes, sobre todo para aquellos educandos que les guste la matemática.

Los docentes encontrarán la sección "Ayuda para su desempeño" en la que aparecen sugerencias sobre diferentes temas que se imparten en el grado, ejemplo de tratamiento metodológico de una unidad y otros temas de interés. En la sección "Artículos de interés" se comparten algunos artículos que pueden contribuir a su desempeño profesional y que son fruto de las experiencias de los docentes.

El trabajo con la aplicación matemática GeoGebra

Las características del contenido objeto de enseñanza en la Secundaria Básica, los avances en las tecnologías de la informática y las comunicaciones y el interés, habilidades y motivación por su empleo diario entre los educandos hace necesario introducir el enfoque dinámico en la geometría, para la obtención de nuevas relaciones, por lo que todas las actividades que se diseñen deben tener la intención de obtener conjeturas geométricas (teoremas, definiciones, conceptos, propiedades).

GeoGebra es un *software* matemático interactivo libre para la educación en colegios y universidades. Su creador Markus Hohenwarter, comenzó el proyecto en el año 2001, como parte de su tesis, en la Universidad de Salzburgo, lo continuó en la Universidad Atlántica de Florida (2006-2008), luego en la Universidad Estatal de Florida (2008-2009) y en la actualidad, en la Universidad de Linz, Austria.

Es básicamente un procesador geométrico y un procesador algebraico, es decir, un compendio de matemática con software interactivo que reúne geometría, álgebra, estadística y cálculo, por lo que puede ser usado también en física y otras disciplinas.

Los docentes como los educandos deben desarrollar habilidades básicas suficientes relacionadas con la manipulación de esta aplicación para lograr el éxito a la hora de enfrentar las diferentes situaciones de aprendizaje.

GeoGebra se utiliza para hacer construcciones con puntos, segmentos, líneas, cónicas, cuerpos geométricos y también construcciones usando el teclado y todo es modificable en forma dinámica: es decir, que, si algún objeto depende de A y B, al modificar A, también se actualiza B. Pero también puedes definir funciones reales de variable real, calcular y graficar sus derivadas, integrales, entre muchos otros, etcétera.

El programa ha ganado popularidad en todo el mundo y un gran número de voluntarios se han sumado al proyecto, desarrollando nuevas funcionalidades, materiales didácticos interactivos, traduciendo tanto el software como su documentación a decenas de idiomas, colaborando con nuevos usuarios a través del foro destinado para tal fin. En la actualidad, existe una comunidad de docentes, investigadores, desarrolladores de software, educandos y otras personas interesadas en la temática, que se nuclean en los distintos Institutos GeoGebra locales que articulan entre sí a través del Instituto GeoGebra Internacional.

El GeoGebra se ejecuta, haciendo clic sobre el ícono que aparece en la figura A.

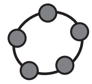


Figura A

En el monitor se proyecta la ventana que aparece en la figura B.

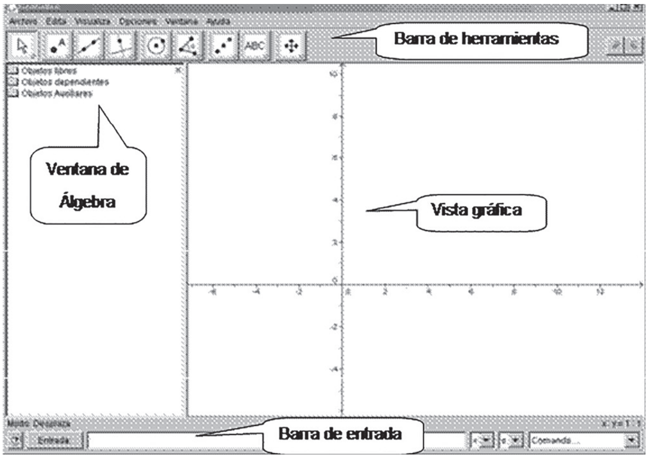
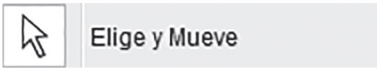


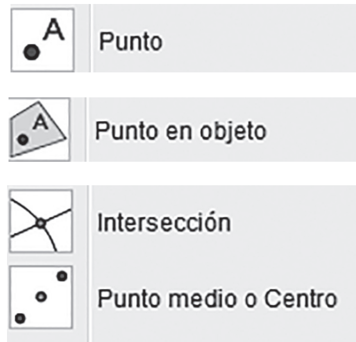
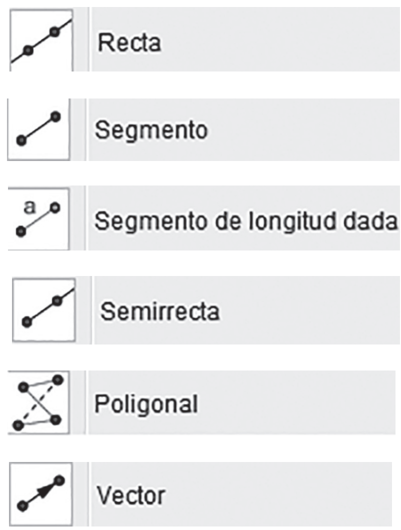
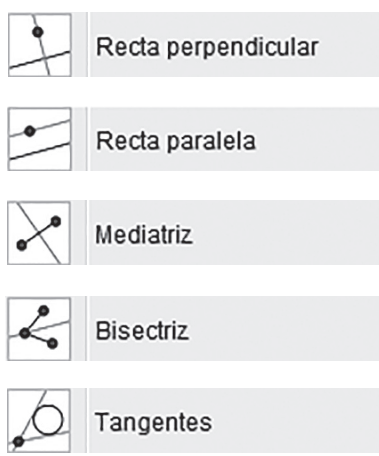
Figura B

La página de GeoGebra tiene cuatro partes fundamentales e importantes que son:

- Barra de herramientas, las que facilitarán el trabajo y la construcción de aprendizajes.
- Ventana de Álgebra, en la que se registran todos los detalles y datos que se van ingresando para la construcción.
- Vista gráfica es el espacio de trabajo donde se ejecutan las gráficas de acuerdo con los comandos ingresados.
- Bandeja de entrada, espacio en el cual se ingresan los comandos y las gráficas se van dibujando en la zona gráfica.

Principales herramientas a utilizar en la Educación Secundaria Básica

Herramientas	Simbología
1. Elige y mueve (se utiliza para mover puntos, rectas, polígonos…)	

2. Trazar: puntos, punto en objeto, punto de intersección y determinar el punto medio de un segmento.	
3. Trazar: recta, segmento, semirrecta, poligonal y vector.	
4. Trazar: recta perpendicular a una recta dada, recta paralela, mediatriz de un segmento, bisectriz de un ángulo y tangentes a una circunferencia.	

Herramientas	Simbología
5. Trazar: polígono cualquiera o un polígono regular.	Polígono Polígono regular Polígono rígido
6. Trazar: circunferencia, semicircunferencia, arco de circunferencia y sector circular.	Circunferencia (centro, punto) Circunferencia (centro, radio) Compás Semicircunferencia Arco de circunferencia Sector circular
7. Medir amplitud de ángulo, trazar ángulo dada una amplitud cualquiera, hallar la distancia entre dos puntos o longitud de un segmento y determinar el área de una región del plano.	Ángulo Ángulo dada su amplitud Distancia o Longitud Área

8. Movimientos.	Simetría Axial Simetrìa Central Rota alrededor de un punto Traslación
9. Escribir un texto.	Texto
10. Deslizador para valores de un parámetro y lograr animar funciones, figuras geométricas, etcétera..	Deslizador
11. Desplazar la vista gráfica, aproximar y alejar el objeto. Mostrar/ocultar objeto o mostrar/ocultar etiqueta se puede ejecutar dando clic derecho sobre el que desee desactivar en el cuadro de diálogo.	Desplaza Vista Gráfica Aproximar Alejar Mostrar/ocultar Objeto Mostrar/ocultar Etiqueta

UNIDAD 1 DOMINIO DE LOS NÚMEROS REALES Y ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

Esta unidad es la primera dentro del programa de octavo grado; en esta se continúa el estudio de los conjuntos numéricos que se inició en la Educación Primaria y en la Educación Secundaria

Básica, donde se inició con el conjunto de los números naturales, se amplió al de los números fraccionarios y luego al de los números racionales introducidos en séptimo grado, además de estudiar como subconjunto de este el conjunto de los números enteros. Al mismo tiempo, en este grado se da continuidad al estudio del procesamiento de datos iniciado desde la Educación Primaria y sistematizado en la Educación Secundaria Básica.

Seguidamente en la unidad se introducen los números irracionales, se describen las características de los elementos que integran los números irracionales y se introduce el conjunto de los números reales como conjunto numérico más amplio. Se sistematizan y amplían los conocimientos sobre el sistema de numeración decimal, el significado de los números naturales, fraccionarios, enteros, racionales y reales en la interpretación de hechos, fenómenos y procesos. También se introducen los conceptos básicos de la estadística descriptiva, así como de variable estadística, su clasificación, se sistematizan los conceptos y procedimientos relacionados con la distribución de frecuencias y gráficos y los conceptos de media aritmética y moda. Se hace una ampliación de las medidas de tendencia central, incluyendo la mediana.

Esta unidad responde a las *líneas directrices relativas al conocimiento, habilidades y forma de pensamiento matemático "Dominios numéricos" y "Tratamiento de datos/estadística"* y les permite a los educandos ordenar y comparar números reales, aplicar las propiedades y relaciones de las operaciones para realizar estimaciones y cálculos con números reales de forma rápida y segura, pasando a la forma de representación de los números más conveniente en cada caso. Esto les permite formular y resolver problemas aplicando los conocimientos sobre el orden de los números y los significados prácticos de las operaciones. Igualmente se amplía el sistema de conocimientos y habilidades en cuanto a los contenidos que se desarrollan en los temas relacionados con la estadística descriptiva, lo que facilita la formulación y resolución de problemas aritméticos que exijan la aplicación de conceptos y procedimientos estadísticos para el procesamiento de datos.

Estas líneas directrices se entrelazan con todas las restantes y deben contribuir al desarrollo de importantes formas de pensamiento matemático como el numérico, el algorítmico, el estadístico, el funcional, el combinatorio y el geométrico.

Los contenidos correspondientes a esta unidad temática se podrán encontrar en el capítulo uno.

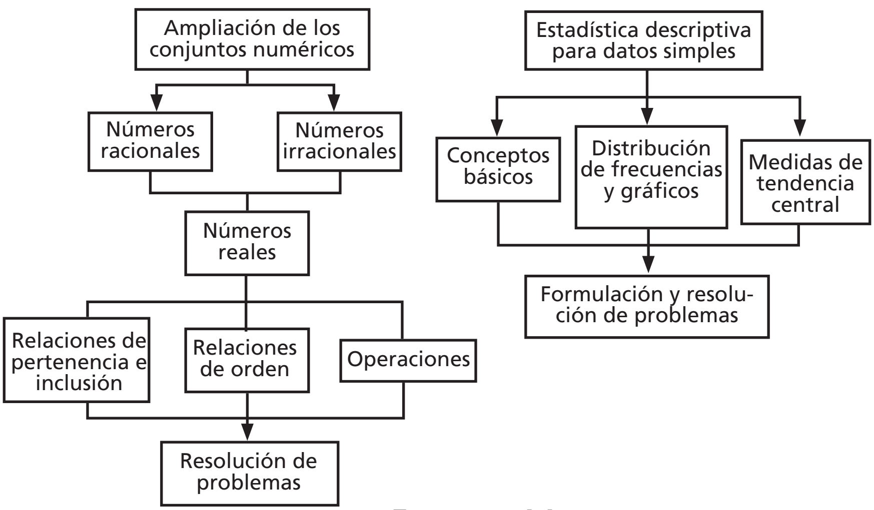
Estructura interna de la unidad

De la estructura que se aprecia en el esquema 1.1 se derivan las unidades temáticas siguientes:

1.1 Repaso sobre los números racionales.

1.2 Nuevos números.

1.3 Estadística descriptiva.
1.3.1 Conceptos básicos.
1.3.2 Construcción de gráficos (de barras y poligonales).
1.3.3 Medidas de tendencia central (media, moda y mediana).



Esquema 1.1

Lo esencial de esta unidad es que los educandos adquieran una comprensión clara de la necesidad de ampliación del conjunto de los números racionales a partir de motivaciones intra y extramatemáticas, que conozcan el significado y el orden de los números reales, sus diferentes formas de representación y desarrollen habilidades en el cálculo de las cuatro operaciones fundamentales con estos números en sus diferentes representaciones.

Con esta unidad, los educandos consolidarán sus conocimientos y habilidades para formular y resolver problemas que impliquen la recogida, recopilación, descripción e interpretación de datos, mediante tablas, gráficos y el cálculo de medidas de tendencia central.

Al concluir la unidad los educandos deben:

- Comparar y ordenar números reales.
- Representar números reales de diferentes formas, en particular, en la recta numérica.
- Estimar cálculos.
- Calcular con números reales en diferentes representaciones, realizando correctamente operaciones combinadas, según el orden establecido para estas, con el número de cifras significativas según la situación planteada.
- Resolver ecuaciones.
- Formular y resolver problemas aritméticos aplicando el significado de las operaciones aritméticas e ideas combinatorias, donde los datos se den en formato numérico o visual (diagramas, tablas, gráficos).
- Formular y resolver problemas aritméticos que exijan la aplicación de conceptos y procedimientos estadísticos para el procesamiento de datos.

1.1 REPASO SOBRE LOS NÚMEROS RACIONALES

Los contenidos correspondientes a esta unidad temática se tratarán en siete horas-clase y aparecen en el epígrafe 1.1 del capítulo uno "El dominio de los números reales y estadística descriptiva" en el libro de texto Matemática (LT octavo grado).

En el esquema 1.2 se puede apreciar la estructura interna de la unidad temática según sus conceptos, relaciones y procedimientos esenciales.

Se recomienda que la primera clase se dedique a recordar las características más importantes de estos números, a analizar los ejemplos donde se muestran operaciones combinadas con números racionales, que aparecen en las primeras páginas del libro, con el apoyo del algoritmo de la sección: "Recuerda que...". Para estas clases se sugiere utilizar los ejercicios del uno al veinte de este epígrafe.

Conceptos

Número racional
Operaciones con números racionales
Razón, proporción, tanto por ciento

→

Relaciones

Relación de inclusión entre los conjuntos numéricos
Relación de pertenencia. Relaciones entre las operaciones
Propiedades de las operaciones
Propiedades de las proporciones
Relaciones entre unidades de medida de distintas magnitudes

→

Procedimientos

Representar números racionales, en particular en la recta numérica
Ordenar y comparar números racionales
Estimar cálculos
Calcular con números racionales en diferentes representaciones, en particular, con cantidades de magnitud que requieren su conversión de una unidad de medida a otra
Resolver ecuaciones
Calcular tanto por ciento

Esquema 1.2

Propuesta de ejercicios que se pueden incorporar a las clases de sistematización.

Calcula:

1) $-\frac{1{,}3^2}{3}\cdot\left(\sqrt{1{,}21}-\sqrt{1{,}96}\right)$ Respuesta: $-0{,}86\overline{3}$

2) $3\frac{2}{3}+\sqrt{2{,}25}$ Respuesta: $\frac{31}{6}$ o $5{,}1\overline{6}$

3) $-1{,}5^2+\frac{2}{11}\cdot\left(-\sqrt{121}\right)$ Respuesta: $-4{,}25$

4) $(-1{,}2)^2-\frac{1}{\sqrt{9}}$ Respuesta: $\frac{83}{75}$ o $1{,}10\overline{6}$

5) $\frac{-18{,}4+3\cdot(-2)^2}{-7-(-2)}$ Respuesta: $1{,}28$

6) $\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\right):\frac{1}{10}-5^2\cdot(-2)$ Respuesta: $53{,}5$

7) $-\frac{5}{4}+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-10:4{,}5$ Respuesta: $-\frac{115}{36}$ o $-3{,}19\overline{4}$

8) $|-24|:(-4)+\frac{5}{8}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2$ Respuesta: $-\frac{427}{72}=-2{,}930\overline{5}$

9) $* \dfrac{\left(3^{-2}\right)^{14} \cdot 4^4 \cdot 3^{32}}{12^{\sqrt{2\left(\frac{7}{4}+4\right)+19\,½}}}$

Ejercicio 9*

$$= \frac{3^{-28} \cdot 3^{32} \cdot 4^4}{12^{\sqrt{2\left(\frac{7}{4}+1\right)+\frac{39}{2}}}}$$

$$= \frac{3^4 \cdot 4^4}{12^{\sqrt{2\left(\frac{11}{4}\right)+\frac{39}{2}}}}$$

$$= \frac{12^4}{12^{\sqrt{\frac{11}{2}+\frac{39}{2}}}}$$

$$= \frac{12^4}{12^{\sqrt{\frac{50}{2}}}}$$

$$= \frac{12^4}{12^{\sqrt{25}}}$$

$$= \frac{12^4}{12^5} = 12^{-1} = \frac{1}{12} = 0{,}08\overline{3}$$

Es necesario en cada curso escolar actualizar los datos reportados en los ejercicios del nueve al 12 de este epígrafe, por los diferentes medios de comunicación.

1.2 NUEVOS NÚMEROS

Los contenidos correspondientes a esta unidad temática se tratarán en cinco horas-clase y aparecen en el epígrafe 1.2 del capítulo uno.

En el esquema 1.3 se puede apreciar la estructura interna de la unidad temática según sus conceptos, relaciones y procedimientos esenciales.

Conceptos	Relaciones	Procedimientos
Números racionales Razón, proporción, tanto por ciento	Relación de inclusión entre los conjuntos numéricos. Relación de pertenencia. Relaciones entre las operaciones	Representación de números racionales en particular en la recta numérica Cálculo con números racionales
Número irracional Conjunto de los números reales Dominios numéricos	Relación de inclusión entre los conjuntos numéricos. Relación de pertenencia. Relaciones entre las operaciones Existencia de puntos irracionales en la recta numérica	Representación de números irracionales en la recta numérica Ordenar y comparar números reales Cálculo con números reales

Esquema 1.3

En la primera clase se recomienda hacer un análisis de la sección: "Reflexiona un instante" que aparece al inicio del epígrafe, para motivar a los educandos en encontrar ese número para introducir los **números irracionales**. Para ampliar los conocimientos matemáticos de los educandos se sugiere analizar la sección: "Saber más", referida a los números que se representan mediante expresiones decimales infinitas no periódicas; además, en esta clase se debe orientar a los educandos leer la sección: "De la historia" para aumentar sus conocimientos sobre el primer matemático en plantear una teoría de los números irracionales.

En otra clase analizar la actividad de la sección: "Reflexiona un instante" donde se demuestra la necesidad de **un nuevo conjunto numérico.** También se debe estudiar de conjunto con los educandos la sección: "De la historia" para ampliar los conocimientos sobre la teoría de los números planteada por Pitágoras.

El docente no puede dejar de analizar la segunda sección: "Saber más" de este epígrafe y el Diagrama de Venn que aparece después (figura 1.9), donde se muestra la relación entre los conjuntos estudiados; además, se debe realizar una lectura comentada con los educandos de las dos secciones: "De la historia" y "Saber más", que aparecen seguidamente.

En esta clase se orienta a los educandos como tarea extraclase la solución de la actividad de la sección: "Investiga y aprende".

La tercera clase se comienza con la discusión de la tarea extraclase indicada a los educandos para el tratamiento de la densidad del conjunto numérico de los números reales que se muestra en las secciones: "Reflexiona un instante" y "Saber más" del final de este epígrafe 1.2. Para completar el conocimiento de este nuevo conjunto se debe analizar la correspondencia entre un número irracional y un punto en la recta numérica; le sugerimos utilizar el asistente matemático GeoGebra como se demuestra a continuación.

Representa gráficamente $\sqrt{2}$

¿Cómo proceder?

- Activar los ejes y cuadrícula en vista gráfica.
- Clic derecho sobre vista gráfica y se obtiene un cuadro de diálogo, luego clic izquierdo en vista gráfica y aparece otro cuadro de diálogo (preferencias).
- Clic izquierdo en eje y, desactivar mostrar eje y
- Trazar un segmento de longitud una unidad, perpendicular a la recta numérica en el número uno con la herramienta segmento y obtendrás el segmento $\overline{AB}$.
- Trazar un segmento desde el origen de la recta numérica hasta *B* y obtendrás el triángulo *ABC* rectángulo en *A* e isósceles.
- Transportar sobre la recta numérica la longitud de la hipotenusa $\overline{BC}$ con la herramienta circunferencia o arco de circunferencia.
- El punto D está ubicado en la recta numérica en $\sqrt{2}$ figura 1.1.

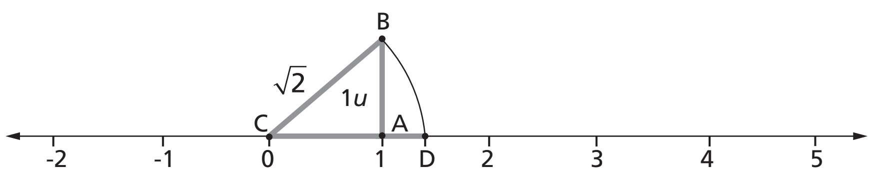
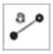


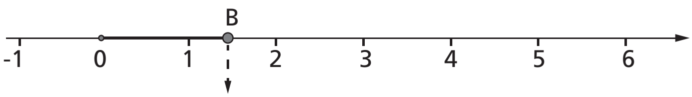
Figura 1.1

Las dos últimas clases se pueden dedicar a la ejercitación con la resolución de los ejercicios del uno al diez de este epígrafe 1.2.

En el caso del ejercicio diez el educando puede buscar en la tabla de cubos que aparece al final del texto y situar el valor en la recta numérica. El docente puede utilizar el asistente matemático GeoGebra y hacer ver que el valor de $\sqrt[3]{3}$ es más exacto que el de la tabla.

¿Cómo proceder para utilizar este asistente matemático?

- Clic derecho sobre la vista gráfica.
- Clic izquierdo en vista gráfica.
- Clic izquierdo en eje Y, desactivar mostrar eje Y.
- Trazar un segmento con la herramienta segmento de longitud dada 
- Dar clic izquierdo en el cero y escribir en el cuadro de diálogo ***raizn(3,3).***
- El punto B, está ubicado en la recta numérica en $\sqrt[3]{3}$ (figura 1.2).



$$\sqrt[3]{3} \approx 1,4422495703$$

Figura 1.2

1.3 ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

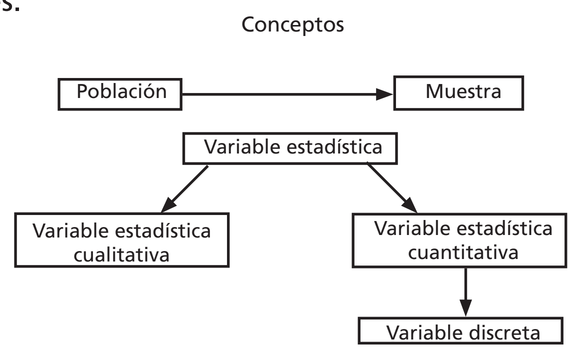
Los contenidos correspondientes a esta unidad temática se tratarán en 16 horas-clase y aparecen en el epígrafe 1.3 del capítulo uno. Esta unidad temática cuenta con tres subtemáticas:

1.3.1 Conceptos básicos.

1.3.2 Construcción de gráficos (de barras y poligonales).

1.3.3 Medidas de tendencia central (media, moda y mediana).

En el esquema 1.4 se puede apreciar la estructura interna de la unidad temática según sus conceptos, relaciones y procedimientos esenciales.



Esquema 1.4

El docente debe comenzar el tratamiento de esta temática con la solución de la actividad de la sección: “Aplica tus conocimientos” para reactivar los conocimientos adquiridos por los educandos en la Educación Primaria y en séptimo grado, que pudiera ser orientada como tarea extraclase en la última clase de la temática anterior. Es importante que los educandos realicen la lectura comentada del contenido de las secciones: “De la historia” y “Saber más” para recordar la definición de estadística descriptiva. La sección: “Atención” asegurará que los educandos conozcan la utilidad de la estadística descriptiva.

1.3.1 Conceptos básicos

Los contenidos correspondientes a esta temática se tratarán en cinco horas-clase y aparecen en el subepígrafe 1.3.1 del capítulo uno.

En esta temática se formalizan los conceptos estudiados en grados anteriores; lo más significativo será la comprensión de los conceptos, dado que no se introducen relaciones ni procedimientos.

La primera clase se inicia con lo comentado anteriormente en el epígrafe 1.3. Se continúa la clase con el tratamiento de los conocimientos de este subepígrafe 1.3.1, para esto el docente debe analizar de conjunto con los educandos la sección inicial: “Reflexiona un instante” para motivar el procedimiento general para el procesamiento de los datos que aparece en la sección: “Recuerda que”. Para formalizar las definiciones de población y muestra se analiza la otra sección: “Reflexiona un instante”. Es necesario realizar una lectura comentada con lo planteado en la sección: “Atención” y el análisis del ejemplo uno.

Para la segunda clase se sugiere el tratamiento de los conceptos variable estadística y su clasificación de manera análoga al proceder anterior con el análisis de situaciones que incluyan los diferentes tipos de variables y las características de cada una de estas, similares a las presentadas en los ejemplos del dos al cinco de este subepígrafe.

Los tres primeros ejercicios del subepígrafe 1.3.1 se pueden resolver entre las dos primeras clases.

La tercera clase se debe dedicar a sistematizar los conceptos de distribución de frecuencias, frecuencia absoluta y frecuencia relativa con la resolución de los ejercicios siete, ocho y nueve de este subepígrafe.

Para el resto de las clases se recomiendan los ejercicios del cuatro al seis y el ejercicio del diez al 14 de este subepígrafe teniendo en cuenta el diagnóstico de los educandos.

1.3.2 Construcción de gráficos (de barras y poligonales)

Los contenidos correspondientes a esta subunidad temática se tratarán en tres horas-clase y aparecen en el subepígrafe 1.3.2 del capítulo uno.

En el esquema 1.5 se puede apreciar la estructura interna de esta temática, atendiendo a los conceptos, relaciones y procedimientos esenciales.

Conceptos	Relaciones	Procedimientos
Distribución de frecuencia Frecuencia absoluta Frecuencia relativa Tabla de frecuencia	$\longrightarrow$	Construcción de tablas de frecuencia
		Construcción de gráficos de barras y poligonales

Esquema 1.5

Se recomienda comenzar con el análisis de la sección: “Investiga y aprende” donde los educandos pueden determinar el tipo de gráfico que permite solucionar la situación, porque estos conocimientos se conocen desde grados anteriores, seguidamente con la sección: “Recuerda que” de este subepígrafe, lo que permite preparar las condiciones para decidir la utilidad de los gráficos al representar datos de acuerdo con sus características.

Posteriormente se pasará al análisis del ejemplo uno del subepígrafe 1.3.2, donde el docente debe enfatizar en la solución y el procedimiento para la construcción del gráfico de barras. Se debe proponer a los educandos la sección: “Aplica tus conocimientos”, para utilizar las aplicaciones informáticas o un asistente matemático en la construcción de gráficos. Esta actividad puede orientarse como tarea extraclase que no se puede dejar de revisar y discutir con los educandos.

Le proponemos el procedimiento para la construcción de un gráfico con el empleo de aplicaciones informáticas, sin olvidar que el educando tiene la opción de realizarlo con los instrumentos de trazado:

1. Abrir el procesador de texto Word y acceder al comando insertar.
2. Clic en la herramienta gráfico, figura 1.3.

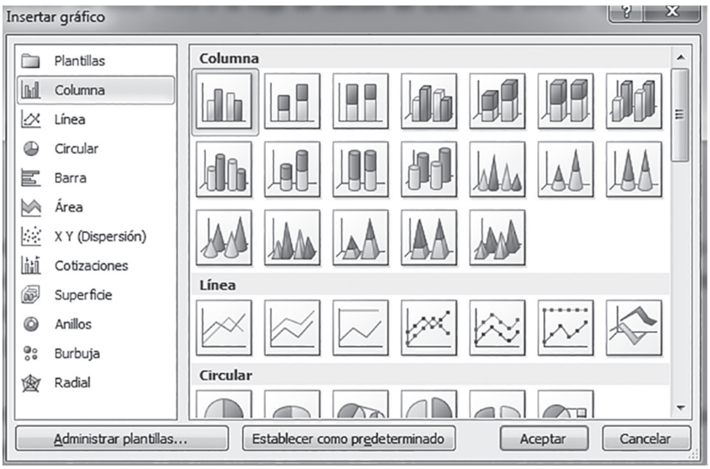


Figura 1.3

1. Seleccionar el tipo de gráfico (clic sobre la opción a utilizar) y aceptar.
2. Obtener un gráfico modelo y la tabla de datos, figura 1.4.

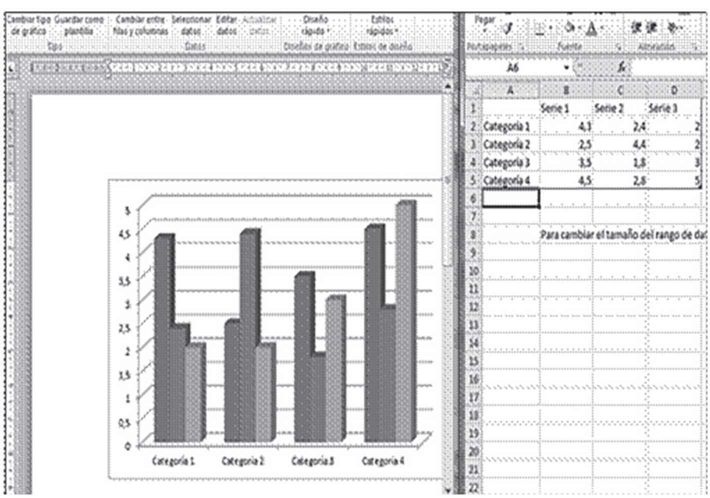


Figura 1.4

1. Sustituir en la tabla los datos del ejercicio.
   A continuación, se ilustran los datos del ejercicio uno, figura 1.5.
- Se eliminan las columnas C y D.
- Las categorías se sustituyen por el nombre de los países.
- La serie se sustituye por Tasa de Mortalidad.

	A	B
1		Tasa de mortalidad
2	Colombia	13,6
3	Cuba	4,4
4	EE.UU.	5,8
5	Haití	46,8
6	México	11,6
7	República Dominicana	17,5

Figura 1.5

3. Al sustituir los datos se obtiene el gráfico deseado.

Observa el gráfico del ejercicio uno d), figura 1.6; le sugerimos que en cada curso se actualicen los datos referentes a la tasa de mortalidad de cada país.

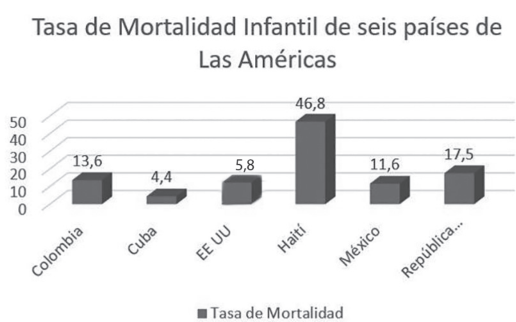


Figura 1.6

La continuación del tratamiento de esta subtemática es el análisis del ejemplo dos del subepígrafe 1.3.2, donde el docente debe enfatizar en la solución y el procedimiento para la construcción del gráfico de la poligonal. Es importante la sistematización de la sucesión de pasos mostrada en los ejemplos analizados y para esto se resolverán los ejercicios uno, dos y tres de este subepígrafe.

Nota: el docente debe actualizar cada curso escolar los datos referentes a la tasa de mortalidad de cada país del ejercicio uno de este subepígrafe.

El gráfico correspondiente al inciso d del ejercicio dos de este subepígrafe aparece en la figura 1.7.

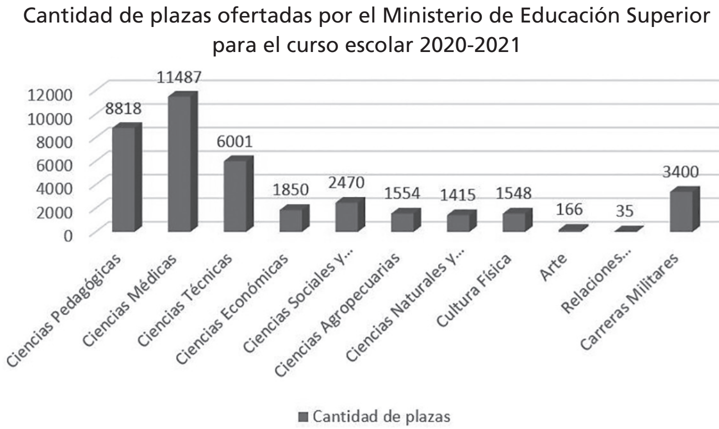


Figura 1.7

En este ejercicio también cada curso escolar se deben actualizar los datos buscando la información en: **www.mes.gob.cu**

Se sugiere la elaboración de un ejercicio con los datos referidos a las opciones de continuidad de estudio de noveno grado con relación a la Educación Preuniversitaria y Educación Técnica y Profesional teniendo en cuenta las especialidades Técnicos Medios y Obreros Calificados otorgados en su centro escolar.

El gráfico correspondiente al inciso a del ejercicio tres de este subepígrafe aparece en la figura 1.8.

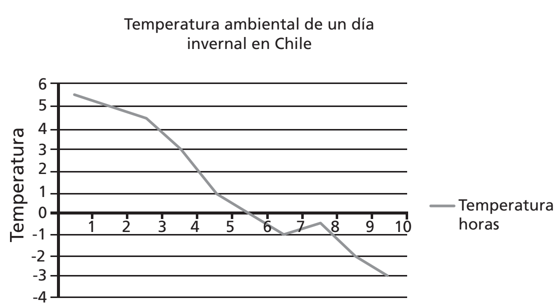


Figura 1.8

Se sugiere que se elabore un ejercicio similar con datos referidos a los diez valores máximos y mínimos de temperatura que han ocurrido en nuestro país, buscados en la prensa escrita o en la página web del Instituto de Meteorología de Cuba: www.insmet.cu.

El ejercicio cuatro de este subepígrafe se refiere a valores de temperatura al igual que el ejercicio tres; pero se diferencia en que los datos aparecen en una tabla de distribución de frecuencias por lo que, para la construcción del gráfico, los datos que corresponden al eje de las abscisas aparecen en la columna de la frecuencia absoluta (F_i).

1.3.3 Medidas de tendencia central (media, moda y mediana)

Los contenidos correspondientes a esta unidad temática se tratarán en ocho horas-clase y aparecen en el subepígrafe 1.3.4 del capítulo uno.

En el esquema 1.6 se puede apreciar la estructura interna de esta temática, atendiendo a los conceptos, relaciones y procedimientos esenciales.

Conceptos	Relaciones	Procedimientos
Media aritmética Moda →	Ecuación para calcular la media aritmética →	Calcular la media aritmética
Mediana Medidas de tendencia central →	Ecuación para calcular la mediana cuando el número de dato es impar Ecuación para calcular la mediana cuando el número de dato es par →	Calcular la mediana

Esquema 1.6

En la primera clase se sugiere repasar los conceptos de media aritmética y moda también las características de cada una de estas medidas de tendencia central que los educandos conocen desde grados anteriores con el análisis de la actividad de la sección: "Reflexiona un instante", es importante concluir con la interrogante del final de esta sección pues asegura el nivel de partida para el tratamiento de la medida de tendencia central **mediana** para la próxima clase.

Se recomienda continuar la clase con la realización de los ejercicios del uno al siete de este subepígrafe.

Hay que observar que en el ejercicio cuatro de este subepígrafe, la variable es cualitativa, para construir la tabla de frecuencia debemos ordenar los datos por categoría y contarlos. La tabla estará compuesta por tres columnas y seis filas.

Preferencia	Frecuencia Absoluta (F_i)	Frecuencia Relativa (f_i)
IPVCE	9	$\frac{9}{30} = 0,3$
EMCC	7	$\frac{7}{30} = 0,2\overline{3}$
ETP	6	$\frac{6}{30} = 0,2$
IPU	3	$\frac{3}{30} = 0,1$
IPM	5	$\frac{5}{30} = 0,1\overline{6}$

Se debe comprobar que la suma de las frecuencias absolutas es el valor del tamaño de la muestra y la de las frecuencias relativas es igual a uno.

Se puede emplear una hoja de cálculo en Excel; en este caso, solo se escribe en las dos primeras columnas, después se introducen los datos, la frecuencia relativa se obtiene colocando el cursor en la fila dos, columna C, luego se escribe (=), posteriormente se coloca el cursor en B2 y automáticamente aparece al lado del signo (=) B2 y se culmina colocando /30, se da un clic en Enter y se logra el resultado (0,3), figura 1.9; las demás frecuencias relativas se obtienen arrastrando el cursor hacia abajo, figura 1.10.

La actividad de la sección: "Investiga y aprende" puede orientarse como tarea extraclase para próxima clase.

C2 fx =B2/30

	A	B	C
1	Preferencia	Frecuencia Absoluta (FA)	Frecuencia Relativa (FR)
2	IPVCE	9	0,3
3	EMCC	7	
4	ETP	6	
5	IPU	3	
6	IPM	5	

Figura 1.9

E13 fx

	A	B	C
1	Preferencia	Frecuencia Absoluta (FA)	Frecuencia Relativa (FR)
2	IPVCE	9	0,3
3	EMCC	7	0,233333333
4	ETP	6	0,2
5	IPU	3	0,1
6	IPM	5	0,166666667

Figura 1.10

La segunda clase se propone iniciarla con la discusión de las respuestas que los educandos investigaron; el docente debe priorizar que la medida de tendencia central que se va a trabajar es la mediana en datos simples para elaborar de conjunto con sus educandos la definición de mediana. Después se analizan los pasos para calcular la mediana de un conjunto de datos simples.

Se recomienda utilizar el ejemplo uno de este subepígrafe 1.3.3, para aplicar este proceder cuando los datos son cualitativos y cuantitativos. Evidenciar la factibilidad de la determinación de la mediana en el análisis del comportamiento de datos cualitativos.

El análisis de la sección: "Saber más" posibilita a los educandos profundizar en las características de esta medida de tendencia central (mediana) para aplicarlo en la solución de diferentes actividades de aprendizaje. Se recomienda resolver la actividad de la sección: "Aplica tus conocimientos" en elaboración conjunta docente-educandos para fijar el proceder y verificar su comprensión.

Es recomendable concluir el tratamiento de esta subtemática con la lectura comentada de la sección: "Atención".

Durante el análisis de las medidas de tendencia central en los problemas propuestos, el docente puede dar impulsos tales como:

¿Cuál de las medidas de tendencia central caracteriza mejor el conjunto de datos? ¿Es posible calcular la media? ¿Con qué valores hay que operar para calcular la media? ¿Es posible calcular la mediana? ¿Cómo se calcula la mediana? ¿Qué significado tiene este dato dentro del conjunto de datos? ¿Cuál es el (los) valor (es) más frecuente(s) en una tabla de frecuencias? ¿Qué información aporta la mediana (media, moda) para la situación que se está analizando? ¿Cómo explica la mediana (media, moda) la cualidad o característica que se está estudiando? ¿Cuáles son los datos más cercanos a la mediana (media)? ¿Cuáles son los más alejados de la mediana (media)? ¿Cuáles datos tienen una frecuencia más baja?

Durante las clases se insistirá en las diferentes formas para la comunicación de los resultados y se exigirá la realización de las acciones para interpretar los datos representados en tablas y/o gráficos, con la finalidad de hacer valoraciones a partir de argumentos.

Se recomienda desarrollar clases en el laboratorio de computación o en las aulas con el uso de recursos informáticos (laptop, tables o teléfonos celulares) donde se propondrán ejercicios y problemas haciendo uso de aplicaciones informáticas y asistentes matemáticos para la construcción de gráficos.

Se recomienda al inicio de la temática, orientar la realización de una tarea por equipos que exija la aplicación del proceso total para el procesamiento de datos. De acuerdo con las características de los educandos y sus preferencias pueden orientarse tareas como las siguientes u otras similares en que se cumplan los objetivos que se proponen:

Equipo 1

Hacer un estudio sobre la atención médica que recibe la población de tu localidad.

Equipo 2

Hacer un estudio de la composición de matrícula, asistencia y resultados docentes de los educandos de tu escuela durante un período dado.

Equipo 3

Hacer un estudio sobre la calidad de las notas obtenidas en matemática por el grupo el curso anterior y sobre sus preferencias en cuanto a las asignaturas que reciben, el deporte, las manifestaciones culturales, la música y el baile.

Equipo 4

Hacer un estudio sobre la composición de las familias y la actividad del CDR de tu cuadra.

Por ejemplo, para la realización de la tarea del Equipo 2 se debe confeccionar una guía como la siguiente, para lo cual debe partirse de analizar de cojunto con los educandos qué preguntas se quieren responder, cómo obtener y simplificar los datos, y cómo comunicarlos:

1. Entrevistar al director y/o secretario de la escuela para explicarle los objetivos del trabajo que se está realizando. Solicitarle los datos siguientes:
   a) Matrícula total de la escuela. Especificar por edades.
   b) Cantidad total de hembras y varones.
   c) Matrícula por grado, especificando cantidad de hembras y varones.
   d) Cantidad de grupos docentes especificando por grado.
   e) Comportamiento de la asistencia a clases durante la última semana (en %). Especificarla día a día.
   f) Cantidad de educandos aprobados y desaprobados el curso anterior por grados.
   g) Cantidad de educandos que participaron en los concursos de conocimientos a nivel municipal, provincial y nacional. Especificar la cantidad de ganadores.
   h) Cantidad de educandos que se presentaron a las pruebas de ingreso al IPVCE y de ellos a cuántos les fue otorgada la plaza.

2. En la escuela preguntar a los miembros del consejo de dirección y a algunos docentes su criterio sobre los resultados docentes de los educandos.
3. Una vez registrada la información, los integrantes del equipo se reunirán para organizar los datos recopilados.
4. Representar los datos.
   Por ejemplo, a partir de las preguntas iníciales formuladas, los educandos pueden desarrollar las tareas siguientes:
   a) Representar los datos correspondientes a la distribución por edades de los educandos en una tabla de frecuencias absoluta y relativa y determinar la edad media de los educandos.
   b) Hallar cuál es la edad más frecuente que tienen los educandos de esta escuela.
   c) Comparar la cantidad de hembras y varones, hallando la razón entre ambas cantidades.

d) Representar, utilizando el gráfico que se considere más apropiado, el comportamiento de la asistencia durante la primera semana.
e) Determinar la media de educandos por grupo en la escuela.
f) Hallar cuál fue el tanto por ciento de promoción en la escuela en un período dado.
g) Representar, utilizando el gráfico que se considere más apropiado, la cantidad de educandos participantes en los concursos de matemática, español, historia y ciencias naturales. Determinar qué tanto por ciento del total de participantes resultó ganador en cada materia.
h) Hallar qué tanto por ciento de educandos de noveno grado se presentaron el curso anterior a las pruebas de ingreso a las escuelas con requisitos adicionales.

5. Elaborar un informe por escrito que:
   - Explique el procedimiento utilizado para obtener la información.
   - Refleje la situación general de la escuela a partir de los datos recopilados.
   - Exprese los criterios dados por miembros del consejo de dirección y los docentes sobre los resultados docentes de los educandos.
   - Valore los resultados docentes de los educandos de la escuela, teniendo en consideración los resultados de promoción, en concursos y pruebas de ingreso.

Para la fijación se recomienda proponer a los educandos los ejercicios del ocho al 13 de este subepígrafe del LT de octavo grado.

Los **ejercicios del capítulo** integran y generalizan los conocimientos de la unidad; se pueden resolver en los diferentes sistemas de clases o en sistematización o ejercitación al final de la unidad.

Por la tipología del ejercicio se desarrolla a continuación el ejercicio 13, inciso a).

$$\frac{6 \cdot 3^3 \cdot 35^2}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^7 \cdot 7^3} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^7 \cdot 7^3}$$

(Se descompone 6 en los factores 2 y 3; 35^2 en los factores 5^2 y 7^2)

$$= \frac{2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^7 \cdot 7^3}$$

$$= \frac{3^2}{2^4 \cdot 5^5 \cdot 7}$$

Para resolver el 13.2, se utiliza el resultado del 13.1

$$\frac{3^2}{2^4 \cdot 5^5 \cdot 7} = 2^{-4} \cdot 3^2 \cdot 5^{-5} \cdot 7^{-1}$$

En el ejercicio 16 se debe descomponer 4^{-29} en $\left(2^2\right)^{-29}$ y 10^{30} en $2^{30} \cdot 5^{30}$

Vocabulario

El vocabulario que te presentamos a continuación contiene las palabras más utilizadas en esta unidad, en las cuales los educandos tienen tendencia a escribirlas con faltas de ortografía, por lo que se requiere una labor atenta del docente con este vocabulario en las diferentes actividades que programe (dictados, buscar en el diccionario el significado común y compararlo con el significado matemático).

número	suma algebraica	población
racional	recíproco	muestra
irracional	efectúa	frecuencia absoluta
real	factores	gráficos
recta numérica	resuelve	poligonales
intervalo	proporciones	barra
cálculo	adición	variable cuantitativa
algoritmo	sustracción	variable cualitativa
conmutativa	multiplicación	variable discreta
asociativa	operación inversa	factibilidad
distributiva	división	

UNIDAD 2 GEOMETRÍA PLANA Y CÁLCULO DE CUERPOS

IDEAS ESENCIALES

Esta unidad es la segunda dentro del programa de octavo grado, en la que se continúa el estudio sistemático de la geometría plana que se inició en los cuatro primeros grados de la Educación Primaria con carácter propedéutico y se consolidó en quinto, sexto y séptimo grados.

En estos grados los educandos aprendieron a reconocer y trazar la circunferencia, el círculo y algunos de sus elementos, a medir o determinar las longitudes del radio y el diámetro, a medir las amplitudes de ángulos con ayuda del semicírculo graduado, pero ahora se iniciará el estudio sistemático de estas figuras, se amplía el estudio de la circunferencia y sus elementos fundamentales con la definición de sus ángulos: central, inscrito y seminscrito, los teoremas asociados a las relaciones entre ángulos, cuerdas y arcos, con énfasis en el teorema fundamental de Tales. El tratamiento de la definición de polígonos inscritos y circunscritos en la circunferencia y sus construcciones. Se realiza un procedimiento análogo al de la obtención del perímetro de figuras planas para estimar la longitud de la circunferencia, se obtiene el número como razón de la longitud de la circunferencia y el diámetro, la ecuación para calcular la longitud de la circunferencia y la del área del círculo utilizando el área de varios polígonos regulares de ***n*** lados inscritos en una circunferencia, también se definen nuevas figuras geométricas en el círculo y se le calcula su área, tales como: corona circular y sector circular, aspectos que permiten la construcción de gráficos de pastel tanto con instrumentos de dibujo como con asistentes geométricos o un procesador de texto.

En esta unidad se amplía el tratamiento de la igualdad de figuras geométricas en el plano, que se inició desde los primeros grados con los conocimientos adquiridos sobre los movimientos y se sistematiza en los dos últimos grados de la Educación Primaria y en séptimo grado con los movimientos de simetría axial, traslación, simetría central y rotación, que permitieron generalizar las propiedades de los movimientos del plano y aprovechar estos conocimientos para obtener nuevas propiedades de figuras geométricas, incluso a través de la composición de movimientos.

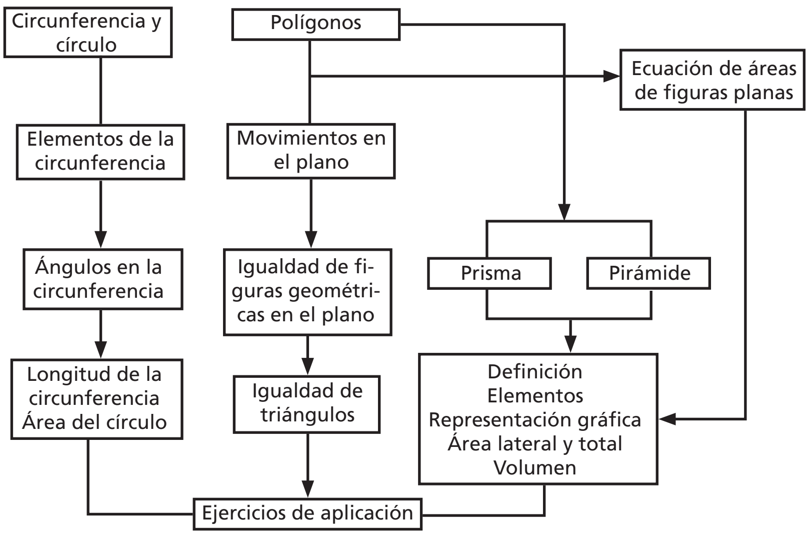
El dominio de las propiedades y relaciones de las figuras geométricas, incluida la circunferencia y el círculo y del concepto de polígono regular y algunas de sus propiedades, de los conocimientos sobre los movimientos del plano facilitan la obtención de los criterios de igualdad de triángulos, contenido fundamental para desarrollar habilidades y capacidades en la búsqueda y demostración de proposiciones matemáticas y las apliquen a la formulación y resolución de problemas geométricos de cálculo, construcción y demostración intra y extramatemáticos.

Se retoman las definiciones de los cuerpos geométricos, para ampliar el estudio de los prismas y las pirámides, los elementos fundamentales de estos cuerpos (bases, caras, aristas, alturas y ángulos). Se introduce el procedimiento para representar cuerpos en perspectiva caballera y se utiliza el desarrollo de estos cuerpos para encontrar una relación que sea útil para el cálculo de sus áreas. Se obtiene la ecuación para el cálculo del volumen del prisma por analogía con el procedimiento para el cálculo del volumen del cubo y el ortoedro, estudiados en séptimo grado, y otra ecuación para calcular el volumen de la pirámide con la utilización de situaciones prácticas que permiten determinar su relación con volumen el prisma.

Esta unidad responde a la *línea directriz relativa al conocimiento, habilidades y forma de pensamiento matemático Geometría* y permite a los educandos resolver problemas de naturaleza geométrica de la práctica social sobre la base de la estimación, medición, comparación y cálculo de cantidades de magnitud, la construcción de figuras geométricas con los instrumentos de dibujo o asistentes matemáticos y la argumentación (incluida la demostración) de propiedades y relaciones.

En el tratamiento del contenido de la unidad se debe utilizar el juego de cuerpos geométricos.

ESTRUCTURA INTERNA DE LA UNIDAD



Esquema 2.1

De la estructura que se aprecia en el esquema 2.1 se derivan las unidades temáticas siguientes:

2.1 Ángulos en la circunferencia.
2.2 Longitud de la circunferencia y área del círculo.
2.3 Igualdad de figuras geométricas en el plano.
2.4 Prisma y pirámide.

Lo esencial en esta unidad es que los educandos empleen los conocimientos sobre las propiedades y relaciones de las figuras geométricas en el plano (cuadriláteros convexos, circunferencias, círculos, polígonos regulares), los movimientos del plano, los criterios de igualdad de triángulos, en el desarrollo de habilidades y capacidades para la búsqueda y demostración de proposiciones matemáticas y las apliquen a la formulación y resolución de problemas geométricos de cálculo, construcción y demostraciones intramatemáticos y extramatemáticos.

Para lograr estos conocimientos es necesario que los educandos puedan:

- Identificar, definir y clasificar figuras planas y cuerpos geométricos.

- Esbozar los cuerpos geométricos básicos que satisfagan determinadas condiciones.
- Construyan cuerpos geométricos básicos con el empleo de la representación en perspectiva caballera y los asistentes geométricos.
- Construir triángulos con el empleo de los instrumentos de dibujo y los asistentes geométricos.
- Determinar el valor de verdad de proposiciones geométricas.
- Formular recíprocos y contrarrecíprocos de teoremas con el reconocimiento de condiciones: necesarias, suficientes y necesarias y suficientes.
- Resolver ejercicios y problemas intramatemáticos y extramatemáticos de estimación, determinación y comparación de cantidades de magnitud con la aplicación de los conceptos de circunferencia, círculo y sus elementos fundamentales, de ángulo central e inscrito, polígono regular y polígono inscrito (circunscrito) a una circunferencia, el teorema sobre la perpendicularidad de la tangente a una circunferencia al radio que tiene un extremo en el punto de tangencia y sobre las relaciones entre los ángulos centrales, inscritos, los arcos y las cuerdas correspondientes, el teorema de Tales, el teorema de Pitágoras y los criterios de igualdad de triángulos.
- Elaborar conjeturas sobre propiedades y relaciones de las figuras geométricas y entre los cuerpos geométricos, con el apoyo de los instrumentos de dibujo y los asistentes geométricos.
- Realizar demostraciones sencillas.
- Estimar y calcular el área del círculo, del anillo o corona circular, del sector circular y la longitud de un arco de circunferencia y de la circunferencia.
- Resolver ejercicios y problemas intramatemáticos y extramatemáticos de estimación, determinación y comparación de cantidades de magnitud aplicando los conceptos y fórmulas para calcular áreas y volúmenes de los cuerpos geométricos.

El tratamiento de los conceptos, de otros conceptos asociados, de las relaciones, procedimientos y habilidades, se realizará de manera explícita y contextualizada en el punto siguiente, en cada una de las unidades temáticas.

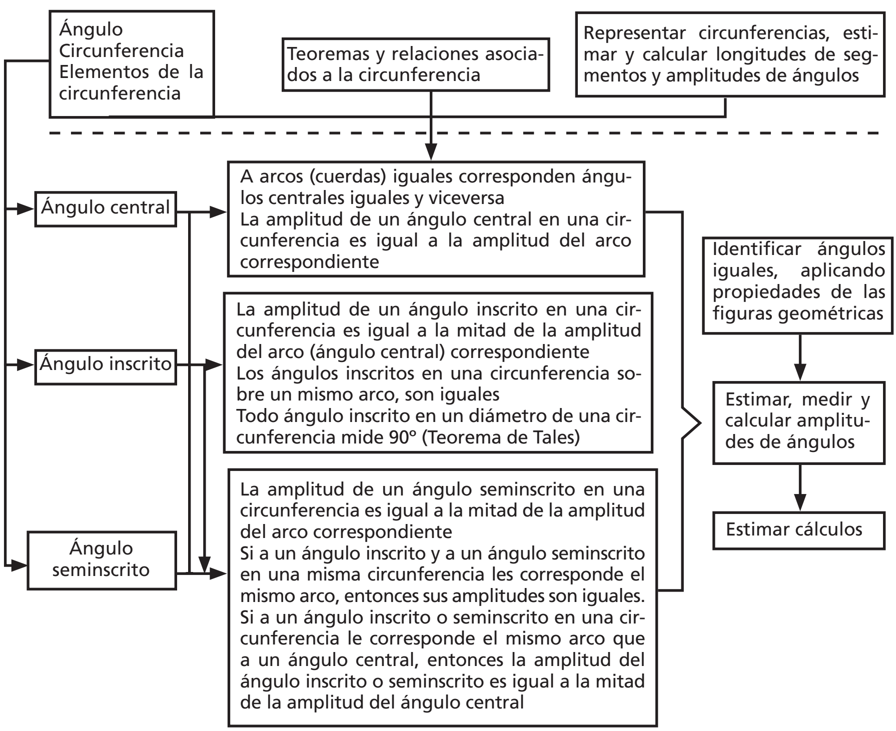
SUGERENCIAS PARA EL TRATAMIENTO DEL CONTENIDO

2.1 ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

Los contenidos correspondientes a esta unidad temática aparecen en el epígrafe 2.1 del capítulo dos "Geometría plana y cálculo de cuerpos", en el LT de octavo grado. Se tratarán en 16 horas-clase. Esta unidad temática se divide en tres subtemáticas:

2.1.1 Ángulos centrales en la circunferencia.
2.1.2 Ángulos inscritos en la circunferencia.
2.1.3 Ángulos seminscritos.

En el esquema 2.2 se puede apreciar la estructura interna de la unidad temática según sus conceptos, relaciones y procedimientos esenciales.



Esquema 2.2

Se recomienda que las dos primeras clases se dediquen al repaso sobre elementos principales de la circunferencia y el círculo, relaciones de simetría en la circunferencia y las relaciones de posición entre una recta y una circunferencia, se sugiere para esto utilizar un asistente matemático (Cabri Geometry II o GeoGebra), para estas clases se sugiere utilizar los ejercicios del uno al cinco del epígrafe 2.1.

2.1.1 Ángulos centrales en la circunferencia

Los contenidos de la primera subtemática aparecen en el capítulo dos, epígrafe 2.1, subepígrafe 2.1.1 del LT y para su desarrollo se sugieren cinco horas-clase.

Para la clase introductoria se sugiere analizar la sección: "Investiga y aprende" del epígrafe 2.1; en esta se aseguran las condiciones previas para el tratamiento del contenido de ángulos en la circunferencia, seguidamente se sugiere analizar la sección: "Reflexiona un instante" del epígrafe 2.1, referido a las posibles posiciones de dos rectas que se cortan y al mismo tiempo son secantes a una circunferencia, el docente debe inducir a los educandos a realizar la sección: "Investiga y aprende" como aparece en la figura 2.2 del subepígrafe 2.1.1.

Con el estudio de los casos se introduce la definición de ángulo central (primer caso) y se deben analizar los ejemplos uno y dos de este subepígrafe para distinguir las dos amplitudes que posee un ángulo central (ya sea por el arco mayor o el menor que le corresponde) y así buscar también las relaciones entre el arco y cuerda correspondiente para después concluir con la definición de arco y cuerda correspondiente a un ángulo central y amplitud del ángulo central. Es necesario discutir el procedimiento que se muestra en los ejemplos tres y cuatro de este epígrafe con los educandos.

La obtención del *teorema sobre la relación entre ángulos centrales y arcos iguales* se realiza con ejemplos prácticos con varias circunferencias iguales y la construcción de ángulos centrales de igual amplitud por medio de los asistentes matemáticos o con instrumentos de dibujo.

Para obtener otros teoremas de relaciones en la circunferencia se sugiere utilizar el asistente matemático GeoGebra.

Ejemplo 1: Teorema sobre la relación entre ángulos centrales y arcos iguales (figura 2.1).

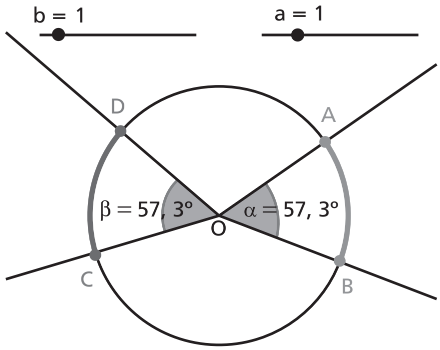


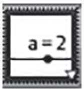
Figura 2.1

De los conocimientos previos que poseen los educandos se va a aplicar la relación de la amplitud de un ángulo central con su arco correspondiente.

1. Trazar una circunferencia de centro *O* y radio *r*, con la herramienta dados su centro y uno de sus puntos.

2. Trazar dos ángulos centrales con amplitud a y b respectivamente con la herramienta ángulo dada su amplitud.

3. Utilizar la herramienta deslizador para obtener las amplitudes de los ángulos centrales de forma tal que sean iguales.



4. Trazar los arcos de circunferencia correspondientes a los ángulos y utilizando la herramienta arco de circunferencia.

5. Mover los puntos *C* y *D* de forma que se superpongan sobre los puntos *A* y *B* respectivamente, utilizando la herramienta puntero.

6. Comparar las amplitudes de los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{CD}$.
7. Utilizar el puntero, para mover los deslizadores a y b de forma tal que aumente o disminuya la amplitud de α y β.
8. Comparar las amplitudes de los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{CD}$, para $\alpha = \beta$ y $\alpha \neq \beta$.
9. ¿A qué conclusión se puede arribar?

Esto permitirá formular una conjetura: que a ángulos centrales iguales corresponden arcos iguales y viceversa. O sea,

si $\measuredangle AOB = \measuredangle COD$, entonces $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

Ejemplo 2: Recíproco del teorema sobre la relación entre ángulos centrales y arcos iguales (figura 2.2).

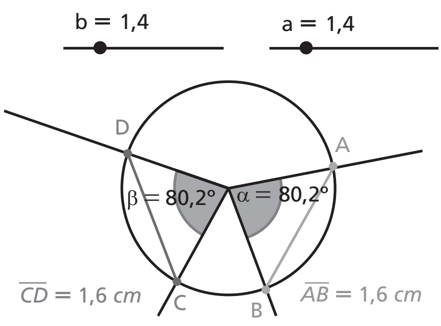


Figura 2.2

1. Trazar una circunferencia de centro *O* y radio *r*.
2. Trazar dos ángulos centrales con amplitud *a* y *b* respectivamente y con la herramienta deslizador obtener las amplitudes de los ángulos centrales de forma tal que sean iguales.
3. Trazar las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ utilizando la herramienta segmento entre dos puntos.

4. Medir la longitud de las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ utilizando la herramienta distancia o longitud.
5. Comparar las longitudes de las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

6. Utilizar el puntero, para mover los deslizadores a y b de forma tal que aumente o disminuya la amplitud de α y β.
7. Comparar las longitudes de las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ cuando $\alpha = \beta$ y cuando $\alpha \neq \beta$.
8. ¿A qué conclusión se puede llegar?

Esto permitirá formular la conjetura, de que a ángulos centrales iguales les corresponden cuerdas iguales y viceversa, o sea

si $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A'OB'$ $\quad \sphericalangle AOB = \sphericalangle \overline{A^1OB^1}$, entonces $\overline{AB} = \overline{A'B'}$

Para el tratamiento de su demostración, el docente debe preguntar a los educandos cómo se ha demostrado hasta el momento que dos figuras son iguales. Los educandos pueden determinar a través de cuál movimiento se puede obtener que la imagen del ángulo $\sphericalangle AOB$ de la figura 2.7 del subepígrafe 2.1.1 sea el $\sphericalangle COD$ de la propia figura. Se recomienda el tratamiento de los ejemplos que aparecen en el libro de texto o ejemplos similares. Se sugiere que los educandos analicen la sección: "Atención" que aparece antes del ejemplo seis.

Otra clase puede dedicarse al tratamiento de los teoremas y sus recíprocos sobre ángulos centrales, arcos y cuerdas, con la utilización del análisis que aparece en el libro de texto claramente desarrollada, sin olvidar el teorema de la relación de comparación entre arcos y cuerdas que le corresponden ángulos centrales. Estos teoremas también se pueden demostrar con la utilización del asistente matemático GeoGebra.

Para obtener el teorema sobre la relación de comparación entre arcos y cuerdas (figura 2.3):

1. Trazar una circunferencia de centro *O* y radio *r*.
2. Trazar dos ángulos centrales de forma tal que tengan diferentes amplitudes.

3. Trazar las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.
4. ¿Cómo son los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ entre sí; a simple vista estos segmentos no parecen ser iguales, ¿cómo se puede comprobar utilizando los recursos del asistente GeoGebra?
5. Medir las longitudes de las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.
6. Comparar las longitudes de las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.
7. Variar la amplitud de los ángulos centrales utilizando el puntero de forma tal que aumente o disminuya sus amplitudes para obtener casos diferentes.
8. Comparar nuevamente las longitudes de las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.
9. ¿Existe ahora alguna relación entre la longitud de las cuerdas con respecto a la amplitud de los ángulos centrales que le corresponden?

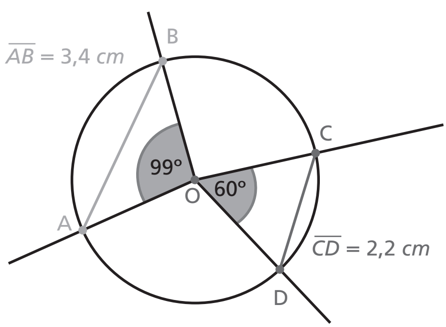


Figura 2.3

El docente debe inducir a los educandos a que puedan formular una conjetura: al arco del mayor de dos ángulos centrales corresponde la mayor cuerda. O sea,

si $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$, entonces $\overline{AB} > \overline{CD}$

El tiempo restante que se le dedicará a esta subtemática, será para la ejercitación; se sugiere realizar los ejercicios del seis al 16 del subepígrafe 2.1.1.

A continuación, se hace una caracterización de estos ejercicios, de manera que los docentes los utilicen en la forma más racional posible, atendiendo al diagnóstico de sus educandos y no dejen de realizar los que tienen mayores potencialidades desde el punto de vista de sus funciones instructivas, educativas y de desarrollo.

Para la solución de los ejercicios de cálculo de amplitudes de ángulos y arcos debe plantearse la relación entre los elementos geométricos, su fundamentación dada en la propiedad o teorema y en la igualdad entre el elemento geométrico y el valor calculado.

Para la fijación de los teoremas no se pueden dejar de hacer los ejercicios del seis al 10 y el 15.

En los ejercicios 11, 12 y 13 se vinculan los teoremas de relaciones entre ángulos centrales, arcos y cuerdas con propiedades de las rectas y los triángulos.

El ejercicio 14, es un problema práctico que se puede ampliar cambiando la hora y así se comprueba también el conocimiento del reloj automático.

En el ejercicio 16, se debe comenzar por determinar cómo calcular la amplitud de cada uno de los arcos iguales por una suma de arcos, para igualar estas amplitudes y luego relacionar los arcos con sus cuerdas correspondientes:

$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ por datos.

$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC}$ por suma de arcos de circunferencia.

$\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}$ por suma de arcos de circunferencia, luego, si, $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}$ entonces $\overline{AB} = \overline{CD}$ porque en una circunferencia o en circunferencias iguales a arcos iguales le corresponden cuerdas iguales.

2.1.2 Ángulos inscritos en la circunferencia

Los contenidos de esta subtemática aparecen en el capítulo dos, epígrafe 2.1, subepígrafe 2.1.2 y para su desarrollo se sugieren seis horas-clase.

Para obtener la definición de ángulo inscrito se retoma el caso tres del subepígrafe 2.1.1 que aparece en la figura 2.2; el docente puede apoyarse en las preguntas que aparecen en la sección: “Reflexiona un Instante” y concluir con la elaboración conjunta dicha definición, después de analizar el ejemplo uno del subepígrafe 2.1.2, para distinguir la posición del vértice del ángulo inscrito y los lados de este tipo de ángulo y el ejemplo dos del mismo subepígrafe que le permiten observar la posición del centro con respecto al ángulo inscrito (un lado pasa por el centro de la circunferencia, el centro está en el interior del ángulo o está exterior a este) con el análisis de casos que muestra la figura 2.24.

Además, puede obtener el teorema de la amplitud de un ángulo inscrito, teniendo en cuenta los tres casos posibles que aparecen en el análisis del ejemplo dos con el uso de instrumentos de dibujo (debe orientarse a los educandos que tracen en sus cuadernos estos ángulos y que realicen las mediciones de sus amplitudes con el empleo del semicírculo graduado) o con la utilización del asistente matemático GeoGebra.

El docente debe guiar el proceso de búsqueda de la conjetura, la que finalmente será enunciada por los educandos y comparada con el contenido del teorema de la amplitud de un ángulo inscrito. Antes de realizar la demostración los educandos deben analizar la sección: "Atención" y seguidamente se realizará la demostración para el caso A en que un lado del ángulo pasa por el centro de la circunferencia, y se dejará de tarea la demostración de los restantes casos.

Para obtener el teorema sobre ángulos inscritos en el mismo arco, de este subepígrafe, el docente puede apoyarse en la sección: "Investiga y aprende" y realizar el procedimiento análogo al de la obtención del teorema de la amplitud de un ángulo inscrito por medición o puede hacerlo empleando un asistente matemático (figura 2.4).

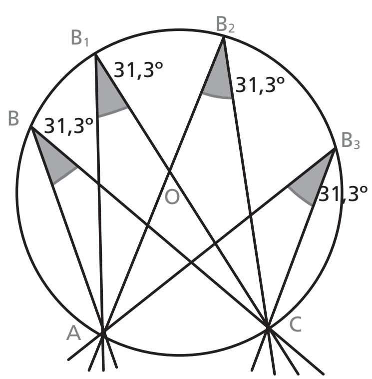


Figura 2.4

1. Trazar una circunferencia de centro *O* y radio *r*.
2. Trazar un ángulo inscrito de vértice en *B* que le corresponda el arco *AC*.
3. Medir la amplitud del $\sphericalangle ABC$ con la herramienta ángulo.

4. Mover el punto B utilizando el puntero y obtendrás los ángulos.

$$\sphericalangle AB_1C, \sphericalangle AB_2C, \ldots, \sphericalangle AB_nC$$

5. Observar la amplitud que toman los ángulos.

$$\sphericalangle AB_1C, \sphericalangle AB_2C, \ldots, \sphericalangle AB_nC$$

6. Encontrar una relación entre las amplitudes de los diferentes ángulos obtenidos.

Los educandos podrán llegar a la conjetura de que siempre los ángulos inscritos en una circunferencia a los cuales les corresponde el mismo arco son iguales.

Para obtener el conocido como el teorema de Tales (que es un caso particular del teorema de la amplitud de un ángulo inscrito), el docente le puede orientar a los educandos que tracen en una circunferencia varios ángulos inscritos a los que le corresponda un arco que sea una semicircunferencia y que realicen las mediciones de sus amplitudes con el empleo del semicírculo graduado.

¿Cuál es la amplitud de los ángulos inscritos al que le corresponde un arco que es una semicircunferencia?

Los educandos podrán llegar a la conjetura de que siempre a la amplitud del ángulo inscrito le corresponde un arco que es una semicircunferencia; entonces, es un ángulo recto.

Para obtener el teorema fundamental de Tales con el asistente matemático GeoGebra; se sugiere el procedimiento siguiente (figura 2.5):

1. Trazar una circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$.
2. Trazar el ángulo $\sphericalangle ACB$ inscrito en el arco AB.
3. Medir la amplitud del $\sphericalangle ACB$.
4. Mover el punto C utilizando el puntero y obtendrás los ángulos $\sphericalangle AC_1B, \sphericalangle AC_2B, \ldots, \sphericalangle AC_nB$.

5. Observar la amplitud que toman los ángulos.
   $\sphericalangle AC_1B, \sphericalangle AC_2B, \ldots, \sphericalangle AC_nB$
6. Encontrar una relación entre las amplitudes de los diferentes ángulos obtenidos.

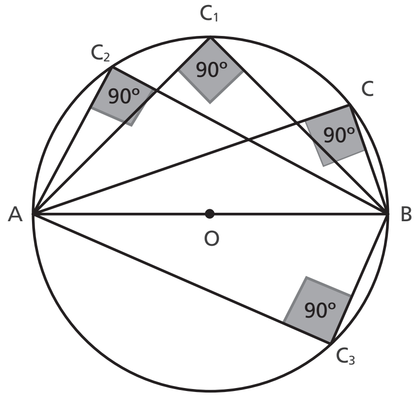


Figura 2.5

Los educandos podrán llegar a la conjetura de que siempre la amplitud del ángulo inscrito que le corresponde a un arco que es una semicircunferencia, es un ángulo recto o sea su amplitud es de 90°.

Es importante que los educandos realicen una lectura comentada de la sección: "De la historia", sobre el matemático Tales de Mileto, lo cual podrá vincular con el estudio de las civilizaciones de Egipto y Babilonia, que realizó en séptimo grado en la asignatura Historia Antigua y Medieval; esto aparece después del ejemplo tres del subepígrafe 2.1.2.

Es necesario determinar el recíproco del teorema de Tales y para esto se puede auxiliar del ejemplo tres del subepígrafe 2.1.2 que introduce el nuevo teorema.

Se sugiere como vía metodológica para el tratamiento del teorema sobre la relación entre ángulo central y ángulo inscrito, utilizar la sección: "Reflexiona un instante" relacionada con la figura 2.31, del libro de texto, o que la realice en el laboratorio de computación por medio de un asistente matemático como se sugiere en el procedimiento siguiente (figura 2.6):

1. Trazar una circunferencia de centro O y radio r.

2. Trazar el ángulo central $\sphericalangle BOC$ correspondiente al arco $\widehat{BC}$.
3. Trazar el ángulo inscrito $\sphericalangle BAC$ correspondiente al arco $\widehat{BC}$.
4. Medir las amplitudes de los $\sphericalangle BOC$ y $\sphericalangle BAC$.
   ¿Cómo es la amplitud del ángulo central con respecto a la amplitud del ángulo inscrito?
5. Mover los puntos *B* y *C* utilizando el puntero de forma tal que obtengas nuevas amplitudes en los ángulos central e inscrito respectivamente (los educandos registran los nuevos valores encontrados).

El docente debe inducir a los educandos a encontrar una dependencia entre la amplitud del ángulo central y la amplitud del ángulo inscrito. Los educandos deben llegar a conclusiones parciales.

¿Cómo comprobar que siempre se cumple esa relación entre las amplitudes de dichos ángulos?

6. Buscar la relación entre la amplitud del ángulo central y la del ángulo inscrito utilizando la herramienta texto *ABC*, comando Fórmula La Tex (Raíces y Fracciones), figura 2.7. Al continuar variando la posición de los puntos *B* y *C*, este cociente se mantiene constante.

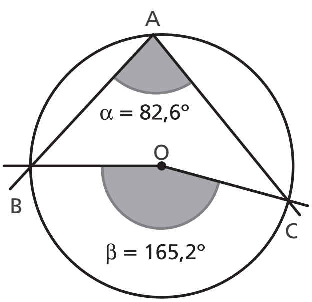


Figura 2.6

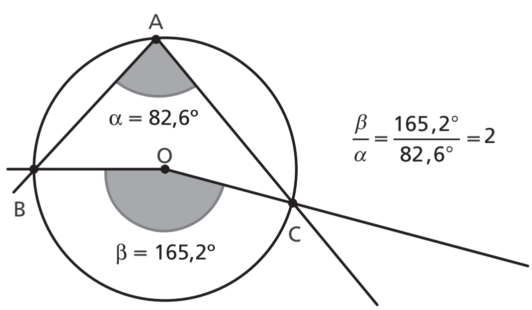


Figura 2.7

Esto les permitirá a los educandos formular una conjetura, sobre la relación de la amplitud del ángulo inscrito y la del ángulo central (la amplitud del ángulo inscrito es la mitad de la del ángulo central o que la amplitud del ángulo central es el doble de la del ángulo inscrito).

Las horas-clase restantes de este sistema de clases se dedicarán a la ejercitación, para esto se proponen los ejercicios del uno al 18 del subepígrafe 2.1.2.

A continuación, se hace una caracterización de estos ejercicios, de manera que los docentes los utilicen en la forma más racional posible, atendiendo al diagnóstico de sus educandos y no dejen de realizar aquellos que tienen mayores potencialidades desde el punto de vista de sus funciones instructivas, educativas y de desarrollo.

Los ejercicios del uno al seis, y el ocho son ejercicios cerrados para la fijación del contenido referido a los teoremas estudiados en el subepígrafe 2.1.2 sobre ángulos inscritos y además se sistematizan teoremas estudiados en el subepígrafe anterior.

El ejercicio siete y los ejercicios del nueve al 18 se aplican los teoremas asociados a las relaciones entre ángulos y arcos y el teorema fundamental de Tales conjuntamente con conceptos y propiedades sobre triángulos, cuadriláteros y la circunferencia, etc. Estos ejercicios son de gran importancia ya que posibilitan la sistematización de los conocimientos adquiridos.

A continuación, se les presentan a las docentes propuestas de solución de algunos ejercicios del epígrafe 2.1.2.

Ejercicio 7.

La figura 2.8 es la que debe realizarse para el análisis de este ejercicio.

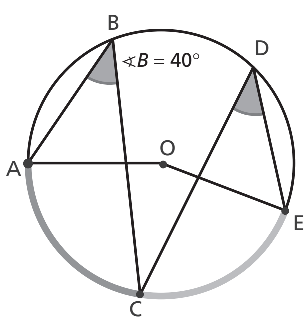


Figura 2.8

$\measuredangle B = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ porque la amplitud de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad de la amplitud de su arco correspondiente.

$\overset{\frown}{AC} = 2 \cdot \measuredangle B$

$\overset{\frown}{AC} = 2 \cdot 40^\circ$

$\overset{\frown}{AC} = 80^\circ$

$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CE} = 80^\circ$ por ser C punto medio del arco $\overset{\frown}{AE}$.

$\overset{\frown}{ACE} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CE} = 80^\circ + 80^\circ = 160^\circ$ por suma de arcos de una circunferencia.

Por tanto $\measuredangle AOE = 160^\circ$ porque la amplitud de un ángulo central es la amplitud de su arco correspondiente.

Ejercicio 9.

La figura 2.9 es la que debe realizarse para el análisis de este ejercicio.

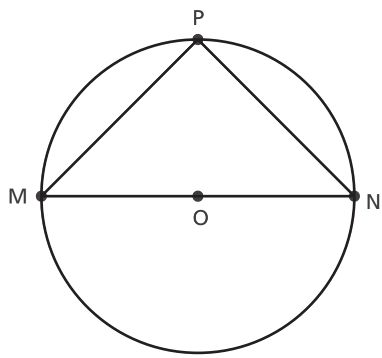


Figura 2.9

$\measuredangle NPM = 90^\circ$ porque, si a un ángulo inscrito en una circunferencia le corresponde un arco que es una semicircunferencia o una cuerda que es un diámetro, entonces es un ángulo recto.

$\measuredangle PMN + \measuredangle MNP + \measuredangle NPM = 180^\circ$ por la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo.

$3x + 15^\circ + 5x - 5^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$8x + 100^\circ = 180^\circ$

$80 = 80^\circ$

$x = 10^\circ$

$\measuredangle PMN = 3 \cdot 10^\circ + 15^\circ = 45^\circ$

$\frac{\overset{\frown}{NP}}{2} = \sphericalangle PMN$ porque la amplitud de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad de la amplitud de su arco correspondiente.

$\overset{\frown}{NP} = 2 \cdot \sphericalangle PMN$

$\overset{\frown}{NP} = 2 \cdot 45°$

$\overset{\frown}{NP} = 90°$

b) En el triángulo MNP se cumple que: si $\sphericalangle PMN = \sphericalangle MNP = 45°$, entonces los lados que se oponen a dichos ángulos son iguales $\overline{MP} = \overline{NP}$ por tanto, el ΔMNP es isósceles de base $\overline{MN}$.

Ejercicio 10.

La figura 2.10 es la que debe realizarse para el análisis de este ejercicio.

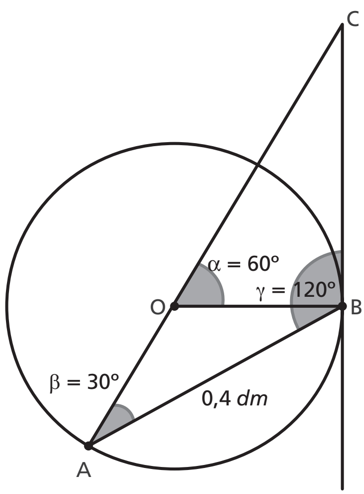


Figura 2.10

a) $\sphericalangle OAB = \frac{\sphericalangle COB}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$, por ser ángulos $\sphericalangle OAB$ y $\sphericalangle COB$ inscrito y central respectivamente y corresponderle el mismo arco.

En el ΔOAB se cumple que:

$\overline{OA} = \overline{OB}$ por ser radios de la circunferencia de centro O y radio $\overline{OB}$, luego dicho triángulo es isósceles de base $\overline{AB}$.

$\sphericalangle ABO = \sphericalangle OAB = 30°$, por ser ángulos bases del ΔOAB.

ΔOBC rectángulo en B, por ser $\overline{BC}$ tangente a la circunferencia en B, luego

$\sphericalangle CBO = 90°$

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABO + \sphericalangle CBO = 30° + 90° = 120°$ por suma de amplitudes de ángulos.

b) En el triángulo ΔABC se cumple que:

$\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle C = 180°$ por suma de amplitudes de ángulos interiores de un triángulo.

$30° + 120° + \sphericalangle C = 180°$

$150° + \sphericalangle C = 180°$

$\sphericalangle C = 180° - 150°$

$\sphericalangle C = 30°$

El triángulo ΔABC es isósceles de base $\overline{AC}$ porque se cumple que $\sphericalangle C = \sphericalangle CAB = 30°$, entonces los lados que se oponen a dichos ángulos son iguales $\overline{AB} = \overline{BC} = 0,4\,\text{dm}$.

Ejercicio 11

La figura 2.11 es la que debe realizarse para el análisis de este ejercicio.

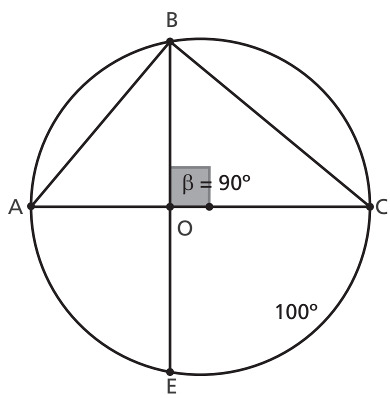


Figura 2.11

$\frac{\overset{\frown}{EC}}{2} = \sphericalangle CBE$, porque la amplitud de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad de la amplitud de su arco correspondiente.

$\sphericalangle CBE = 50°$

$\sphericalangle ABC = 90°$, pues si a un ángulo inscrito en una circunferencia le corresponde un arco que es una semicircunferencia o una cuerda que es un diámetro, entonces es un ángulo recto.

Luego: $\sphericalangle ABE = 40°$, por diferencia de amplitudes de ángulos.

¿Cómo calcular la amplitud del arco $\overset{\frown}{BC}$?

Si $\overline{AC} \perp \overline{BE}$ y $\overline{AC}$ es el diámetro de la circunferencia por datos, entonces C es punto medio del arco ECB y se cumple que $\overset{\frown}{EC} = \overset{\frown}{BC} = 100°$.

Ejercicio 12.

La figura 2.12 es la que debe realizarse para el análisis de este ejercicio.

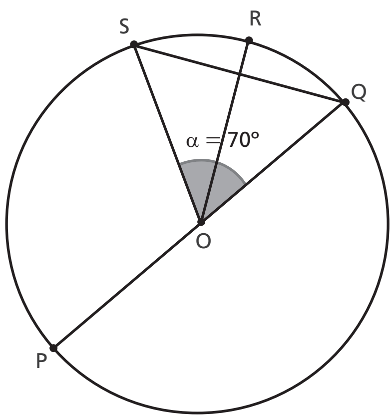


Figura 2.12

$\overset{\frown}{SQ} = \sphericalangle SOQ = 70°$ porque la amplitud de un arco de circunferencia es igual a la amplitud de su ángulo central correspondiente.

$\overline{SQ} \perp \overline{OR}$ por datos, luego R es punto medio $\overset{\frown}{SQ}$ de, por tanto:

$$\overset{\frown}{SR} = \frac{\overset{\frown}{SQ}}{2} = \frac{70}{2} = 35°$$

$\overline{PQ}$ es diámetro, luego $\overset{\frown}{PQ} = 180°$

$\overset{\frown}{PQ} = \overset{\frown}{PS} + \overset{\frown}{SQ} = 180°$ por suma de amplitudes de arcos de circunferencia.

$\overset{\frown}{PS} + 70^\circ = 180^\circ$

$\overset{\frown}{PS} = 110^\circ$

$\overset{\frown}{PR} = \overset{\frown}{PS} + \overset{\frown}{SR} = 110^\circ + 35^\circ = 145^\circ$ por suma de amplitudes de arcos de circunferencia.

Ejercicio 13.

La figura 2.13 es la que debe realizarse para el análisis de este ejercicio.

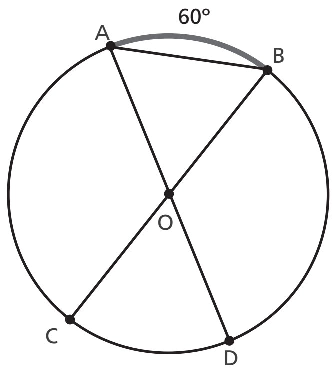


Figura 2.13

a) Si el arco $\overset{\frown}{AB} = 60^\circ$, entonces $\sphericalangle AOB = 60^\circ$ porque la amplitud de un ángulo central es igual a la amplitud de su arco correspondiente.

$\sphericalangle COD = \sphericalangle AOB = 60^\circ$ por ser ángulos opuestos por el vértice.

$\overset{\frown}{CD} = 60^\circ$ porque la amplitud de un arco de circunferencia es igual a la amplitud de su ángulo central correspondiente.

$\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DB} = 180^\circ$ por ser $\overline{CB}$ diámetro.

$60^\circ + \overset{\frown}{DB} = 180^\circ$

$\overset{\frown}{DB} = 120^\circ$

b) En el ΔAOB se cumple que: $\overline{OA} = \overline{OB} = r$ por tanto es isósceles de base $\overline{AB}$ y $\sphericalangle AOB = 60^\circ$ por tanto es equilátero y se cumple que su perímetro es igual a:

$P = 3 \cdot \overline{OA}$

$P = 3 \cdot 2{,}1$

$P = 6{,}3 \text{ cm}$

Ejercicio 14.

La figura 2.14 es la que debe realizarse para el análisis de este ejercicio.

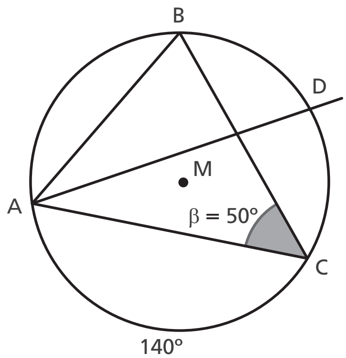


Figura 2.14

a) $\frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \sphericalangle C$ porque la amplitud de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad de la amplitud de su arco correspondiente.

$\frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = 50°$

$\overset{\frown}{AB} = 2 \cdot 50°$

$\overset{\frown}{AB} = 100°$

$\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BDC} = 360°$ por suma de amplitudes de arcos de circunferencia.

$140° + 100° + \overset{\frown}{BDC} = 360°$

$240° + \overset{\frown}{BDC} = 360°$

$\overset{\frown}{BDC} = 120°$

$\sphericalangle BAC = \frac{\overset{\frown}{BDC}}{2}$, porque la amplitud de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad de la amplitud de su arco correspondiente.

$\sphericalangle BAC = \frac{120°}{2}$

$\sphericalangle BAC = 60°$

$\widehat{BD} = 60°$, por ser $\overline{AD}$ bisectriz del $\sphericalangle BAC$, luego divide al arco BC en dos arcos iguales.

$\widehat{ABD} = \widehat{AB} + \widehat{BD} = 100° + 60° = 160°$ por suma de amplitudes de arcos de circunferencia.

b) $\overline{AD}$ no puede ser un diámetro de la circunferencia porque el arco que determina dicha cuerda es igual a 1600.

Ejercicio 15

La figura 2.15 es la que debe realizarse para el análisis de este ejercicio.

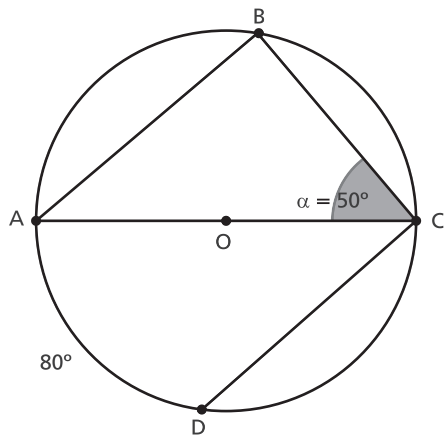


Figura 2.15

La amplitud del ángulo B es igual a 90° por ser inscrito en una circunferencia y corresponderle un arco que es una semicircunferencia.

a) $\sphericalangle ACB = 50°$ por datos

$\sphericalangle ACD = \dfrac{\widehat{AD}}{2}$ porque la amplitud de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad de la amplitud de su arco correspondiente.

$$\sphericalangle ACD = \frac{80°}{2}$$

$$\sphericalangle ACD = 40°$$

$\sphericalangle BCD = \sphericalangle ACB + \sphericalangle ACD = 50° + 40° = 90°$ por suma de amplitudes de ángulos.

$\overline{DB}$: es un diámetro de la circunferencia, porque $\sphericalangle BCD = 90^\circ$ e inscrito en la circunferencia, entonces su arco correspondiente es una semicircunferencia y su cuerda correspondiente es un diámetro (recíproco del teorema de Tales)

Ejercicio 16

La figura 2.16 es la que debe realizarse para el análisis de este ejercicio.

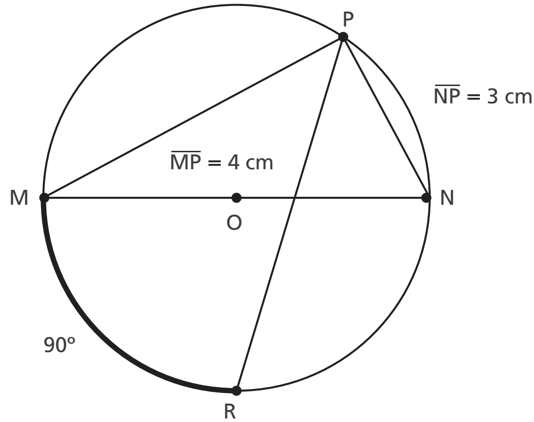


Figura 2.16

a) $\sphericalangle MPR = \dfrac{\overset{\frown}{MR}}{2}$, porque la amplitud de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad de la amplitud de su arco correspondiente.

$$\sphericalangle MPR = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

$\sphericalangle MPN = 90^\circ$, porque si a un ángulo inscrito en una circunferencia le corresponde un arco que es una semicircunferencia o una cuerda que es un diámetro, entonces es un ángulo recto.

$\sphericalangle MPN = \sphericalangle MPR + \sphericalangle RPN$ por suma de amplitudes de ángulos.

$$90^\circ = 45^\circ + \sphericalangle RPN$$

$$\sphericalangle RPN = 90^\circ - 45^\circ$$

$$\sphericalangle RPN = 45^\circ$$

Si el $\sphericalangle MPR = \sphericalangle RPN = 45^\circ$, entonces se cumple que $\overline{PR}$ es bisectriz del $\sphericalangle MPN$.

b) $A_{\Delta MNP} = \dfrac{b \cdot h}{2}$

$= \dfrac{\overline{MP} \cdot \overline{NP}}{2}$

$= \dfrac{4 \cdot 3}{2}$

$= 6{,}0\,cm^2$

c) $\overline{MN}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{NP}^2$ por el teorema fundamental de Pitágoras.

$\overline{MN}^2 = 4^2 + 3^2$

$\overline{MN}^2 = 16 + 9$

$\overline{MN}^2 = 25$

$\overline{MN} = \sqrt{25} = 5{,}0\,cm$

$P_{\Delta MNP} = \overline{MN} + \overline{MP} + \overline{NP}$

$= 5 + 4 + 3$

$= 12\,cm.$

Ejercicio 17

La figura 2.17 es la que debe realizarse para el análisis de este ejercicio.

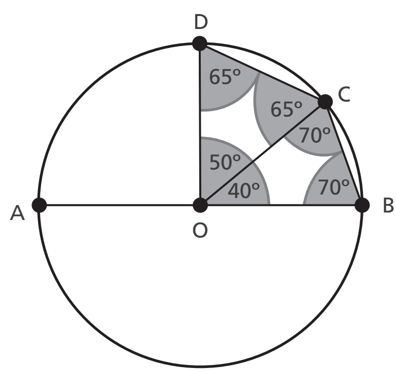


Figura 2.17

Si construimos el radio $\overline{OC}$ se forman dos triángulos isósceles ΔOBC y ΔOCD de bases $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente.

$\sphericalangle OBC = 70°$ por datos.

$\measuredangle OCB = 70°$ por ser ΔOAC isósceles de base $\overline{BC}$.

$\measuredangle BOC = 40°$ por suma de amplitudes de ángulos interiores de un triángulo.

$\measuredangle DOC = 50°$ por diferencia de amplitudes de ángulos.

$\measuredangle OCD = \measuredangle ODC = 65°$ por ser ángulos bases del ΔOCD isósceles de base $\overline{CD}$.

$\measuredangle BCD = \measuredangle OCB + \measuredangle OCD = 70° + 65° = 135°$

Ejercicio 18

La figura 2.18 es la que debe realizarse para el análisis de este ejercicio.

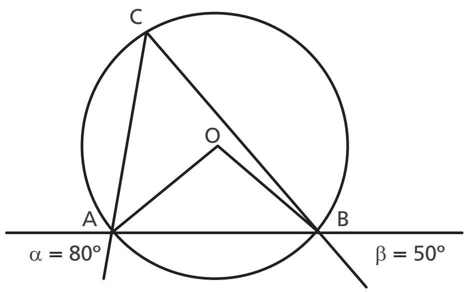


Figura 2.18

$\measuredangle CAB = \alpha = 80°$ por ser ángulos opuestos por el vértice.

$\measuredangle CBA = \beta = 50°$ por ser ángulos opuestos por el vértice.

$\measuredangle C = 50°$ por suma de amplitudes de ángulos interiores de un triángulo.

$\measuredangle C = \dfrac{\measuredangle AOB}{2}$ por ser ángulo inscrito y central respectivamente y corresponderle el mismo arco.

$\measuredangle AOB = 2 \cdot \measuredangle C$

$\measuredangle AOB = 2 \cdot 50°$

$\measuredangle AOB = 100°$

2.1.3 Ángulos seminscritos

Los contenidos de esta subtemática aparecen en el capítulo dos, epígrafe 2.1, subepígrafe 2.1.3 y para su desarrollo se sugieren tres horas-clase.

Para introducir el **concepto de ángulo seminscrito** el docente puede apoyarse en la sección: “Investiga y aprende” de este subepígrafe, referida a la diferenciación de casos de dos rectas que se corten y que a su vez corten a una circunferencia dada, pero ahora al menos una de las rectas que se cortan es tangente a la circunferencia dada como se muestra en la figura 2.52. Se debe realizar el análisis de las características comunes en distintos casos; con el empleo del método de lo particular a lo general se obtiene la definición de ángulo seminscrito que aparece en el subepígrafe 2.1.3.

Se sugiere que se analicen los ejemplos uno y dos del subepígrafe 2.1.3, para el aseguramiento de la identificación de este tipo de ángulos en la circunferencia y así destacar las características de los lados que lo forman.

La obtención del **teorema sobre la amplitud del ángulo seminscrito** se puede realizar retomando el ejemplo dos que posibilita analizar cuál será la amplitud de los ángulos en cada caso y de esta forma determinar la relación entre ángulo y arco correspondiente. Una manera de buscar la relación entre arco y ángulo puede ser la medición de las amplitudes de cada ángulo y del arco correspondiente con los instrumentos de dibujo o con el asistente matemático GeoGebra; la demostración de cada caso, en función del teorema, pueden constituir ejercicios de demostración para la segunda clase.

Para obtener el teorema sobre la amplitud de los ángulos seminscritos con la utilización del asistente matemático GeoGebra, se sugiere el procedimiento siguiente:

1. Trazar una circunferencia de centro *O* y diámetro $\overline{AB}$, figura 2.19.
2. Trazar la recta $\overline{AC}$ tangente a la circunferencia en el punto *B*, utilizando la herramienta recta perpendicular, figura 2.20.

3. Trazar un punto en la circunferencia y nombrarlo D.
4. Trazar la cuerda $\overline{BD}$, figura 2.21.
5. Trazar la semirrecta $\overline{OD}$ de origen *O*, figura 2.22.

Se busca la amplitud del ángulo seminscrito que $\sphericalangle CBD$ le corresponde el arco de circunferencia $\overset{\frown}{BD}$. Los educandos poseen como conocimientos previos que la amplitud del ángulo central coincide con la amplitud de su arco correspondiente, luego la amplitud del ángulo central $\sphericalangle BOB$ es igual a la amplitud del arco $\overset{\frown}{BD}$, figura 2.22.

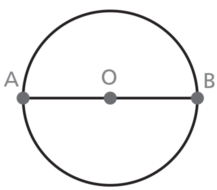


Figura 2.19

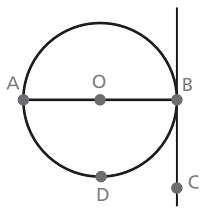


Figura 2.20

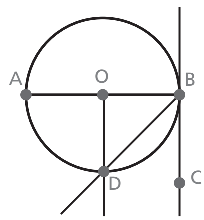


Figura 2.21

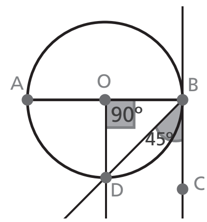


Figura 2.22

¿Cómo proceder para resolver el problema?

El docente debe motivar a los educandos a que encuentren una relación que vincule las amplitudes del ángulo central y del seminscrito.

¿Cómo proceder para encontrarlo?

6. Los educandos utilizarán la herramienta Ángulo para obtener las amplitudes de los ángulos $\sphericalangle CBD$ y $\sphericalangle BOB$, figura 2.23.

Ahora los educandos deben encontrar la relación entre las amplitudes del $\sphericalangle CBD$ y $\sphericalangle BOB$, figura 2.23; se observa los valores de las amplitudes y se estable la relación.

Para verificar que siempre se cumple la misma relación entre las amplitudes, se debe:

7. Mover el punto D de forma tal que los ángulos $\sphericalangle CBD$ y $\sphericalangle BOB$ obtengan diferentes amplitudes, figuras 2.24 y 2.25.

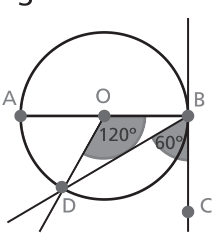


Figura 2.23

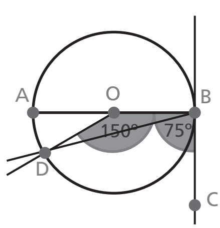


Figura 2.24

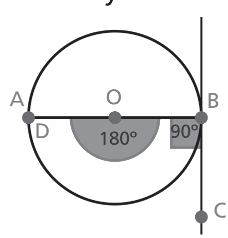


Figura 2.25

Los educandos después de observar las diferentes posiciones de las semirectas que determinan los ángulos, deben llegar a la conclusión siguiente: la amplitud del ángulo central es el doble de la amplitud del ángulo seminscrito.

¿Cómo comprobar que siempre se cumple la relación obtenida?

En la herramienta Texto, comando Fórmula La TeX (Raices y Fracciones), como se realizó en la busqueda del teorema sobre la relación entre ángulo central y ángulo inscrito, paso seis, figura 2.7.

Se sugiere demostrar los casos A y B en clase, como aparece en este subepígrafe del libro de texto por el método de elaboración conjunta, el caso C se sugiere orientarlo de tarea extraclase.

Es importante obtener el teorema sobre la relación entre ángulo inscrito-seminscrito y central que les corresponda el mismo arco, por analogía con los procedimientos anteriores pueden obtener dichas relaciones, tanto con instrumentos de trazado, como por el asistente matemático.

Se sugiere el procedimiento siguiente con la utilización del asistente matemático GeoGebra, para obtener el teorema sobre la relación entre ángulo inscrito-seminscrito y central:

1. Trazar una circunferencia de centro *O* y diámetro $\overline{AB}$.
2. Trazar una recta tangente a la circunferencia en el punto *B* que pase por *C*.
3. Trazar un ángulo inscrito $\sphericalangle BCD$ que le corresponda el arco *BD*.
4. Trazar un ángulo seminscrito $\sphericalangle CBD$ que le corresponda el arco *BD*.
5. Trazar un ángulo central $\sphericalangle BOD$ que le corresponda el arco *BD*.

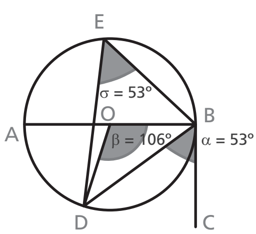


Figura 2.26

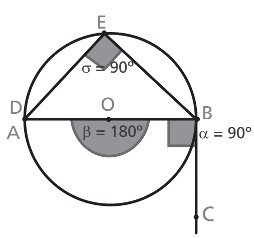


Figura 2.27

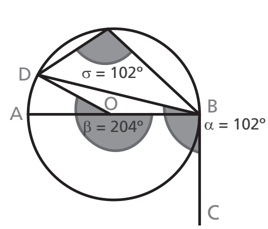


Figura 2.28

Moviendo el punto *D* sobre la circunferencia como se muestra en las figuras 2.26, 2.27 y 2.28 respectivamente para que los ángulos obtengan diferentes amplitudes, el docente puede preguntar ¿qué relación existe entre la amplitud del ángulo seminscrito, la amplitud del ángulo central y la amplitud del ángulo inscrito en cada uno de los casos?

El docente debe inducir a los educandos a que busquen si existe alguna relación entre estas amplitudes y los educandos deben plantear diferentes conjeturas y llegar a resultados parciales. ¿Cómo comprobar que siempre se cumple la relación que buscamos? Los educandos deben responder que con la relación entre la amplitud del ángulo central y la del ángulo inscrito con la herramienta Texto, comando Fórmula La TeX (Raíces y Fracciones), como se realizó en la busqueda del teorema sobre la relación entre ángulo central y ángulo inscrito, paso seis, figura 2.7. Al continuar variando la posición de los puntos *B* y *C*, este cociente se mantiene constante. Posteriormente se enuncia el teorema sobre la relación entre ángulo inscrito-seminscrito y central.

Otra manera de obtener este teorema es con el uso de instrumentos de dibujo, siguiendo el orden de pasos descrito anteriormente.

En las dos actividades de la sección: "Aplica tus conocimientos" del subepígrafe 2.1.3 que aparecen después del teorema sobre la relación entre ángulo inscrito-seminscrito y central, los educandos podrán utilizar dicho teorema para su solución, además deben analizar la sección: "Saber más" que trata sobre el significado de equiángulo.

Las horas-clase restantes del sistema de clases dedicarlas a la ejercitación y pueden emplearse los ejercicios del uno al diez del subepígrafe 2.1.3.

Estos ejercicios se resolverán de la forma más racional posible, como siempre teniendo en cuenta el diagnóstico de los educandos para ordenarlos según el grado de complejidad y trabajar con ejercicios de acuerdo con los niveles de asimilación y las diferencias individuales, atendiendo a sus características. La realización de los ejercicios que potencian *el desarrollo de los educandos hacia niveles superiores de desempeño cognitivo con tareas cada vez más complejas, de carácter interdisciplinario, y el tránsito* *progresivo de la dependencia a la independencia y la creatividad no deben dejar de realizarse.*

El ejercicio uno, permite identificar ángulos inscritos y seminscritos en la circunferencia.

En el ejercicio dos, se calculan amplitudes de ángulos en la circunferencia.

En el ejercicio tres, se fundamenta una proposición, con la aplicación del teorema de la amplitud de un ángulo seminscrito, se sugiere auxiliarse del caso A, figura 2.54, del subepígrafe 2.1.3 del libro de texto.

En el ejercicio cuatro, se debe aplicar la relación de radio y tangente para obtener que, $\sphericalangle NPQ = \sphericalangle NOQ = 90°$ y así funmentar la proposición.

En el ejercicio cinco, se aplican los teoremas de la amplitud de un ángulo seminscrito y la relación de un ángulo inscrito-seminscrito-central.

En el ejercicio seis, se vinculan conocimientos de relaciones de ángulos en la circunferencia con los de operaciones con polinomios estudiados en grados anteriores.

En el ejercicio ocho, se calculan amplitudes de ángulos en la circunferencia relacionados con sus arcos correspondientes.

En los ejercicios siete y nueve, se demuestran proposiciones, aplicando el teorema sobre la amplitud del ángulo seminscrito y el teorema sobre la relación entre ángulo inscrito-seminscrito y central.

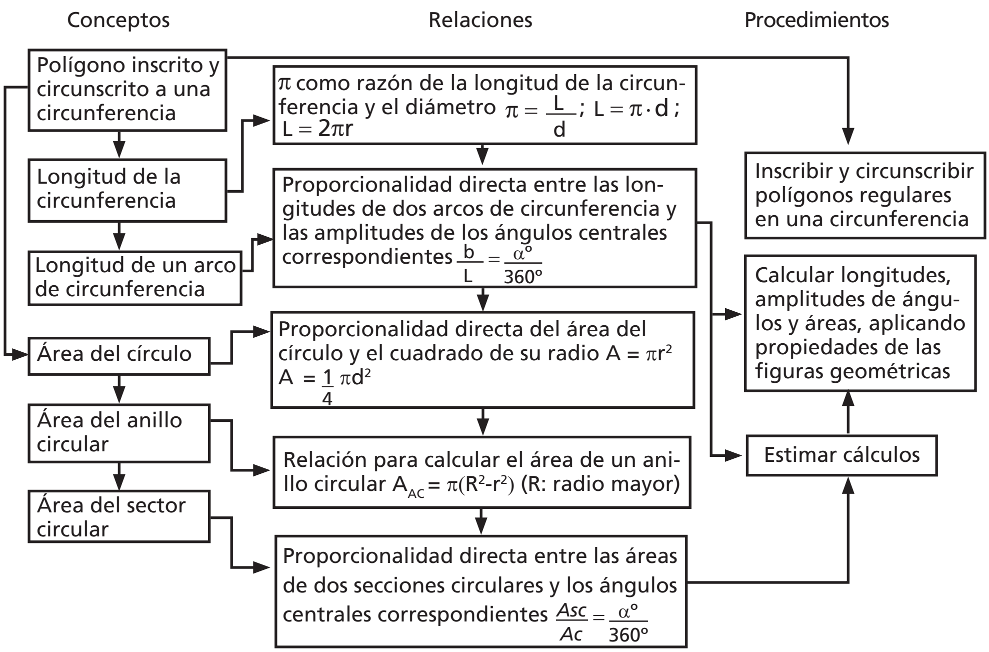
En el ejercicio diez, se analizan cada uno de los planteamientos con el empleo de las relaciones entre ángulo, arco, rectas tangentes y radios en la circunferencia; el docente puede dar impulsos y resolverlo de manera conjunta con sus educandos, deben construir los radios $\overline{QA}$ y $\overline{AK}$, para analizar la relación de posición entre radio y tangente, teniendo en cuenta el teorema estudiado en séptimo grado sobre la perpendicularidad de la tangente a una circunferencia.

2.2 LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA Y ÁREA DEL CÍRCULO

Los contenidos correspondientes a esta unidad temática se desarrollan en 15 horas-clase y aparecen en el epígrafe 2.2, del capítulo dos “Geometría plana y cálculo de cuerpos”, en el LT. Esta cuenta con cuatro subtemáticas:

2.2.1 Polígonos inscritos y circunscritos.
2.2.2 Longitud de la circunferencia.
2.2.3 Área del círculo.
2.2.4 Construcción de gráficos circulares o de pastel.

En el esquema 2.3 se puede apreciar la estructura interna de la unidad temática atendiendo a los conceptos, relaciones y procedimientos esenciales.



Esquema 2.3

Los contenidos de esta subtemática aparecen en el capítulo dos, epígrafe 2.2 y para el desarrollo del subepígrafe 2.2.1 se sugieren dos horas-clase; se tratarán los contenidos relacionados con: definición de polígono inscrito y circunscrito, circunferencia inscrita y circunscrita, así como teorema sobre la existencia de polígonos regulares inscritos y circunscritos.

La primera clase debe comenzar con la sección: “Investiga y aprende” que permite a los educandos proponer ideas de cómo calcular la longitud de la circunferencia con polígonos inscritos, pero antes deben estudiar los conceptos de: polígono inscrito y circunscrito y circunferencia inscrita y circunscrita. Para el análisis de estos conceptos es recomendable comenzar por el significado en la lengua materna de los vocablos *inscrito y circunscrito* con la utilización de fuentes informáticas o de un diccionario, para comprender la característica que poseen las figuras geométricas del plano cuando ocupan alguna de estas posiciones. Conocido el significado de los vocablos se puede deducir en elaboración conjunta, docente-educando, las definiciones del subepígrafe 2.2.1 relacionadas con polígono inscrito y polígono circunscrito a una circunferencia y luego analizar los ejemplos uno y dos de este subepígrafe.

Es esencial que se desarrollen habilidades en la construcción de polígonos regulares inscritos y circunscritos a una circunferencia, para esto se sugiere el análisis de la situación problémica que aparece en la sección: "Reflexiona un instante" que se solucionará con los procedimientos que aparecen en los ejemplos cuatro, cinco y seis del subepígrafe 2.2.1. Las construcciones que se desarrollan en estos ejemplos son aplicadas a la representación de los artículos que van a construir en los talleres de la asignatura de Educación Laboral en el grado, además para la comprensión de la geometría del espacio en la educación media superior, por lo que es recomendable no dejar de hacerlas.

Para la clase de ejercitación se cuenta con una amplia propuesta de ejercicios del uno al diez del subepígrafe 2.2.1.

Los ejercicios dos, seis y siete permiten sistematizar las propiedades de los polígonos.

Los ejercicios del tres al cinco posibilitan realizar construcciones geométricas, objetivo fundamental de esta temática.

El ejercicio ocho, es portador de información ya que con este se obtiene la relación $A_C = \frac{d^2}{2}$ (*d*: diagonal del cuadrado) y **no se puede dejar de realizar.**

En el ejercicio diez se integran las propiedades y relaciones de las figuras planas estudiadas.

Sobre el ejercicio nueve, su demostración aparece en las soluciones de los ejercicios de este subepígrafe 2.2.1.

En el ejercicio uno se sistematizan las propiedades y tipos de polígonos, permite el entrenamiento de los educandos y puede orientarse de trabajo independiente como tarea extraclase.

2.2.1 Longitud de la circunferencia

Los contenidos de esta subtemática aparecen en el capítulo dos, epígrafe 2.2, subepígrafe 2.2.2 y para su desarrollo se sugieren siete horas-clase.

Es conveniente recordar el significado del vocablo perímetro e identificarlo en el caso de la circunferencia como se muestra en el subepígrafe 2.2.2 en la sección: "Saber más".

Para determinar **la longitud de la circunferencia**, se debe iniciar con una situación problémica como la sugerida en el texto, en la sección: "Reflexiona un instante" donde se deben mostrar objetos como los que se presentan en la figura 2.77 del libro de texto, para después preguntar a los educandos como proceder para estimar la longitud de cada objeto; es recomendable orientar con anterioridad una tarea extraclase donde se investiguen las diferentes formas que desde la antigüedad se han empleado para calcular la longitud de una circunferencia y qué sugirieran la manera que se les ocurriría a ellos realizarlo.

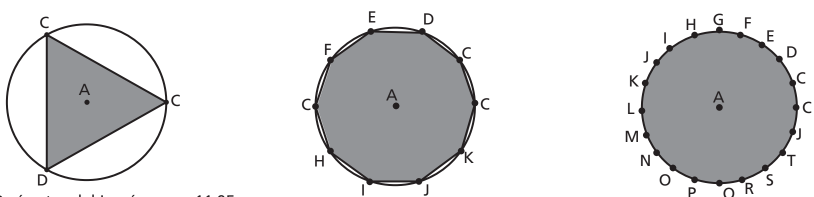
Otros ejemplos pueden ser el medir la longitud de una tapa de un pomo de forma circular o de una lata de forma cilíndrica, etc. La idea es que se tomen varios ejemplos para obtenerla por vía deductiva.

No pueden dejar de analizar con los educandos la primera sección: "Aplica tus conocimientos" relacionada con el empleo de un asistente matemático para la búsqueda de esta relación.

En el libro de texto aparece una explicación minuciosa en el subepígrafe 2.2.2 , de cómo puede procederse para la **obtención de la ecuación del cálculo de la longitud de una circunferencia**, procedimiento que el docente puede desarrollar en la primera clase de forma práctica con sus educandos y así obtener las ecuaciones que aparecen en el recuadro de la segunda sección: "Aplica tus conocimientos": $L = \pi \cdot d$ o $L = 2\pi r$. Se deben analizar los ejemplos uno, dos y tres del subepígrafe 2.2.2 o similares a estos, para fijar el procedimiento del cálculo de longitud de la circunferencia y el despeje del radio en la ecuación de la longitud de la circunferencia.

Para culminar este contenido es recomendable realizar una lectura comentada de la sección: *"De la historia" sobre el genial matemático de la antigüedad Arquímedes de Siracusa (fig. 2.81), el cual utilizó este mismo procedimiento para calcular la longitud de la circunferencia.*

Otra posibilidad de estimar la longitud de la circunferencia es con el asistente matemático GeoGebra, se le propone a los educandos inscribir en una circunferencia diferentes polígonos, por ejemplo: polígono de tres lados, de seis lados; de diez lados, de 20 lados, y así sucesivamente y en cada caso calcular el perímetro de los polígonos regulares inscritos en esta y compararlos con la longitud de la circunferencia, como se muestra en las figuras 2.29 a, 2.29 b y 2.29 c. Los educandos podrán reflexionar que **el perímetro de los polígonos regulares inscritos en la circunferencia se aproxima a la longitud de la circunferencia, según aumenta el número de sus lados.**



Perímetro del Icocágono = 11,95 u
L: longitud de la circunferencia de c = 14,45 u

Perímetro del Icocágono = 14,21 u
L: longitud de la circunferencia de c = 14,45 u

Perímetro del Icocágono = 14,39 u
L: longitud de la circunferencia de c = 14,45 u

a **b** **c**

Figura 2.29

Para introducir el cálculo de **la longitud de un arco de circunferencia** podemos utilizar la situación que aparece en la sección: "Reflexiona un instante" del subepígrafe 2.2.2 u otra similar que aparece después del ejemplo tres, donde se plantea la relación entre la longitud de un arco y la longitud de la circunferencia correspondiente a este arco; debe tenerse en cuenta también la amplitud del ángulo central correspondiente al arco que le estamos determinando su longitud y así obtener la proporción entre las razones dadas por: la longitud del arco y de la circunferencia

$\left(\frac{b}{L}\right)$ y la amplitud del ángulo central y la circunferencia $\left(\frac{\alpha}{360°}\right)$. Después se analiza el ejemplo cuatro donde aparece el procedimiento para el cálculo de la longitud de un arco de circunferencia.

La sección: "Investiga y aprende" conduce el tratamiento de la aplicación práctica de la relación longitud de la circunferencia y el radio; es importante que los educandos la conozcan, se sugiere mostrar como aparece en la situación problémica donde se resalta su carácter funcional y presenta a (longitud de la circunferencia) en una dependencia de proporcionalidad directa en relación con el diámetro o el radio. Además, es recomendable que los educandos estudien los ejemplos cinco, seis y siete que aparecen a continuación del recuadro de la sección: "Recuerda que", para comprender con claridad, la solución de la situación problémica planteada inicialmente.

El tiempo restante del sistema de clases se dedicará para la ejercitación y se proponen los ejercicios del uno al 14 del subepígrafe 2.2.

En los ejercicios del uno al tres, se deben utilizar para fijar el procedimiento para calcular la longitud de la circunferencia, dada la longitud de su radio o su diámetro.

En el ejercicio nueve, se calcula la longitud de una circunferencia, pero teniendo en cuenta la longitud de un arco que pertenece a ella; todos estos ejercicios pueden orientarse en diferentes tareas independientes para la casa, sin ser repetitivos en una misma clase.

Los ejercicios del cuatro al siete, tanto como el 13 y el 14 responden a situaciones de la vida práctica, con niveles diferentes de asimilación que **no pueden dejar de hacer.**

En el ejercicio ocho, se integran todos los conocimientos adquiridos en esta temática y puede constituir una sistematización en las últimas clases del sistema, **no se debe dejar de hacer.**

En los ejercicios diez, 11 y 12, se integran las relaciones en una circunferencia, pueden utilizarse en esta temática o emplearlos para la sistematización de toda la unidad.

2.2.2 Área del círculo

Los contenidos de esta subtemática aparecen en el capítulo dos, epígrafe 2.2, subepígrafe 2.2.3 del libro de texto de 8vo grado y para su desarrollo se sugieren seis horas-clase.

Se propone como vía metodológica para el tratamiento de este contenido utilizar la actividad de la sección: "Reflexiona un instante" del subepígrafe 2.2.3, donde se relacionan las dimensiones de los implementos deportivos, su utilización desde tiempos remotos y la aplicación práctica de los conocimientos matemáticos en el mundo de hoy.

Se debe recordar cómo se calcula el área de polígonos regulares de tres y cuatro lados para lo que es conveniente proponer de tarea en la clase anterior, para asegurar el nivel de partida de la primera clase de este sistema, la actividad de la sección: "Aplica tus conocimientos", donde se toma como ejemplo un hexágono regular que se descompone en seis triángulos equiláteros como aparece en la figura 2.94 subepígrafe 2.2.3 y así poder obtener la ecuación para calcular el área de polígonos regulares de n lados.

Para obtener la ecuación del área del círculo podemos utilizar el método de generalización; se propone a los educandos la tarea de la sección: "Investiga y aprende", referida a inscribir en una circunferencia polígonos: de seis lados; de diez lados, de 20 lados, y así sucesivamente, midiendo directamente los elementos necesarios y calculando, de modo que el educando reconozca que, la longitud del apotema se aproxima a la longitud del radio, el perímetro del polígono de (n) lados se aproxima a la longitud de la circunferencia y el área del polígono de (n) lados al área del círculo. Siguiendo el desarrollo de la actividad anterior y el procedimiento que aparece en el libro en el subepígrafe 2.2.3 se obtienen las ecuaciones:

$$A_C = \pi r^2 \text{ o } A_C = \pi \frac{d^2}{4}$$

Es mucho más racional utilizar la propuesta experimental con enfoque dinámico para la obtención de la ecuación del área del círculo con el asistente matemático GeoGebra.

La utilización del GeoGebra permite aplicar los principios heurísticos de medir y probar sistemáticamente, así como el de la movilidad de la figura y llegar a una generalización a partir de casos particulares.

Pasos para realizar la construcción:

1. Clic en deslizador, clic en Vista gráfica para posicionarlo, renombrarlo por *r*, intervalo [0.1, 3], incremento 0.1.
2. Clic en deslizador, clic en Vista gráfica para posicionarlo, renombrarlo por n, intervalo [3, 30], incremento 1.
3. Insertar un punto en el origen de coordenadas, renombrarlo por *A*.
4. Trazar circunferencia dado centro *A* y radio *r*, figura 2.30.

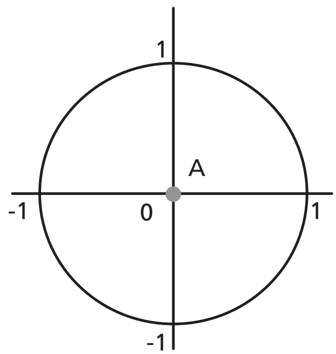


Figura 2.30

5. Trazar un punto de intersección entre la circunferencia y semieje positivo de las abscisas, renombrarlo por *B*.
6. Escribir en la barra de entrada *a* = (360/n).
7. Trazar un ángulo con la herramienta dada su amplitud, con amplitud *a*, con $\sphericalangle BAB' = 120°$, como se muestra en la figura 2.31 (luego, dar clic derecho sobre el ángulo y seguidamente clic izquierdo en mostrar objeto).

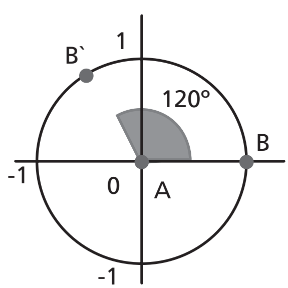


Figura 2.31

8. Trazar un polígono regular dando clic sobre *B* y *B´* respectivamente, en el cuadro de diálogo que aparece, sustituir el número de vértices por (*n*) y obtener la figura 32.

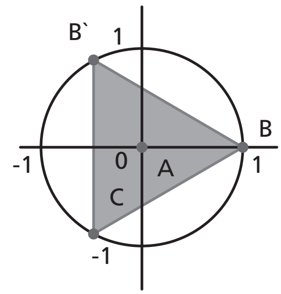


Figura 2.32

9. Trazar la apotema y el radio de la circunferencia como se muestra en la figura 2.33.

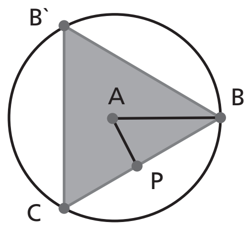


Figura 2.33

10. ¿Existirá alguna relación entre: la longitud de la apotema $\overline{AP}$ y la del radio AB, el perímetro del polígono $BB'C$ y la longitud de la circunferencia y el área del polígono $BB'C$ y el área del círculo?
11. Colocar el deslizador en 10 y observar la figura 2.34, luego en 20 y observar la figura 2.35 y después en 30 y observar la figura 2.36. ¿Encuentran alguna relación entre la longitud de la apotema y la del radio, el perímetro y área del polígono inscrito de n lados con la longitud de la circunferencia y el área del círculo respectivamente?

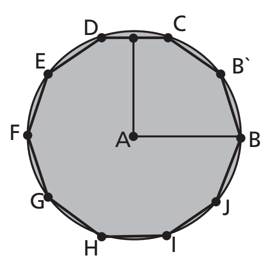


Figura 2.34

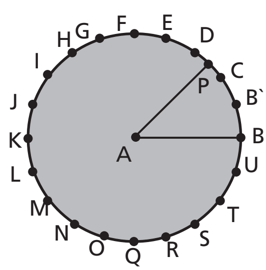


Figura 2.35

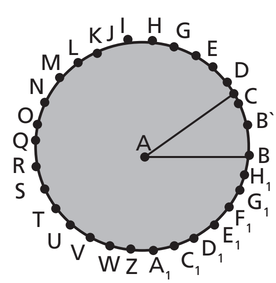


Figura 2.36

12. ¿Cómo se puede buscar esta relación con la utilización de las herramientas del asistente matemático?
13. Con la herramienta Distancia, hallar la longitud de la apotema y del radio, el perímetro del polígono inscrito de *n* lados y la longitud de la circunferencia y con la herramienta Área, calcular el área del polígono inscrito de *n* lados y del círculo y repetir las acciones que se realizaron en el onceno paso, como se observa en la figura 2.37.

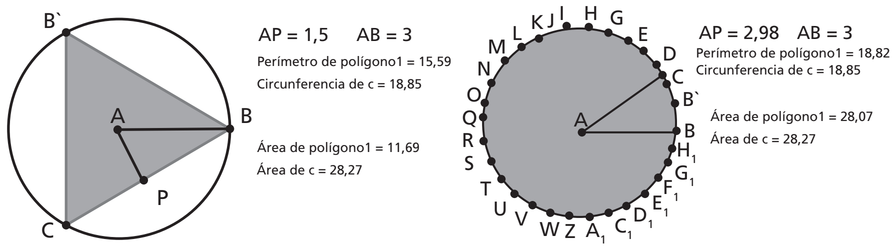


Figura 2.37

En el proceso, al aumentar el número de lados del polígono inscrito, el docente debe inducir al educando para que responda las interrogantes siguientes:

1. ¿Qué relación existe entre la longitud de la apotema y la longitud del radio?
2. ¿Qué relación existe entre el perímetro del polígono inscrito de *n* lados y la longitud de la circunferencia?
3. ¿Qué relación existe entre el área del polígono inscrito de *n* lados y el área del círculo?

La fijación del procedimiento del cálculo del área de un círculo se puede realizar con el análisis de los ejemplos uno y dos del subepígrafe 2.2.3 o similares a estos. No se debe dejar de analizar con los educandos la sección: “Consejos útiles” la que aparece después de los dos ejemplos para recordar la utilización de las cifras significativas para el resultado final del cálculo geométrico.

El tratamiento del **concepto de corona circular o anillo circular** debe comenzar con una situación problémica como la que aparece en la sección: “Reflexiona un instante”, relacionada con el área de una figura metálica (arandela) y que se vincula con el enfoque metodológico de la asignatura y el contenido: educación politécnica, laboral, económica y profesional.

La sección: "Aplica tus conocimientos" del subepígrafe 2.2.3 que aparece después de la definición de corona circular o anillo circular, les permite a los educandos buscar una ecuación para calcular el área de la corona circular, utilizando la ecuación estudiada para determinar el área del círculo. Se recomienda apoyarse en el ejemplo tres que aparece en el subepígrafe 2.2.3 después de la sección antes trabajada y resolverlo de manera conjunta con los educandos, para luego poder dar respuesta a la situación de la sección: "Reflexiona un instante" relacionada con el área de una figura metálica (arandela).

El procedimiento para el cálculo del área de una corona circular se puede establecer con el ejemplo cuatro del subepígrafe 2.2.3 o alguno similar a él.

Se propondrá una situación similar a la que aparece en la sección: "Reflexiona un instante" del subepígrafe 2.2.3 para obtener **el concepto de sector circular** y obtenerla empleando situaciones reales, similares a las que se muestran en el ejemplo cinco y en la solución de la actividad de la sección: "Reflexiona un instante" anterior, relacionada con la figura 2.98 del libro de texto en este subepígrafe. Seguidamente se deben analizar con los educandos las secciones: "Aplica tus conocimientos" y "Consejos útiles" respectivamente, pues aportan información que elevan la cultura científica de los educandos y recuerdan como representar gráficamente fracciones de igual denominador en un mismo círculo. No se puede dejar de analizar la sección: "Reflexiona un instante" que aparece después de las secciones analizadas, referida a cómo proceder para construir un gráfico circular o de pastel cuando los datos son fracciones con diferentes denominadores y culminar con el análisis del ejemplo siete con la utilización de un procesador de texto o un asistente matemático.

Es recomendable construir un gráfico circular o de pastel con el asistente matemático GeoGebra, como se propone en la sección: "Aplica tus conocimientos", actividad que puede ser una tarea extraclase que no puede dejar de discutirse con los educandos.

A continuación, se propone la solución de la actividad con su procedimiento:

En una secundaria básica la matrícula es de 600 educandos, 150 cursan el séptimo grado, 200 el octavo grado y 250 el noveno grado. Representa la información en un gráfico circular.

- Abrir la aplicación GeoGebra.
- En el menú superior dar clic en la ventana Vista y luego seleccionar la Hoja de Cálculo.
- Escribir en las celdas desde la B1 hasta la B4 los nombres de los grados (séptimo, octavo y noveno) y en las celdas desde la C1 hasta la C4 los porcentajes que representan la cantidad de educandos de cada grado con respecto a la matrícula de la secundaria básica o sea (25,0 %, 33,3 % y 41,7%), figura 2.38.

Hoja de Cálculo

	A	B	C
1		Grados	Porcentaje
2		séptimo	0.25
3		octavo	33.3
4		noveno	41.7
5			

Figura 2.38

- En Vista Gráfica con la herramienta Circunferencia (centro, punto), trazar una circunferencia que representará al gráfico circular o de pastel y renombrar el punto *B* como *A1*, que se encuentra sobre la circunferencia, figura 2.39.
- Observa que en la "Hoja de Cálculo" en la casilla *A1* aparecen las coordenadas del punto, figura 2.40.

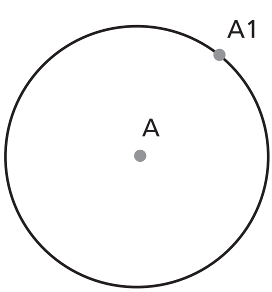


Figura 2.39

Hoja de Cálculo

	A	B	C
1	(3.98, 0.9...	Grados	Porcentaje
2		séptimo	0.25
3		octavo	33.3
4		noveno	41.7

Figura 2.40

- Escribir en la barra de entrada el comando siguiente:
  $A2$ = Rota [$A1$, $C2$*3.6°, A]
- Dar un clic sobre la casilla $A2$ y aparecen las coordenadas de un punto que pertenece a la circunferencia, figura 2.41.
- Dar clic sobre el punto de $A2$ y arrastrar hasta la casilla $A4$, figuras 2.42.
- En el círculo se crean el resto de los puntos que determinarán cada uno de los sectores en el gráfico circular o de pastel, figura 2.43.

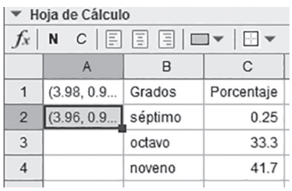


Figura 2.41

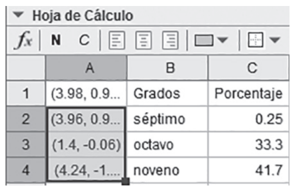


Figura 2.42

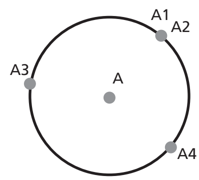


Figura 2.43

- Seleccionar en el menú principal, la herramienta Sector circular y confeccionar cada uno de los sectores del gráfico circular.
- Ocultar las etiquetas de los sectores circulares y los puntos sobre la circunferencia, cambiar el color de cada uno de los sectores del gráfico.
- Agregar las etiquetas dinámicas a cada uno de los sectores del gráfico, figura 2.44.

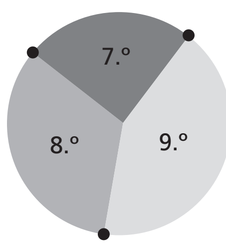


Figura 2.44

Los ejercicios del uno al 26 de este subepígrafe 2.2.3, el docente puede utilizarlos para fijar los conceptos estudiados, el procedimiento de cálculo del área del círculo, la corona y el sector circular, además del referido a la construcción de gráficos de pastel con la vinculación de los conocimientos adquiridos por los educandos sobre estadística descriptiva. Estas actividades de aprendizaje no se deben dejar de realizar en clases del sistema o como tareas extraclase para la casa.

Los ejercicios del uno al siete permiten fijar los conceptos estudiados en los subepígrafes 2.2.2 y 2.2.3.

En los ejercicios del ocho al 12 se fija el procedimiento de cálculo de áreas, pero en estos casos de áreas sombreadas con la aplicación del cálculo de áreas de figuras conocidas que determinan en el círculo (la corona circular y del sector circular) y de otras figuras planas.

Los ejercicios del 13 al 17 no pueden dejar de resolverse; en estos aparecen situaciones prácticas donde se aplica el cálculo de longitudes y áreas estudiadas que permite a los educandos ampliar sus conocimientos de su entorno espacial.

Los ejercicios del 18 al 22 son de mayor exigencia, el docente los seleccionará de acuerdo con las características de sus educandos. (Es necesario tener en cuenta que es factible potenciar el desarrollo de los educandos hacia niveles superiores de desempeño cognitivo, con la realización de tareas cada vez más complejas).

En el caso del ejercicio 18, se debe recordar como calcular el área de un polígono regular de *n* lados, teniendo en cuenta la apotema y el radio de la circunferencia circunscrita a dicho polígono y por diferencia de áreas calcular la región sombreada.

Los ejercicios del 23 al 26 se refieren al tratamiento de los gráficos de pastel tanto para su construcción como para la interpretación y la aplicación de conceptos y medidas de tendencia central de estadística descriptiva. Se sugiere orientar algunos ejercicios como tarea extraclase, pero es recomendable no dejar de resolverlos. Se recomienda realizar la construcción del ejercicio 23 con el asistente matemático GeoGebra o el Procesador de Texto (figura 2.45).

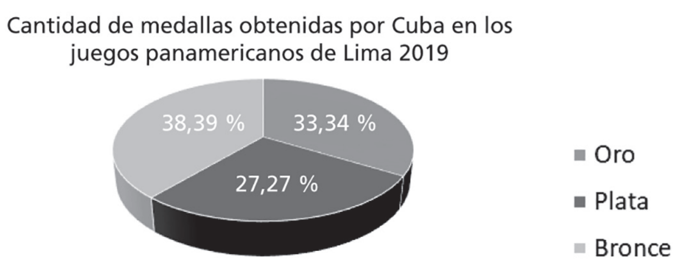


Figura 2.45

A continuación, se proponen sugerencias de solución de los ejercicios del 19 al 22 del subepígrafe 2.2.3.

Ejercicio 19

Figura de análisis 2.46.

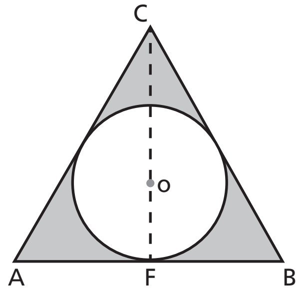


Figura 2.46

$$L = 2\pi r$$

$$12{,}56\,cm = 2.3{,}14\,r$$

$$12{,}56\,cm = 6{,}28\,r$$

$$r = \frac{12{,}56\,cm}{6{,}28} = 2{,}0\ cm$$

Utilizando la razón $\frac{\overline{OF}}{\overline{CF}} = \frac{1}{3}$

$$\overline{CF} = 3r \rightarrow \overline{CF} = 6{,}0\,cm$$

ΔCFB rectángulo en F por ser $\overline{CF}$ su altura con respecto al lado $\overline{AB}$, entonces se cumple que:

$\overline{BC}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{FB}^2$ por el teorema fundamental de Pitágoras.

Pero $\overline{FB} = \frac{\overline{BC}}{2}$ por ser F punto medio del lado $\overline{AB}$ (en todo triángulo equilátero las rectas notables coinciden).

$$BC^2 = 6^2 + \left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2$$

$$BC^2 = 6^2 + \frac{\overline{BC}^2}{4}$$

$$BC^2 - \frac{\overline{BC}^2}{4} = 36$$

$$\frac{4\overline{BC}^2 - \overline{BC}^2}{4} = 36$$

$$\frac{3\overline{BC}^2}{4} = 36$$

$$\overline{BC}^2 = 48$$

$$\overline{BC} = \sqrt{48} \approx 6,92$$

$$A_S = A_{\Delta ABC} - A_C$$

$$A_S = A_{\Delta ABC} - A_C$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{b \cdot h}{2} \qquad A_c = \pi \cdot r^2$$

$$A_c = 3,14 \cdot 2^2$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{6,92 \cdot 6}{2} \qquad A_c = 3,14 \cdot 2^2$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{6,92 \cdot 6}{2} \qquad A_c = 12,56\,cm^2$$

$$A_{\Delta ABC} = 20,76\,cm^2 \qquad A_S = 20,76 - 12,56 = 8,2\,cm^2$$

En el caso del ejercicio 20, figura 2.47, debe recordarse la relación entre circunferencias tangentes entre sí que se estudió en séptimo grado.

$$A_S = A_{\Delta O_1 O_2 O_3} - 3 \cdot A_{sector\ circular}$$

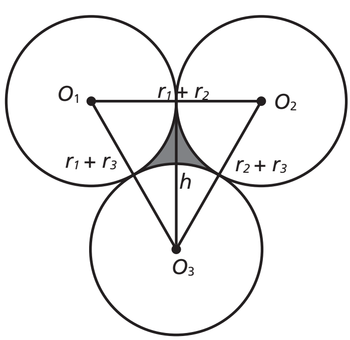


Figura 2.47

Área del triángulo $O_1O_2O_3$

El triángulo $O_1O_2O_3$ es equilátero de lado igual a 40 cm.

Apliquemos el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de la altura del triángulo $O_1O_2O_3$

$$(r_1 + r_3)^2 = r_1^2 + h^2$$

$$4^2 = 2^2 + h^2$$

$$16 - 4 = h^2$$

$$12 = h^2$$

$$h \approx 3,46 \text{ cm}$$

$$A_{\Delta O_1O_2O_3} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 3,46}{2} = 6,92 \text{ cm}^2$$

$$A_{sector\ circular} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha°}{360°} = \frac{3,14 \cdot 4 \cdot 60°}{360°} \approx 2,09 \text{ cm}^2$$

$$A_S = 6,92 - 3 \cdot 2,09 = 6,92 - 6,27 = 0,65 \text{ cm}^2$$

En el caso del ejercicio 21, el área sombreada se obtuvo por la diferencia de áreas del sector circular y del triángulo *AOB* isósceles de base $\overline{AB}$.

La longitud de los lados iguales del triángulo *AOB* tiene la misma longitud del radio de la circunferencia. Por tanto, se debe buscar una relación en función de una variable, que debe ser *r* (*r:* radio de la circunferencia).

$$A_{Sombreada} = A_{Sector\ circular} - A_{\Delta AOB}$$

$$A_{Sombreada} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360°} - \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A_{Sombreada} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 90°}{360°} - \frac{r \cdot r}{2}$$

$$1,14 = \frac{3,14 \cdot r^2}{4} - \frac{r^2}{2}$$

$$r^2 = 4$$

$$r = 2,00 \text{ cm}$$

En el ejercicio 22, para calcular el área sombreada se utiliza la relación siguiente:

$$A_{\text{Sombreada}} = A_{ABCD} - A_{Semicírculo} + A_{Semicírculo} - A_{\Delta AED}$$

Observa que: $\overline{AB} = \dfrac{\overline{AD}}{2}$

En una clase de consolidación se puede proponer un ejercicio como el siguiente y despertar la curiosidad de los educandos.

Calcula el perímetro de un semicírculo de centro *O* y radio igual a 2,0 cm.

Para resolver este ejercicio es recomendable hacer una figura de análisis como se muestra en la figura 2.48.

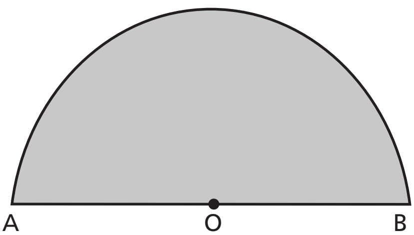


Figura 2.48

L: longitud de la circunferencia

d: diámetro de la circunferencia

$$P_{Sc} = \frac{L}{2} + d$$

$$= \frac{2\pi r}{2} + 2r$$

$$= \pi r + 2r \, o \, r(\pi + 2)$$

$$= 3{,}14 \cdot 2 + 2 \cdot 2$$

$$= 10{,}28 \text{ cm}$$

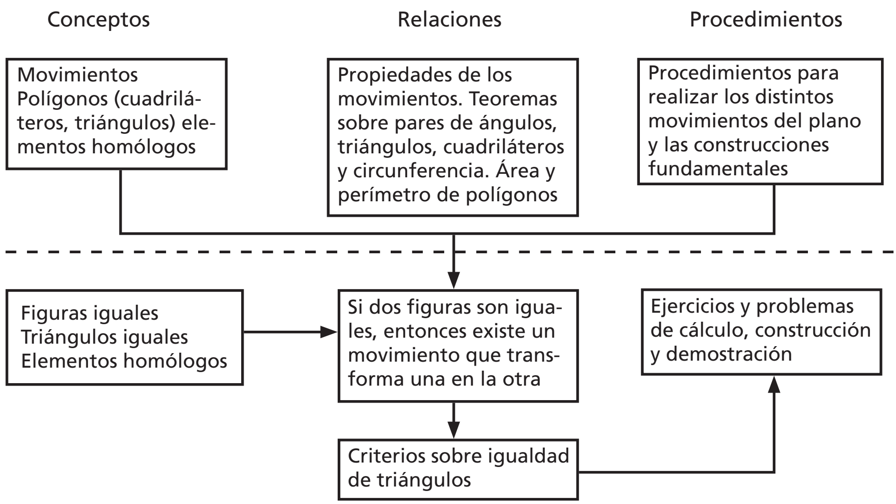
$$\approx 10 \text{ cm}$$

2.3 IGUALDAD DE FIGURAS GEOMÉTRICAS EN EL PLANO

Los contenidos correspondientes a esta unidad temática se tratarán en 25 horas-clase y aparecen en el epígrafe 2.3 del capítulo dos “Geometría plana y cálculo de cuerpos”, en el LT. Esta cuenta con tres subtemáticas:

2.3.1 Sistematización de los movimientos en el plano.
2.3.2 Figuras iguales.
2.3.3 Igualdad de triángulos.

En el esquema 2.4 se presenta la estructura interna de esta unidad temática, atendiendo a los conceptos, relaciones y procedimientos esenciales que en esta se abordan.



Esquema 2.4

2.3.1 Sistematización de los movimientos en el plano y de las propiedades fundamentales de triángulos y cuadriláteros

Los contenidos de esta subtemática aparecen en el capítulo dos, epígrafe 2.3, subepígrafe 2.3.1 del LT y para su desarrollo se sugieren cinco horas-clase.

El contenido referido a los movimientos en el plano, solo se trabajará para una sistematización de sus propiedades en una hora-clase con los ejercicios que aparecen en el subepígrafe 2.3.1.

El análisis del recuadro de la sección: “Recuerda que” de este subepígrafe del LT, permitirá identificar la propiedad fundamental de cada movimiento del plano.

Importante: Se aprovechará el resto de las horas-clase para **repasar las propiedades y relaciones fundamentales que se establecen entre los ángulos, triángulos, rectas notables y cuadriláteros**. Se emplearán ejercicios de temáticas anteriores que no se pudieron realizar, sistematizando en las dos últimas clases todos los polígonos. Es importante realizar mediciones y estimaciones.

2.3.2 Figuras iguales

Los contenidos de esta subtemática aparecen en el capítulo dos, epígrafe 2.3, subepígrafe 2.3.2 del LT y para su desarrollo se sugiere una hora-clase.

Se debe iniciar la clase con la situación que aparece en la primera sección: "Reflexiona un instante", la cual permitirá a los educandos, el reconocimiento de objetos del entorno, que sean capaces de clasificarlos, reconocer sus propiedades y características destacando aquellas que se puedan considerar como iguales o semejantes; con anterioridad se le orientará de tarea a los educandos que traigan al aula modelos de objetos y figuras para realizar la experimentación matemática, que lleguen a conclusiones y expongan sus ideas, lo cual contribuirá a que se preparen para comprender el concepto de igualdad geométrica y se debe concluir que:

- Todos estos elementos son iguales dos a dos.
- Se debe comprobar que estas figuras se pueden superponer.
- Se define la igualdad de figuras a partir de la posibilidad de superposición.

El docente debe trabajar la definición de polígonos iguales como se muestra en el libro de texto y el análisis de la segunda sección: "Reflexiona un instante" relacionada con la comparación de longitudes de segmentos y amplitudes de ángulos y su justificación porque estas aseguran la comprensión y el proceder para la próxima temática, puesto que los triángulos son polígonos.

El ejercicio dos del subepígrafe 2.3.2, se debe orientar de tarea extraclase como aseguramiento del nivel de partida para la próxima temática.

2.3.3 Igualdad de triángulos

Los contenidos de esta subtemática aparecen en el capítulo dos, epígrafe 2.3, subepígrafe 2.3.3 del LT de octavo grado y para su desarrollo se sugieren 19 horas-clase. Se propone que se imparta de la forma siguiente:

- Criterios de igualdad de triángulos. Búsqueda por la vía reductiva. Demostración del teorema $(l.a.l)$ (cuatro horas - clase).
- Ejercicios de cálculo geométrico, demostración, construcción aplicando los criterios de igualdad de triángulos y resolución de problemas (15 horas-clase).

El tratamiento de este contenido, se sugiere iniciarlo con una situación problémica como la propuesta en la sección inicial: "Aplica tus conocimientos" del subepígrafe 2.3.3 referida a determinar cuándo dos triángulos son iguales; el educando se debe remitir a lo aprendido en la temática anterior relacionado con los movimientos del plano y la definición de polígonos iguales.

Para que dos triángulos sean iguales, debe existir un movimiento que transforme uno en otro, de manera que sus lados y ángulos sean iguales como se muestra a continuación en la figura 2.49 (*simetría axial o reflexión de eje m*) que se obtuvo con el asistente matemático GeoGebra.

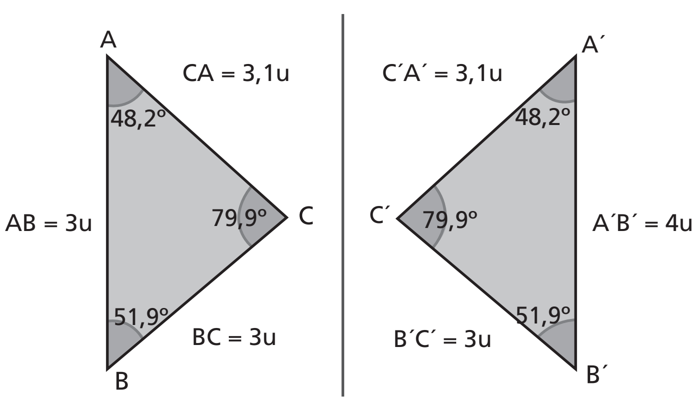


Figura 2.49

El docente debe escuchar las diferentes ideas que proponen los educandos sobre la definición de triángulos iguales al apoyarse en la definición estudiada de polígonos iguales, antes de concluir con la que aparece en el libro de texto en este subepígrafe.

Es necesario que los educandos realicen la actividad de la sección: “Investiga y aprende” para la comprensión de los elementos homólogos en triángulos iguales.

El análisis de la situación que aparece en la sección: “Reflexiona un instante” los docentes la deben desarrollar de conjunto con los educandos, mediante una conversación heurística conducida por las preguntas siguientes:

- ¿Será necesario siempre, para demostrar la igualdad de dos triángulos, encontrar un movimiento que transforme uno en el otro? ¿Será necesario que sus tres lados y sus tres ángulos sean iguales?
- ¿Se puede garantizar la igualdad de dos triángulos con un número mínimo de elementos respectivamente iguales? ¿Cuáles? ¿Cuántos?

No se debe dejar de analizar con los educandos la situación que aparece en la sección: “Investiga y aprende”, la cual les permitirá a ellos experimentar con las plantillas en forma de triángulos y formular sus conjeturas sobre la base de la construcción de ejemplos y contraejemplos, con ayuda de los instrumentos de dibujo o de un asistente matemático. Así se obtiene:

	Pares de lados iguales				
		0	1	2	3
Pares de ángulos iguales	0	-	-	-	lll
	1	-	-	lal	-
	2	-	ala	-	-
	3	-	-	-	-

Una vez que se obtenga una conjetura acerca de los teoremas que proporcionan criterios suficientes sobre la igualad de triángulos, a partir de las figuras particulares construidas, resulta necesario argumentar la necesidad de la demostración como se muestra en la sección: “Consejos útiles”. Una vez que se finaliza el proceso de búsqueda se debe **formular** cada uno de los **teoremas** en la forma **"si…, entonces…"** como aparece en el recuadro resumen de los teoremas. Se sugiere mantener el orden de los teoremas como se tratan en el libro de texto.

El proceder que aparece después del recuadro de los criterios de igualdad de triángulos, se puede realizar primero con el análisis de los datos y la reactivación de aquellos conocimientos que sean necesarios para luego construir la figura de análisis y comenzar a encontrar la idea de la demostración con preguntas heurísticas para llegar de la premisa a la tesis. El educando ahora está en condiciones de escribir la demostración. Se sugiere discutir las diferentes estrategias de solución.

Es importante realizar el análisis de los ejemplos uno, dos y tres del subepígrafe 2.3.3.

Las horas-clase restantes se dedicarán a la ejercitación y se proponen los ejercicios del uno al 21 de este subepígrafe 2.3.3.

En las primeras clases de ejercitación se sugiere que se le oriente a los educandos ejercicios donde en el enunciado se designen los triángulos que deben probar que son iguales. Para las clases posteriores se propone simultanear estos ejercicios de demostración con otros en los que no se explicita la necesidad de la demostración de la igualdad entre dos triángulos, es decir, los educandos tendrán que encontrar los triángulos para posteriormente realizar la demostración de la igualdad de estos.

El docente debe tener en cuenta el grado de dificultad de los ejercicios y graduarlos en dependencia de las habilidades logradas por sus educandos. En un primer momento se deben brindar los tres elementos que permiten demostrar la igualdad, posteriormente se darán dos de los tres elementos y en una etapa posterior, solamente uno de estos. Progresivamente se debe evitar dar la figura de análisis para que los educandos esbocen una figura genérica que responda a las condiciones del ejercicio. Además, a partir de un mismo enunciado se debe dar la posibilidad a los educandos para variar las condiciones del ejercicio y analizar las implicaciones de esto.

El docente debe conocer que los errores más frecuentes que cometen los educandos al enfrentarse a un ejercicio de demostración de igualdad de triángulos son: **realizar una figura particular**, que no responde a las condiciones del ejercicio, **prefijar el criterio de igualdad** a utilizar sin tener en cuenta los datos que se aportan en el ejercicio, **no identificar en figuras compuestas los triángulos** que deben seleccionar para realizar la demostración, **no poder determinar con precisión los elementos homólogos** y **no representar adecuadamente la demostración**, es decir, escribirla en dos columnas donde en una de estas aparecen detallados los pasos de la demostración y en la otra, la fundamentación correspondiente a cada paso.

Los ejercicios uno, dos, tres y cuatro del epígrafe 2.3.3 permiten fijar los criterios de igualdad de triángulos.

Los ejercicios cinco y seis del epígrafe 2.3.3 son de completar una demostración de igualdad de triángulos y posibilitan fundamentar una igualdad de elementos dados o viceversa.

Los ejercicios siete, ocho, nueve y diez son de mayor complejidad porque son de demostración aplicando los criterios de igualdad de triángulos y cálculo geométrico.

En los ejercicios del 11 al 19 se integran conocimientos de propiedades y el cálculo de áreas y perímetros de figuras planas.

A continuación, se presentan propuestas de solución de algunos ejercicios de los sugeridos.

12. a) En los triángulos *ACD* y *CDB* se cumple que:

$\overline{AD} = \overline{BC}$ por ser lados opuestos del rectángulo *ABCD*, $\overline{AC} = \overline{BE}$ por lados opuestos del paralelogramo *ABEC,* por $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACD$ ser ángulos alternos entre paralelas $\overline{AD} // \overline{BC}$ y secante $\overline{AC}$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CBE$ por ser ángulos alternos entre paralelas $\overline{AC} // \overline{BE}$ y secante $\overline{BC}$, por tanto $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBE$ por propiedad transitiva.

Entonces se cumple que: $\Delta ACD = \Delta CDB$ por tener dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales.

b) Para resolver este inciso el educando debe ubicar en la figura de análisis los datos que se brindan, en este caso el valor del segmento *AB* que es la base del paralelogramo *ABEC*, además conoce el valor del área de este paralelogramo y necesita calcular el valor del segmento *BC*, qué es la altura del paralelogramo, luego debe sustituir en la ecuación del área de este paralelogramo y despejar la altura quedando: $h = \frac{A}{AB}$ y el resultado es: $\overline{BC} = 9{,}0\ dm$.

13. a) En los triángulos *ADF* y *ABC* se cumple que:

$\overline{AC} = \overline{AD}$ por datos

$\sphericalangle FAD = 90^\circ$ por ser $\overline{AF}$ tangente a la circunferencia en el punto A.

$\sphericalangle ACD = 90^\circ$ por ser un ángulo inscrito sobre el diámetro de una circunferencia (Teorema de Tales).

Luego $\sphericalangle FAD = \sphericalangle ACD = 90^\circ$

$\sphericalangle FDA = \sphericalangle DAC$ por ser ángulos alternos entre paralelas $\overline{FD} \,/\!/\, \overline{AC}$ y la secante $\overline{AD}$

Por tanto $\Delta ADF = \Delta ABC$ por tener un lado y los ángulos adyacentes a ese lado respectivamente iguales.

13. b) $A_s \approx 15\ dm^2$

14. Para probar que $\overline{QR} = \overline{NS}$ debemos demostrar que el triángulo *MRQ* es igual al triángulo *PSN* por uno de los teoremas de igualdad de triángulos.

$\sphericalangle MRQ = \sphericalangle PSN$ por datos, $\sphericalangle M = \sphericalangle P$ por ser ángulos opuestos del paralelogramo *MNPQ*, $\overline{MQ} = \overline{PN}$ por ser lados opuestos del paralelogramo *MNPQ*, para poder aplicar uno de los teoremas de igualdad de triángulos es necesario probar que por suma de $\sphericalangle MQR = \sphericalangle P$ ángulos interiores de un triángulo o (terceros ángulos), entonces $\Delta MRQ = \Delta PSN$ por tener un lado y los ángulos adyacentes a ese lado respectivamente iguales.
Por tanto $\overline{QR} = \overline{NS}$ por ser lados homólogos de triángulos iguales.

b) 100º y 80º

15. Para probar que $\sphericalangle CAE = \sphericalangle DAB$ debemos demostrar que el triángulo *ACD* es igual al triángulo *ABE* por uno de los teoremas de igualdad de triángulos.

$\overline{AB} = \overline{AC}$ por ser ambos lados de un triángulo equilátero, $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABE$ por ser ángulos interiores de un triángulo equilátero, $\sphericalangle CAE = \sphericalangle DAB$ por datos,

$\sphericalangle CAE = \sphericalangle CAD + \sphericalangle DAE$ y por suma de amplitudes de ángulos, igualando ambas expresiones obtenemos:

$\sphericalangle CAD + \sphericalangle DAE = \sphericalangle DAE + \sphericalangle EAB$

Por tanto: $\sphericalangle CDA = \sphericalangle EAB$

Se cumple que: $\Delta ACD = \Delta ABE$ por tener un lado y los ángulos adyacentes a ese lado respectivamente iguales, concluimos que $\sphericalangle CAE = \sphericalangle DAB$, ángulos homólogos de triángulos iguales.

b) A = 5,1 dm^2

16. a) En los triángulos ABC y ADC se cumple que:
$\overline{AC}$ es lado común a los dos triángulos, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC$ por ser $\overline{AC}$ bisectriz del $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 90°$ por ser ángulos inscritos y corresponderle un arco que es una semicircunferencia, además se cumple que $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACD$ por terceros ángulos, por tanto $\Delta ABC = \Delta ADC$ *por tener un lado y los ángulos adyacentes a ese lado respectivamente iguales.*
b) Es el inciso c)

17. a) En los trián- $\overline{BF}$ gulos *AFD* y *CFE* se cumple que:
$\overline{AF} = \overline{FC}$ porque es altura del ΔABC relativa a la base y se cumple que en un triángulo isósceles $\overline{AC}$ todas las rectas notables coinciden luego *F* es punto medio de
$\sphericalangle FAB = \sphericalangle FCB$ por ser ángulos base de un triángulo isósceles.
$\overline{AD} = \overline{CE}$ por ser $\overline{DE}$ paralela media del , ΔABC entonces *D* y *E* son puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$ respectivamente.

Por tanto $\Delta AFD = \Delta CFE$ por tener dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales.

b) Área del rombo (A_R): 4 cm^2. Área del triángulo *AFD* (A_{AFD}): 2 cm^2, entonces

$A_R = 2\,A_{AFD}$

18. a) En los triángulos *ABE* y *ACE* se cumple que:

$\overline{BE} = \overline{EC}$ porque y $\overline{BC} \perp \overline{AD}$ son cuerda y diámetro respectivamente de la circunferencia de centro *O*, entonces *E* es punto medio $\overline{BC}$ de .

$\sphericalangle BEA = \sphericalangle CEA$ porque $\overline{BC} \perp \overline{AD}$.

$\overline{AE}$ lado común a los triángulos *ABE* y *ACE*.

Luego $\Delta ABE = \Delta ACE$ por tener dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales.

Por tanto $\overline{AC} = \overline{AB}$ por ser lados homólogos de triángulos iguales.

b) Si $\overline{AC} = \overline{AB}$, entonces ΔABC es isósceles de base $\overline{BC}$, por la condición de que $\overline{BC} \perp \overline{AD}$, entonces *D* es punto medio del arco *BC*, luego la amplitud del arco *BC* es igual a 120° por suma de amplitudes de arcos, entonces $\sphericalangle BAC = 60^{\circ}$ por ser ángulo inscrito en una circunferencia y corresponderle el arco *BC*.

Por tanto, todo triángulo isósceles con un ángulo con amplitud igual a 60° los demás ángulos tienen amplitud igual a 60° por suma de amplitudes de ángulos interiores y se cumple que el triángulo *ABC* es equilátero.

19. a) En el triángulo *ABC* se cumple que: Por ser $\overline{BD}$ mediana relativa al lado $\overline{AC}$, entonces *D* es su punto medio, por ser $\overline{AF}$ mediatriz del segmento $\overline{BC}$, entonces *E* es su punto medio, luego $\overline{AD} = \overline{CE}$.

En un triángulo equilátero sus rectas notables coinciden, luego $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ y $\overline{FE} \perp \overline{BC}$,por tanto $\sphericalangle BDA = \sphericalangle FEC = 90^{\circ}$.

$\sphericalangle FCE = 60^{\circ}$ por suma de amplitudes de ángulos interiores del triángulo FCE.

$\sphericalangle BAD = 60^{\circ}$ por ser ángulo interior del triángulo *ABC* equilátero.

Luego $\sphericalangle FCE = \sphericalangle BAD = 60^{\circ}$ por tener la misma amplitud.

Por tanto $\Delta ABD = \Delta CEF$ por tener un lado y los ángulos adyacentes a ese lado respectivamente iguales.

b) $\overline{AE} = \overline{BD}$ por ser rectas notables del *ABC* equilátero, $\overline{FE} = \overline{BD}$ por ser lados homólogos de triángulos iguales, entonces por $\overline{AE} = \overline{FE}$ propiedad transitiva.

Por tanto, se cumple que $\overline{BC}$ y $\overline{AF}$ se cortan perpendicularmente en su punto medio y esta condición es la de las diagonales de un rombo, luego *ABFC* es un rombo.

Los docentes pueden utilizar en sus clases de consolidación los ejercicios del 18 al 25 de este capítulo dos.

Propuesta de ejercicios que se pueden incorporar a las clases de consolidación

1. En la figura 2.50 se cumple que:

- *ABCD* es un rectángulo.
- *E* punto de intersección de $\overline{FD}$ y $\overline{AB}$.
- *E* punto medio de $\overline{FD}$.
- *F*, *B* y *C* puntos alineados.

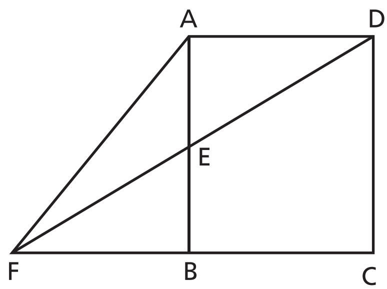


Figura 2.50

a) Demuestra que: $\Delta FBE = \Delta AED$.

b) Si el ángulo $\sphericalangle EFB = 30°$ entonces la amplitud del ángulo $\sphericalangle FEA$ es igual a:

a) ___60^0 b) ___ 120^0 c) ___ 150^0 d) ___ Ninguna de las anteriores

2. En la circunferencia de centro *O* y diámetro $\overline{AB}$, figura 2.51, se cumple que:

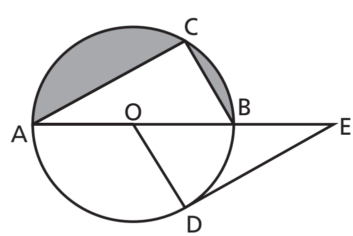


Figura 2.51

- $\overline{DE}$ es tangente en *D* a la circunferencia.
- Los puntos *A*, *O*, *B* y *E* están alineados.
- $\overline{AB} = \overline{OE}$
- $\overline{OD} // \overline{BC}$
- $\overline{AB} = 20,0\ mm$

a) Demuestra que $\Delta ACB = \Delta ODE$.
b) Si el área del triángulo *ODE* es igual a 86,5 mm, calcula el área de la región sombrada.

3. En la circunferencia de centro *O* y diámetro $\overline{AB}$, figura 2.52, se sabe que:

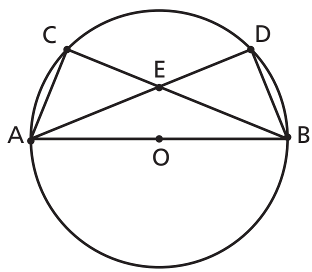


Figura 2.52

- *C* y *D* puntos de la circunferencia.
- ΔABE es isósceles de base $\overline{AB}$.
- La longitud de la circunferencia es igual a 25,12 cm

a) Probar que $\overline{AC} = \overline{BD}$
b) Calcula el área del triángulo ABE, si su altura $\overline{OE} = 1,9cm$

4. En la figura 2 53 se cumple que:

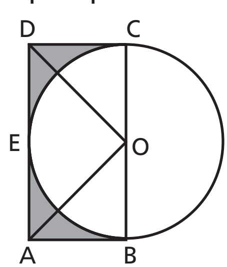


Figura 2.53

- *ABCD* es un rectángulo seminscrito a la circunferencia de centro *O* y diámetro $\overline{BC}$.

- $\overline{BC} = 8{,}0\,cm$.
- $\overline{AD}$ es tangente a la circunferencia en E.

a) Demuestra que $\Delta OAB = \Delta OCD$.
b) Si el área del rectángulo es igual a $32\,cm^2$, entonces el área sombreada es igual a:
___ 18,24 cm^2 ___ 6,88 cm^2 ___ 9,12 cm ___ No se puede determinar

5. En la figura 2 54 se cumple que:

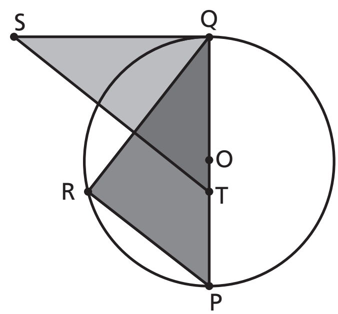


Figura 2.54

- El punto R pertenece a la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{PQ}$.
- $\overline{SQ}$ tangente a la circunferencia en Q.
- $\overline{ST}\ //\ \overline{RP}$.
- $\overline{QT} = \overline{PR}$.

5.1 Completa los espacios en blanco para obtener proposiciones verdaderas.
a) La amplitud del $\sphericalangle QPR$ es igual a la ___________ de la amplitud del $\overset{\frown}{RQ}$.
b) La expresión para calcular el área del círculo en función del diámetro es _____________.

5.2 Escribe al menos dos proposiciones verdaderas que se cumplan en la figura 2.54.
5.3 Demuestra que $\Delta TQS = \Delta QRP$.
5.4 Si las longitudes de los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{RQ}$ son 15,0 cm y 1,2 dm respectivamente. Calcula el perímetro del triángulo PQR.

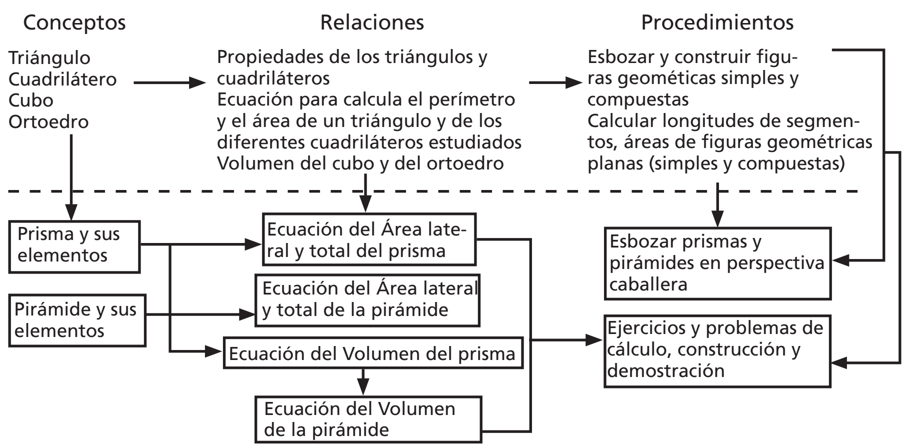
Nota: los educandos deben saber realizar demostraciones de igualdad de triángulos al terminar esta subtemática, en cada clase se solucionarán los ejercicios que cada cual pueda hacer. Es más importante resolver y concluir un ejercicio que empezar varios y no entender ninguno.

2.4 PRISMA Y PIRÁMIDE

Los contenidos correspondientes a esta unidad temática se tratarán en 20 horas-clase y aparecen en el epígrafe 2.4 del capítulo dos “Geometría plana y cálculo de cuerpos”, en el LT de octavo grado. Esta se divide en dos subtemáticas:

- El prisma y la pirámide. Elementos de estos cuerpos: bases, caras, aristas, alturas y ángulos. Representación geométrica del prisma y la pirámide (perspectiva caballera) (epígrafe 2.4 y el subepígrafe 2.4.1).
- Determinación del área lateral y total mediante sus desarrollos. Ecuaciones que expresan estas áreas. Determinación de las ecuaciones para calcular el volumen de estos cuerpos. Aplicación a la resolución de ejercicios y problemas que conduzcan al análisis de estos cuerpos (subepígrafe 2.4.2, subepígrafe 2.4.3 y subepígrafe 2.4.4).

En el esquema 2.5 se puede apreciar la estructura interna de la unidad temática atendiendo a los conceptos, relaciones y procedimientos esenciales.



Esquema 2.5

El prisma y la pirámide. Elementos de estos cuerpos: bases, caras, aristas, alturas y ángulos. Representación geométrica del prisma y la pirámide (perspectiva caballera)

Los contenidos de esta subtemática aparecen en el capítulo dos, epígrafe 2.4, subepígrafe 2.4.1 del LT de octavo grado y para su desarrollo se sugieren cinco horas-clase.

Lo fundamental de esta subunidad temática es que los educandos tengan una representación mental clara del prisma y de la pirámide, por lo que se requiere que estos observen diferentes modelos de los cuerpos geométricos básicos, los reconozcan en su entorno y posteriormente los puedan esbozar aplicando el principio de la perspectiva caballera.

Se propondrán ejemplos de cuerpos geométricos similares a los que aparecen en el ejemplo uno del epígrafe 2.4 para motivar la primera clase, donde el docente de conjunto con el educando determinará características iguales en todos los cuerpos mostrados que permiten obtener la definición de cuerpo geométrico como región del espacio que posee límites.

De manera análoga el docente debe mostrar primas y pirámides en diferentes posiciones para que los educandos tengan una representación lo más general posible de estos conceptos. Dentro de los modelos deben considerarse ***el cubo y el ortoedro*** por ser casos particulares de prismas y que son conocidos por los educandos desde segundo grado, así como el prisma que se introduce en el grado tercero. Se recomienda que por esta razón se trabaje primeramente con el prisma y posteriormente con la pirámide realizando para este segundo cuerpo un tratamiento similar al del prisma.

Las definiciones de prisma y pirámide se deben obtener sobre la base del análisis de las analogías y diferencias existentes entre objetos de un mismo y diferente tipo respectivamente. Para esto se le deben presentar a los educandos varios objetos en forma de prisma, (igualmente para la pirámide) para que los comparen entre sí y busquen las características comunes haciendo una abstracción del material, del color, del tamaño, de la posición, de la forma de sus caras, etc., para llegar de esta forma a la obtención de las propiedades fundamentales de los prismas y con esto a la elaboración del concepto de prisma (y pirámide respectivamente).

También el docente puede proceder con el análisis del ejemplo dos del epígrafe 2.4 para definir un prisma regular y recordar cuando un polígono es regular y después definir un ortoedro. El ejemplo tres enseña cómo nombrar los prismas. En las pirámides puede basarse en las Pirámides de Egipto que los educandos conocen de grados anteriores y analizar su definición para después denotarlas como aparece en el ejemplo cuatro y análogamente caracterizar las pirámides regulares.

Aunque se trabajará con prismas rectos (de igual manera con pirámides rectas), se deben mostrar a los educandos modelos de prismas oblicuos (pirámides oblicuas) para que estos tengan una idea lo más general posible de los conceptos de prisma y de pirámide.

Posteriormente el docente debe tomar uno de los modelos empleados para que los educandos identifiquen en este, los elementos que caracterizan al prisma (igualmente para la pirámide), vértices, aristas (laterales y de la base), bases, caras (que son polígonos) alturas (de las caras y del cuerpo) y los ángulos (en las bases, los que forman las aristas laterales y los que forman las caras con la(s) base(s)).

Es necesario que los educandos logren nombrar los prismas según la figura geométrica que posee su base y las pirámides análogamente, además de determinar el número de caras que tiene cada tipo de cuerpo geométrico. La sección: "Saber más" les permitirá a los educandos aplicar sus conocimientos sobre especificidades de algunos cuerpos geométricos, el docente puede orientar la búsqueda de otros cuerpos que se conozcan por otros nombres por poseer características especiales.

Para fijar el conocimiento adquirido en este primer momento de la subtemática se sugieren los ejercicios del uno al tres del subepígrafe 2.4.1.

2.4.1 Representación geométrica del prisma y la pirámide

El tratamiento de la representación geométrica de los prismas y pirámides debe comenzar por motivar a los educandos a esbozar los cuerpos geométricos en una superficie plana (libreta, pizarra, etcétera).

Se sugiere que el docente permita que los educandos realicen libremente el esbozo del cuerpo y después someta a la crítica varias de estas representaciones realizadas por los educandos con la intención de motivar la introducción de una forma de representación bastante ilustrativa de la tercera dimensión en un plano que es la ***perspectiva caballera***. Para trabajar el procedimiento de representación no se realizará un tratamiento teórico de la geometría descriptiva, solamente se les informará a los educandos que las aristas en la dirección del largo y de la altura se representan con su misma longitud, que las que están en la dirección de la profundidad (ancho) se reducen a la mitad y que el ángulo entre estas aristas y las del largo (también con las de la altura) forman un ángulo de 45º.

Se puede comenzar representando figuras planas que es un proceder estudiado en la asignatura de Educación Laboral.

Representación de un cuadrado en perspectiva caballera (figura 2.55).

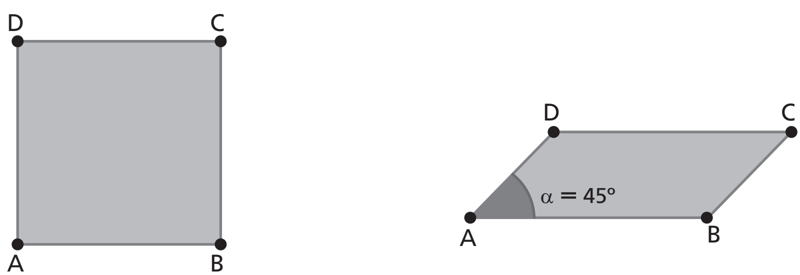


Figura 2.55

Representación de un triángulo en perspectiva caballera, figura 2.56.

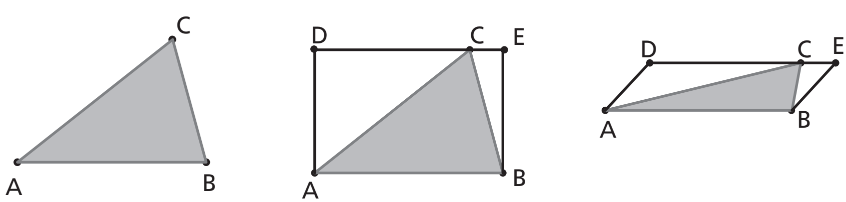


Figura 2.56

Representación de un prisma recto de base rectangular en perspectiva caballera, figura 2.57.

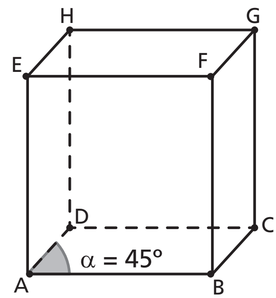


Figura 2.57

El docente se debe apoyar en el procedimiento para representar cuerpos geométricos en perspectiva caballera que aparece en el epígrafe 2.4.1.

En la sección: "Aplica tus conocimientos se sugiere representar los cuerpos geométricos de los ejemplos uno, dos y tres con la aplicación de un asistente matemático, es recomendable utilizar el GeoGebra, está actividad puede ser indicada como tarea extraclase que luego se analizará para el inicio de la próxima como aseguramiento del nivel de partida, al discutir con los educandos los pasos lógicos realizados con las herramientas del asistente y así repasar los elementos que forman los prismas y pirámides.

A continuación, se mostrará la construcción de algunos cuerpos geométricos en la Vista Gráfica 3D del asistente matemático GeoGebra. Los objetos serán construidos con las herramientas de la barra superior.

Ejemplo 1:

Representa un prisma de base cuadrada si sabes que las aristas de las bases miden 4 u y la altura 6,5 u.

1. Abrir un nuevo archivo en GeoGebra, figura 2.58.
2. Activar la herramienta Gráficas 3D en el menú Vista, figura 2.59.
3. Activar la herramienta Polígono regular en el menú Polígono y construir un cuadrado de lado igual a 4,0 cm en la Vista Gráfica y observar que este se reflejará en la Vista Gráficas 3D, figura 2.60.

4. Ocultar los ejes de coordenadas en la Vista Gráficas 3D, dar clic en la herramienta Mostrar/ocultar los ejes, como indica la flecha de color rojo, figura 2.60.
5. Activar la herramienta Prisma o cilindro desde su base y construir el prisma de base cuadrada y altura 6,5 u, de la forma siguiente:
   - Dar clic en herramienta Prisma o cilindro desde su base.
   - Dar clic en el polígono que se encuentra en la Vista Gráficas 3D.
   - Introducir el valor numérico de la altura en el cuadro de diálogo que se muestra simultáneamente en la pantalla e inmediatamente aparece en la Vista Gráfica 3D el prisma *ABCDEFGH*, figura 2.61.

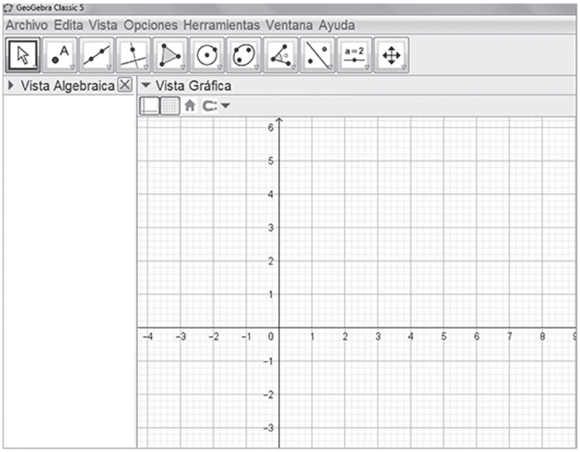


Figura 2.58

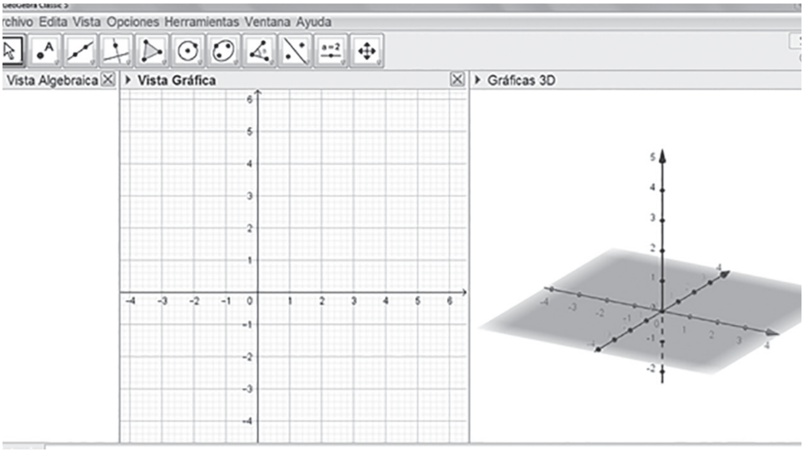


Figura 2.59

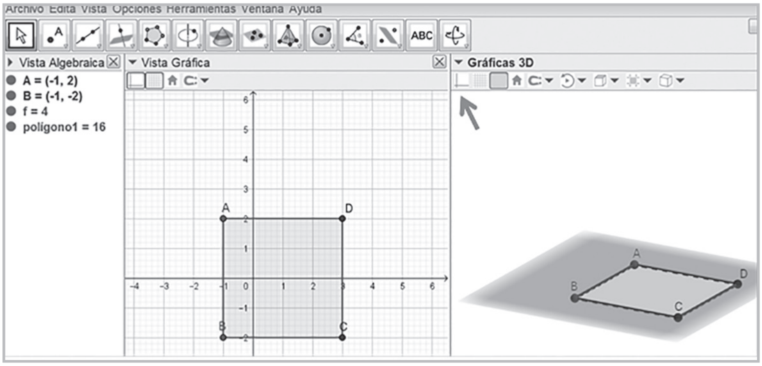


Figura 2.60

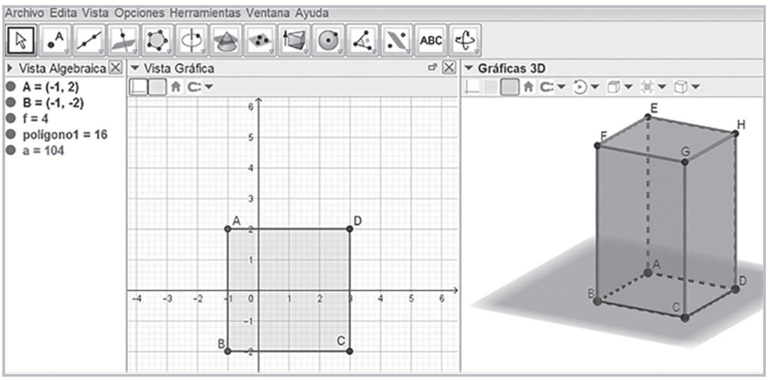


Figura 2.61

En la parte superior de la Vista Gráficas 3D, se encuentran varios botones, figura 2.62 que permiten realizar exploraciones al cuerpo geométrico, tales como:

Figuras 2.62

- Rotar la vista.
- Vistas frontales.
- Proyección paralela.
- Proyección en perspectiva, entre otras.

Ejemplo 2:

Representa una pirámide recta de base rectangular de 6 u de ancho, 4 u de profundidad y 5 u de altura.

Los dos primeros pasos coinciden con los del ejemplo uno. La descripción se iniciará con la construcción de la base de la pirámide, que es un rectángulo de lados 6 u y 4 u respectivamente.

1. Activar la herramienta Segmento de longitud dada y construir un segmento $\overline{AB}$ de longitud 6 u, figura 2.63.
2. Activar la herramienta Recta perpendicular y construir una recta perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pase por el punto *B*, figura 2.64.
3. Activar la herramienta Circunferencia (centro, radio) y construir una circunferencia de centro en *B* y radio 4 u. Activar la herramienta Intersección y construir el punto de intersección entre la circunferencia y la recta perpendicular al segmento $\overline{AB}$, denotar el punto con la letra *C*, así queda determinado el ancho del rectángulo, figura 2.65.
4. Desactivar la circunferencia dando clic sobre la ecuación de esta que se encuentra en la Vista algebraica.
5. Activar la herramienta Recta perpendicular y construir una recta perpendicular a la recta $\overline{BC}$ que pase por el punto *C*, figura 2.66.

Para encontrar el punto *D*, se puede realizar de dos formas diferentes: con la herramienta Circunferencia (centro, radio) o Recta perpendicular, luego desactivar las figuras geométricas ya sean rectas o circunferencia.

6. Activar la herramienta segmento y trazar los segmentos $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$, figura 2.67.
7. Activar la herramienta polígono para rellenar el rectángulo *ABCD*, figura 2.68.
8. Ocultar los ejes de coordenadas en la Vista Gráficas 3D, dar clic en la herramienta Mostrar/ocultar los ejes, como indica la flecha de color rojo.
9. Activar la herramienta Pirámide o cono desde su base y construir la pirámide de base rectangular y altura 5 u, de la forma siguiente:
   - Dar clic en herramienta Pirámide o cono desde su base Pirámide o cono desde su base.
   - Dar clic en el rectángulo que se encuentra en la Vista Gráficas 3D.

- Introducir el valor numérico de la altura en el cuadro de diálogo que se muestra simultáneamente en la pantalla e inmediatamente aparece en la Vista Gráfica 3D la pirámide *ABCDE*, figura 2.69.

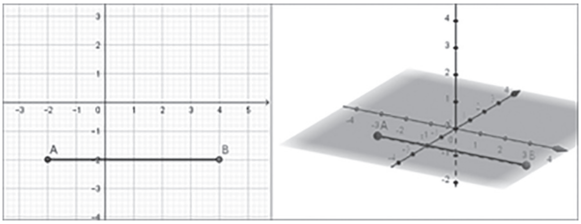


Figura 2.63

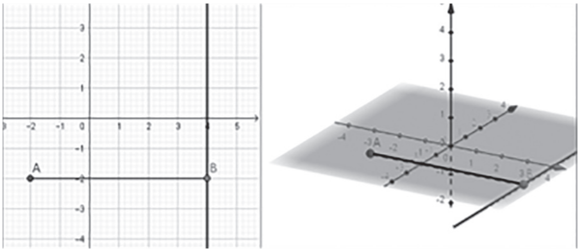


Figura 2.64

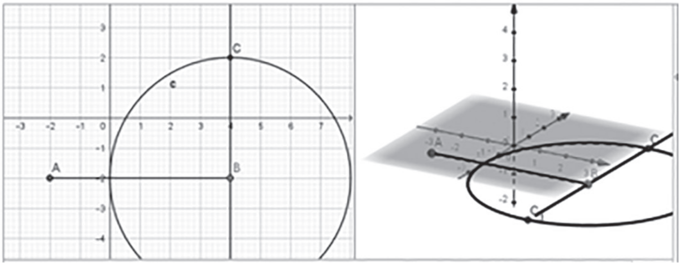


Figura 2.65

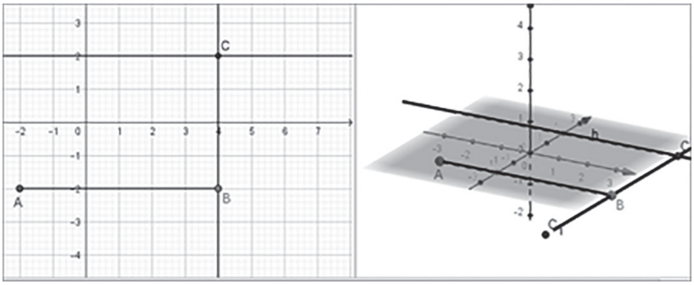


Figura 2.66

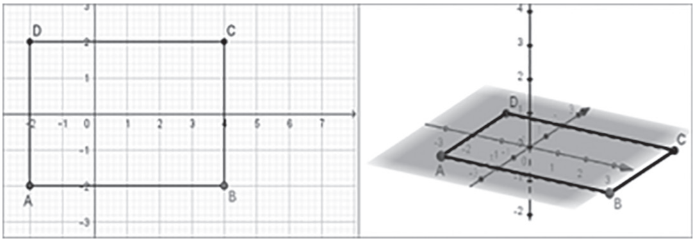


Figura 2.67

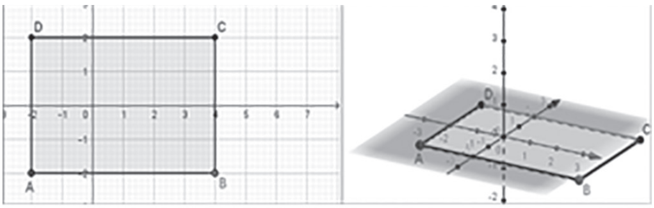


Figura 2.68

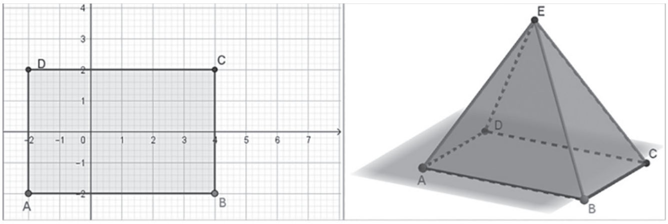


Figura 2.69

En la parte superior de la Vista Gráficas 3D, encuentran varios comandos que se pueden utilizar para:

- Rotar la vista.
- Vistas frontales.
- Proyección paralela.
- Proyección en perspectiva, entre otras.

Para fijar el conocimiento se realizará el ejercicio cuatro del epígrafe 2.4.1, para desarrollar las habilidades de cálculo a partir de la representación perspectiva caballera se pueden realizar ejercicios donde se calculen algunos de los elementos de estos dos cuerpos geométricos para consolidar el cálculo de áreas de figuras planas que sirven de aseguramiento del nivel de partida para la próxima temática. Es importante que el docente tenga en cuenta el diagnóstico de sus educandos.

Propuesta de ejercicios para las cinco clases de la subtemática:

1. En la figura 2.70 se representa un prisma recto de base el triángulo equilátero de 15 cm de perímetro. La altura del prisma es 3,0 cm mayor que las aristas de la base.

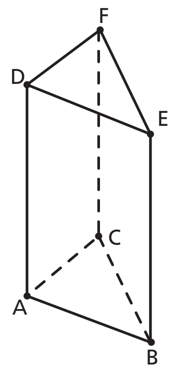
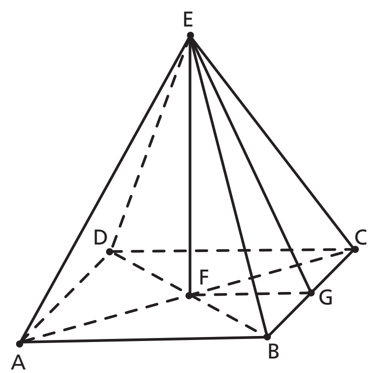


Figura 2.70

a) Calcula la longitud de las aristas de la base y de las laterales.
b) ¿Qué figuras geométricas forman sus caras laterales y cómo son estas entre sí? Justifica tu respuesta.
c) Calcula el perímetro de una de las caras laterales.

2. En la figura 2.71 se representa una pirámide recta cuya base es un rectángulo. La altura de la pirámide es igual a 8,0 cm y la de una de sus caras laterales mide 10 cm.

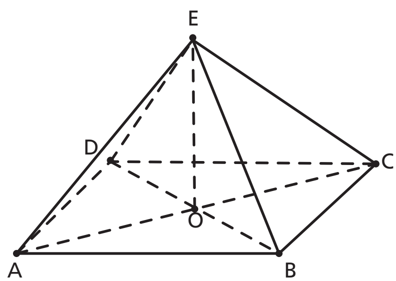


Figuras 2.71

a) Calcula las longitudes de las aristas de la base si se conoce que el ancho del rectángulo es 4,0 cm menor que su largo.

b) ¿Qué figuras geométricas forman sus caras laterales y cómo son estas entre sí? Justifica tu respuesta.
c) Calcula el área de una de las caras laterales de la pirámide.
d) ¿Cuánto miden las aristas laterales de la pirámide?

3. En la figura 2.72 se muestra una pirámide recta de base cuadrada. La cara *ABE* es un triángulo equilátero.



Figuras 2.72

a) Clasifica el triángulo *BCE* según sus lados.
b) Si el área de la base es igual a $A = 64 cm^2$. Calcula la longitud de las aristas de la base.
c) Calcula el perímetro del triángulo *BCE*.

Determinación del área lateral y total mediante sus desarrollos. Ecuaciones que expresan estas áreas. Determinación de las ecuaciones para calcular el volumen de estos cuerpos. Aplicación a la resolución de ejercicios y problemas que conduzcan al análisis de estos cuerpos

Los contenidos de esta subtemática aparecen en el capítulo dos, epígrafe 2.4, subepígrafes del 2.4.2 al 2.4.4 del LT de octavo grado y para su desarrollo se proponen 15 horas-clase.

El centro de esta subtemática está en los conceptos de área lateral, área total y volumen, tanto para el **prisma** como para la **pirámide**. Siguiendo la misma idea planteada en la subtemática anterior, se comenzará estudiando el prisma y después, por analogía, se realizará el tratamiento de estos nuevos conceptos para el caso de la pirámide, considerando que desde la Educación Primaria los educandos conocen el área total y el volumen del cubo y del ortoedro pueden apoyarse en las ecuaciones estudiadas para destacar los elementos que en estas intervienen.

2.4.2 Cálculo de áreas de prismas y pirámides

Se sugiere iniciar la primera clase referida al cálculo de áreas de prismas y pirámides una situación problémica como la sugerida en el texto u otra similar en la sección: "Reflexiona un instante", donde el educando primero identifique los cuerpos geométricos que forman la figura propuesta y la necesidad de calcular su área. El docente debe destacar que la figura tiene caras laterales y bases, por tanto, debe sumar dichas áreas, y de esa manera motivar el tratamiento de la temática, para encontrar el área total y lateral del prisma y la pirámide. Resulta muy útil el desarrollo de un cuerpo para calcular su área, se recomienda realizar los ejemplos uno y dos del epígrafe 2.4.2 para determinar el área lateral de una pirámide y un prisma; este análisis debe ser guiado por el docente en elaboración conjunta.

Para asegurar el tratamiento de la obtención de las ecuaciones para el cálculo de las áreas laterales y totales de los prismas y pirámides se deben sistematizar las definiciones de prisma y pirámide desde una tarea extraclase anterior o preguntas orales que se realicen de acuerdo a diferentes cuerpos geométricos de estos tipos, donde se consideren sus elementos característicos para posteriormente pasar a la elaboración de los conceptos de área lateral y total de estos cuerpos, con ejemplos de la práctica en que se requiere operar con estos conceptos.

Entre los ejemplos de la vida se pueden citar:

- Valoración del rendimiento de una cantidad de lona dada para construir un número determinado de casas de campaña.
- Estimación de la cantidad de casas de campaña que se pueden instalar en un área de acampada específica bajo condiciones de distribución en el terreno señaladas de antemano.
- Estimación de la cantidad de pioneros que puedan dormir en una de las casas de campaña bajo las normas ambientales necesarias.
- La construcción del tapado en la protección del tabaco (para garantizar capas de calidad), considerando las premisas y

exigencias geométricas para esto y el gasto de tela por hectárea sembrada.

Posteriormente el docente puede indicar la realización de esbozos de los objetos mencionados tomando en cuenta las propiedades de los polígonos que determinan a estos objetos y normas de trazado por construcciones básicas, como la perspectiva caballera. Se sugiere comenzar con el caso del prisma por lo que el ejemplo de la construcción del tapado en la protección del tabaco es muy conveniente, pues este es un modelo de un prisma recto de base cuadrada o rectangular como otra posibilidad diferente a la mostrada en el libro de texto.

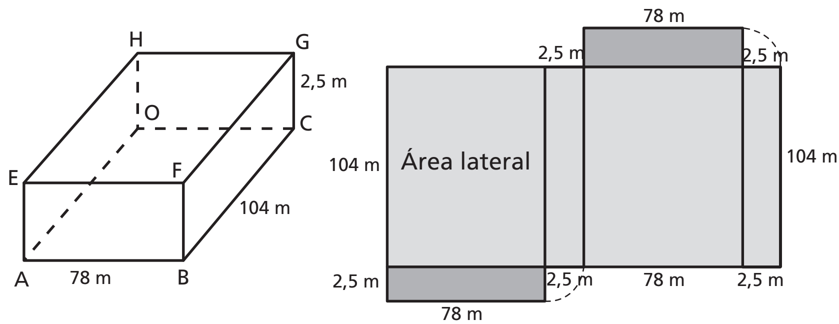


Figura 2.73

Otras posibilidades para la comprensión de la ecuación del cálculo de áreas de prisma puede ser el ejemplo, de la cantidad de material para el tapado del tabaco que se representa en perspectiva caballera el cuerpo geométrico (prisma) y su desarrollo como aparece en la figura 2.73.

Es muy importante que el educando comprenda el significado de los conceptos de área lateral y de área total de un prisma, aunque posteriormente los memorice. Es una tendencia en los educandos pasar directamente a la memorización sin comprender el significado de los conceptos. Si se comprende correctamente el significado de área lateral y de área total de un prisma, se garantizará la comprensión de estos conceptos para los restantes cuerpos geométricos básicos.

Para encontrar la ecuación para calcular el área total de un prisma y de una pirámide se recomienda analizar los ejemplos tres, cuatro y cinco del subepígrafe 2.4.2 de manera análoga al procedimiento realizado para el área lateral.

El ejemplo siete no se debe dejar de analizar para determinar el cálculo del área lateral de un prisma recto cuya base es un rombo donde se aplica el teorema de Pitágoras.

Para la fijación de la habilidad de cálculo de áreas laterales y totales de los cuerpos geométricos estudiados se realizarán los ejercicios del uno al 11 del subepígrafe 2.4.2. Los ejercicios del uno al cinco, el ocho y nueve, se utilizan para fijar los conocimientos sobre cálculo del área lateral y total del prisma y la pirámide.

Los ejercicios seis y siete son de aplicación para el desarrollo de habilidades en el despeje de ecuaciones.

Los ejercicios diez y 11 requieren de una mayor comprensión porque el educando debe analizar detalladamente los datos y relacionar las ecuaciones estudiadas.

2.4.3 Volumen del prisma

Para el tratamiento de la subtemática que aparece en el subepígrafe 2.4.3 del libro de texto referida al cálculo **del volumen de un prisma** se recomienda iniciar con la sección: "Investiga y aprende" de dicho epígrafe para motivar la clase y seguidamente recordar las ecuaciones estudiadas en séptimo grado para el cálculo del volumen de un cubo y un ortoedro con el análisis del proceder que aparece en el libro de texto y en los ejemplos uno y dos de este subepígrafe.

Análogamente el docente puede inducir a los educandos a obtener la ecuación del volumen de otros prismas con diferentes bases, como los siguientes:

Si la base del prisma es un triángulo, entonces se puede obtener

$$V_p = A_{\Delta} \cdot h$$

De manera similar, si la base del prisma es un triángulo no rectángulo, se puede trazar un plano que contenga las alturas relativas a uno de los lados de las bases del prisma, y que sea paralelo a las aristas laterales, reduciéndose este caso al anterior y del que se obtiene finalmente.

$$V_{\text{Prisma}} = A_{\text{B}} \cdot h$$

Obsérvese que los triángulos *AGC* y *CGB* son rectángulos en *G*, figura 2.74.

$$V_{Prisma\ ABCDEF} = A_{AGC} \cdot h + A_{CGB} \cdot h = \left(A_{AGC} + A_{CGB}\right) \cdot h$$
$$V_{Prisma\ ABCDEF} = A_{ABC} \cdot h = A_{Base} \cdot h$$

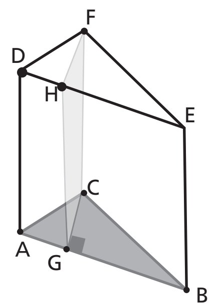


Figura 2.74

De estos análisis se puede inducir que el volumen de un prisma se calcula multiplicando el área de la base del prisma por su altura.

Se puede analizar con los educandos ejemplos similares al uno, dos y tres del subepígrafe 2.4.3.

2.4.4 Volumen de la pirámide

Para el tratamiento de este subepígrafe se propone seguir el procedimiento experimental que se describe en la sección: "Aplica tus conocimientos" de este subepígrafe. Después se pueden analizar con los educandos ejemplos similares al uno, dos y tres de este subepígrafe.

Se aprovecharán las posibilidades que brinda este contenido para trabajar con el cálculo de magnitudes utilizando el Sistema Internacional de Unidades y las conversiones de unas medidas a otras.

Para la ejercitación de esta subtemática (volumen de prismas y pirámides) se proponen las actividades siguientes:

- Los ejercicios del uno al ocho del epígrafe 2.4.3, para fijar los conocimientos sobre cálculo del volumen del prisma.
- El ejercicio nueve del epígrafe 2.4.3, requiere una mayor comprensión y algunas habilidades en probabilidades, se recomienda emplearlo con educandos para la preparación de los concursos de conocimiento.
- Los ejercicios del uno al diez del epígrafe 2.4.4 para fijar los conocimientos sobre cálculo del volumen de la pirámide.
- Los ejercicios del **capítulo** integran y generalizan los conocimientos de la unidad. Se pueden resolver en los diferentes sistemas de clases o en la sistematización, ejercitación o consolidación al final de la unidad.
- En el ejercicio uno se aplican las relaciones de los ángulos interiores de un polígono.
- Los ejercicios dos, tres y 15 son de construcciones geométricas, relacionadas con polígonos inscritos y circunscritos y se pueden emplear en el sistema de clases del epígrafe 2.2.1.
- Los ejercicios cuatro, 16 y 17, son de cálculo de amplitudes de ángulos y arcos en la circunferencia.
- Los ejercicios cinco, seis, diez, 11 y 12, aplican el cálculo de longitud de una circunferencia y el área de un círculo.
- Los ejercicios siete, ocho y nueve se refieren a la formulación de problemas.
- Los ejercicios 13 y 14 sistematizan los conocimientos adquiridos en toda la unidad, referidos a definiciones y teoremas estudiados.
- Los ejercicios del 18 al 25 son demostraciones de igualdad de figuras geométricas, en los que se deben aplicar los criterios de igualdad de triángulos, que se pueden resolver en el sistema de clases del epígrafe 2.3.3.
- Los ejercicios 26, 27,28 y 31 son situaciones prácticas que se resuelven con el cálculo de área de prismas o pirámides y se pueden resolver en el sistema de clases del epígrafe 2.4.2.
- En los ejercicios 29, 30, 32 y 33 se resuelven situaciones de la vida práctica con el cálculo del volumen de prismas o pirámides y se pueden emplear en las clases correspondientes al epígrafe 2.4.3.

Vocabulario

El vocabulario que le presentamos a continuación contiene las palabras más utilizadas en esta unidad, en las cuales los educandos tienen tendencia a escribirlas con faltas de ortografía, por lo que se requiere una labor atenta del docente con este vocabulario en las diferentes actividades que programe (dictados, buscar en el diccionario el significado común y compararlo con el significado matemático).

geométricos
magnitudes
prismas
pirámides
trazado
perspectiva caballera
esbozar
volumen
área
estimación

UNIDAD 3 VARIABLES, ECUACIONES Y FUNCIONES

Esta es la última unidad del programa, en esta se sistematizan los conocimientos y habilidades adquiridos en la unidad tres "Trabajo con variables" de séptimo grado tales como: traducción del lenguaje común al algebraico y viceversa, término, valor numérico, monomio, polinomio, expresión algebraica y resolución de ecuaciones lineales.

Además, se profundiza en las operaciones con monomios y polinomios estudiadas en el séptimo grado y se comienza el tratamiento del contenido relacionado con la eliminación e introducción de paréntesis y otros signos de agrupación, la multiplicación de binomios y la división de polinomios por un binomio.

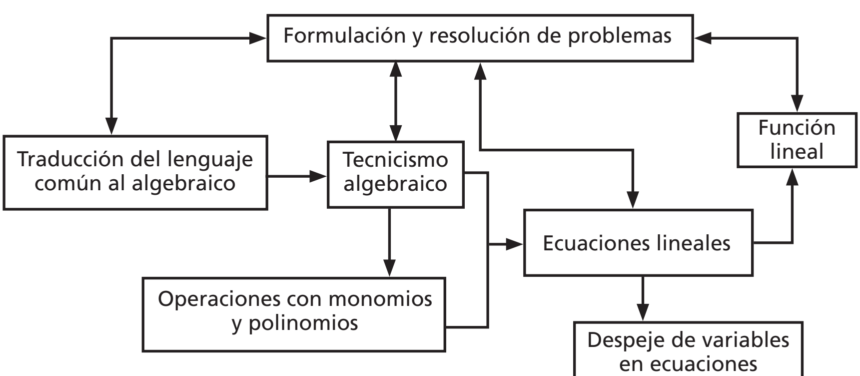
Se sistematiza el concepto de ecuación lineal, solución de la ecuación, conjunto solución, ecuaciones equivalentes y transformaciones equivalentes. Se profundiza en el procedimiento de resolución, esto significa que se resuelven ecuaciones de la forma: $ax = b\left(a \neq 0\right)$, $ax + b = c\left(a \neq 0\right)$, $ax + bx = c\left(a \neq 0 \, y \, b \neq 0\right)$ y $ax + b = cx + d\left(a \neq 0 \, y \, c \neq 0\right)$ con *a*, *b*, *c* y *d* números racionales, en las que tienen que eliminar signos de agrupación, efectuar las operaciones indicadas con polinomios, reducir términos semejantes, agrupar los términos semejantes en cada miembro de la ecuación (transponer términos de un miembro a otro de la ecuación), despejar la variable y calcular el valor de esta. También se trabaja en el despeje de variables en fórmulas.

Es esencial la comprensión del concepto de función como correspondencia y su relación con la dependencia funcional, así como el dominio del concepto de función lineal, sus propiedades y representación gráfica, para aplicar estos conocimientos en la interpretación de situaciones de la vida que se modelan mediante gráficos de funciones lineales definidas en subconjuntos de o funciones definidas por tramos de funciones lineales.

En la unidad se resuelven y formulan problemas relacionados con fenómenos y procesos de carácter político-ideológico, económico-social y científico-ambiental a nivel local, nacional, regional y mundial que permiten dar tratamiento a los componentes de la educación integral. Los educandos para la solución de los problemas requieren transferir y aplicar el sistema de conocimientos, habilidades y hábitos relacionados con las operaciones de los números reales, los procedimientos de resolución de ecuaciones lineales, la aplicación de propiedades y relaciones en las figuras geométricas y las funciones lineales.

Esta unidad responde a la *línea directriz relativa al conocimiento, habilidades y formas de pensamiento matemático, trabajo con variables, ecuaciones y sistemas de ecuaciones e inecuaciones.*

Estructura interna de la unidad



Esquema 3.1

De la estructura que se aprecia en el esquema 3.1 se derivan las unidades temáticas siguientes:
3.1 Traducción de situaciones de la vida al lenguaje algebraico.
3.2 Operaciones con monomios y polinomios.
3.3 Ecuaciones lineales y problemas.
3.4 La función lineal.

Lo esencial en esta unidad es la **resolución de problemas algebraicos** vinculados a la vida y de carácter político-ideológico, económico-social, y científico-ambientales donde para el logro de este propósito juegan un papel central los procedimientos para resolver ecuaciones lineales y el concepto de función lineal y sus propiedades.

Para lograr estos conocimientos es necesario que los educandos puedan:

- Traducir del lenguaje común al algebraico y viceversa situaciones de la vida cotidiana.
- Calcular el valor numérico de expresiones algebraicas en el dominio de los números reales.
- Realizar las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división de polinomios.
- Resolver operaciones combinadas con polinomios utilizando los signos de agrupación superpuestos.
- Resolver ecuaciones lineales aplicando los procedimientos algebraicos estudiados.
- Despejar fórmulas.
- Formular y resolver problemas que conducen al planteamiento de ecuaciones lineales.
- Construir ecuaciones lineales que satisfagan determinadas condiciones, por ejemplo, que tengan el conjunto solución que se indica.
- Identificar ecuaciones lineales equivalentes (reconociendo que no solo tienen el mismo conjunto solución, sino que tienen el mismo dominio de variación de las variables).
- Reconocer cuáles son las transformaciones equivalentes mediante las cuales se transforma una ecuación lineal en otra.

- Comprobar si determinados valores son solución de una ecuación lineal.
- Determinar parámetros de una ecuación lineal, conocidas algunas de sus propiedades.
- Representar puntos en un sistema de coordenadas rectangulares e identificar las coordenadas de puntos representados en este.
- Determinar si una correspondencia es una función.
- Representar las funciones utilizando sus diferentes formas.
- Identificar las funciones lineales que representan relaciones de proporcionalidad directa y analizar las propiedades que se cumplen.
- Reconocer que las funciones lineales (como clase) se definen por una ecuación de la forma $y = mx + n$ con m, n números reales, que su gráfico es una recta (en el caso que su dominio de definición sea) y saber el significado de los parámetros m y n.
- Determinar el dominio y la imagen de una función lineal definida sobre un subconjunto de R.
- Calcular valores funcionales de una función lineal.
- Determinar la ecuación de una función lineal dada su representación gráfica o dos puntos que pertenecen al gráfico de la función.
- Representar gráficamente una función lineal dada su ecuación o dos puntos que pertenecen al gráfico de la función.
- Calcular el cero de una función lineal y las coordenadas del punto donde su gráfica interseca al eje de las ordenadas.
- Calcular la pendiente de una recta conocidos dos puntos.
- Analizar el crecimiento de una función lineal.
- Interpretar situaciones de la vida que se modelan mediante gráficos de funciones lineales o funciones definidas por tramos en todo o en un subconjunto de este.
- Construir funciones que satisfacen determinadas condiciones (por ejemplo, que tenga la misma pendiente que otra y cuya gráfica interseque al eje de las ordenadas en un determinado punto; cuya pendiente tenga un valor determinado y pase por cierto punto).

3.1 TRADUCCIÓN DE SITUACIONES DE LA VIDA AL LENGUAJE ALGEBRAICO

Los contenidos correspondientes a esta unidad temática se tratarán en cuatro horas-clase y aparecen en el epígrafe 3.1 del capítulo tres “Variables, ecuaciones y funciones”, en el LT de octavo grado.

En el esquema 3.2 se puede apreciar la estructura interna de la unidad temática atendiendo a los conceptos, relaciones y procedimientos esenciales.

Conceptos	Relaciones	Procedimientos
Variable Término Expresión algebraica Valor numérico de una expresión algebraica Coeficiente de un término Parte literal de un término Monomio Binomio Polinomio		Traducir del lenguaje común al algebraico Traducir del lenguaje algebraico al común Calcular el valor numérico de una expresión
Grado de un monomio y de un polinomio	→	Cálculo del grado de un monomio y de un polinomio

Esquema 3.2

En esta unidad temática se comienza con una profundización y sistematización del tecnicismo algebraico abordado en la unidad dos “El lenguaje de las variables” de séptimo grado y con una ampliación del dominio de la variable al conjunto de los números reales.

La introducción del epígrafe se puede realizar de manera análoga a la que aparece en la sección: “Reflexiona un instante” del epígrafe 3.1 y seguidamente analizar el recuadro de la sección “Recuerda que...” del mismo epígrafe.

Se sugiere analizar con los educandos los ejemplos uno y dos del epígrafe 3.1 y resolver en las clases ejercicios como el uno, dos, tres y cuatro de este epígrafe.

Lo fundamental en la unidad temática es la traducción al lenguaje algebraico de situaciones dadas en el lenguaje común y la interpretación en el lenguaje común de situaciones dadas en el lenguaje algebraico, con la realización de ejercicios que contribuyen a preparar condiciones para la formulación y resolución de problemas.

En la sistematización de los conceptos de variable, término o monomio, expresión algebraica, polinomio y valor numérico se comienza con situaciones prácticas que se modelan con expresiones como la que sugiere la sección: "Aplica tus conocimientos" que aparece en el subepígrafe 3.1.1 y así se asegura lo planteado en la sección: "Recuerda que..." del mismo subepígrafe que son conceptos que el educando conoce desde el séptimo grado.

Para la introducción del concepto de **grado de un monomio,** se sugiere utilizar una situación similar a la expresada en la sección: "Investiga y aprende" del subepígrafe 3.1.1, seguidamente analizar la sección: "Atención" y el ejemplo uno para desarrollar habilidades en cómo identificar el grado de un monomio y después concluir el contenido con la sección: "Atención" que aparece debajo.

Para introducir el concepto de **polinomio** se podrá trabajar de manera análoga al procedimiento anterior con la situación que aparece en la sección*:* "Reflexiona un instante" del subepígrafe 3.1.1, a continuación, analizar el ejemplo dos y seguidamente enfatizar en la sección: "Atención" referido al grado de un polinomio.

Se debe orientar el estudio de la sección: "De la historia" para elevar la cultura general integral de los educandos y comprender la importancia del uso de las variables.

Se sugiere dedicar una hora clase a la sistematización de los conceptos de variable, término o monomio, expresión algebraica, polinomio y al concepto de grado de un monomio y un polinomio, en la que se resuelvan ejercicios como el siete, ocho, nueve y diez del subepígrafe 3.1.1.

El tratamiento de la sección: "Aplica tus conocimientos" del subepígrafe 3.1.1 permite sistematizar la definición de valor numérico y después analizar en la pizarra el ejemplo tres este epígrafe para fijar el procedimiento del cálculo del valor numérico. Se pueden utilizar ejercicios como el uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis del epígrafe 3.1.1. Deben aprovecharse las posibilidades que brinda el procedimiento del cálculo del valor numérico de una expresión algebraica para sistematizar el cálculo con números reales, sobre todo en aquellas operaciones en las que los educandos confrontan más dificultades, como son la multiplicación y división de expresiones decimales, el cálculo con fracciones y la regla de los signos.

3.2 OPERACIONES CON MONOMIOS Y POLINOMIOS

Los contenidos correspondientes a esta unidad temática se tratarán en 11 horas-clase y aparecen en el epígrafe 3.2 del capítulo tres "Variables, ecuaciones y funciones" en el LT de octavo grado. Esta unidad temática cuenta con tres subtemáticas:

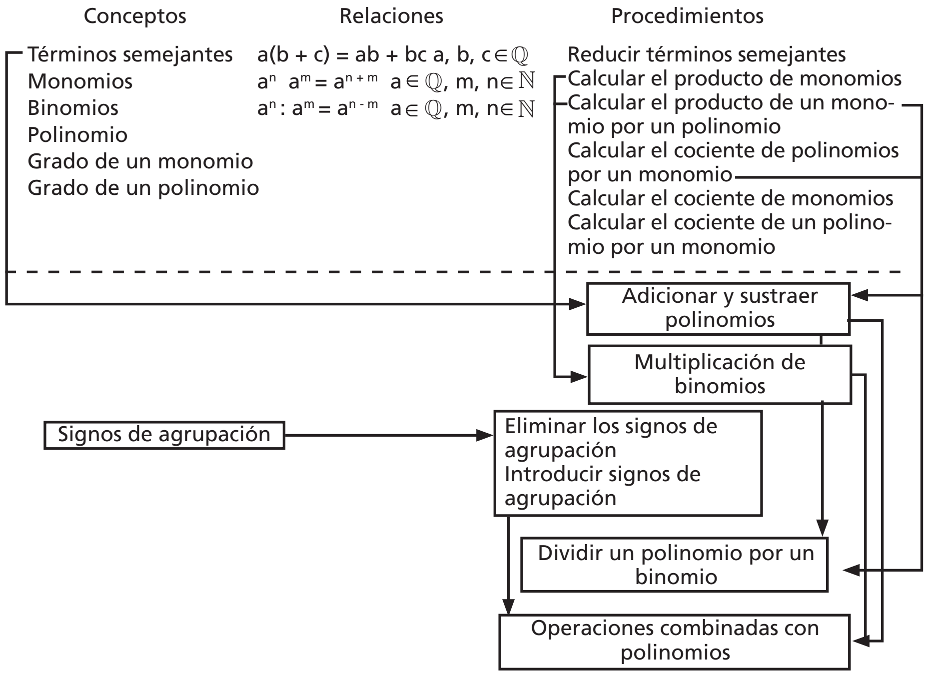
3.2.1 Adición y sustracción de polinomios. Eliminación e introducción de paréntesis.
3.2.2 Multiplicación de polinomios.
3.3.3 División de polinomios.

En esta unidad temática lo fundamental son los procedimientos algebraicos que se introducen con el propósito de emplearlos en la resolución de ecuaciones lineales y problemas que conducen a este tipo de ecuación, que además son precedentes del trabajo algebraico que realizarán en noveno grado y en la Educación Preuniversitaria.

En la selección de los ejercicios de esta temática se tendrá en cuenta aquellos que desarrollen habilidades para alcanzar el fin señalado anteriormente y no aquellos centrados en el cálculo algebraico por sí mismo.

En el esquema 3.3 se puede apreciar la estructura interna de la unidad temática atendiendo a los conceptos, relaciones y procedimientos esenciales.

Para iniciar la temática de las operaciones con monomios y polinomios se sugiere motivar la primera clase con una situación similar a la que aparece en la sección: "Investiga y aprende" del epígrafe 3.2 de manera que los educandos puedan vincular otras áreas de la matemática con el álgebra y se percaten de la necesidad de operar con expresiones algebraicas.



Esquema 3.3

3.2.1 Adición y sustracción de polinomios. Eliminación e introducción de paréntesis

Los contenidos de esta subtemática aparecen en el capítulo tres, epígrafe 3.2, subepígrafe 3.2.1 del LT de octavo grado y para su desarrollo se sugieren cuatro horas-clase.

Se sugiere que las cuatro horas clases se pueden distribuir de la manera siguiente: una clase a la introducción de la adición y sustracción de polinomios, una clase a la eliminación e introducción de signos de agrupación, otra a los signos superpuestos y una de ejercitación en la que se combinen los procedimientos estudiados.

Para iniciar el estudio de la **adición de polinomios** se pueden presentar a los educandos situaciones como la descrita en la sección: "Aplica tus conocimientos" del subepígrafe 3.2.1, seguidamente analizar la sección: "Recuerda que" para asegurar el nivel de partida con los conocimientos adquiridos en grados anteriores. Es importante analizar el ejemplo uno del subepígrafe 3.2.1 para recordar el procedimiento de reducción de términos semejantes estudiado en séptimo grado por los educandos, este permitirá la reactivación de este procedimiento y de conjunto con los educandos inducir que al adicionar dos polinomios se reducen términos semejantes.

Los docentes no pueden dejar de mostrar a los educandos las dos formas de proceder para calcular la adición de polinomios, por reducción de términos semejantes agrupándolos y en columnas ordenando los polinomios por su grado como se ilustra en la sección: "Reflexiona un instante" que aparece debajo del ejemplo dos. Es recomendable resolver en la pizarra este ejemplo para que procedan de la manera que les resulte más fácil.

Por ejemplo, para calcular $(2ab + c - 1) + (ab + 3c + 5)$ podemos proceder de una de las formas siguientes:

$$\begin{aligned} &(2ab + c - 1) + (ab + 3c + 5) \\ &= 2ab + c - 1 + ab + 3c + 5 \\ &= 3ab + 4c + 4 \end{aligned}$$

$$(2ab + c - 1) + (ab + 3c + 5)$$

$$\begin{array}{r} 2ab + c - 1 \\ + \quad ab + 3c + 5 \\ \hline 3ab + 4c + 4 \end{array}$$

Análogamente se tratará la **sustracción de polinomios**, resumiendo estos procedimientos como aparece en el ejemplo tres del subepígrafe 3.2.1.

Es muy importante que el docente antes de explicar el procedimiento para efectuar la sustracción de polinomios oriente la identificación en esta operación de sus términos, o sea, cuál es el minuendo y el sustraendo para que los educandos comprendan el proceder.

Por ejemplo, en la sustracción $(3x - 5a) - (x - a)$

$$\overbrace{(3x - 5a)}^{\text{Minuendo}} - \overbrace{(x - a)}^{\text{Sustraendo}}$$

Igualmente, se les explicará que para calcular el resultado de esta operación se puede colocar el minuendo y el sustraendo uno al lado del otro o se puede utilizar la forma en columna, para que el educando seleccione de qué manera le resulta más cómo trabajar.

Por ejemplo, para calcular $(2ab + c - 1) - (ab + 3c + 5)$ podemos proceder de una de las formas siguientes:

$$\begin{aligned} &(2ab + c - 1) - (ab + 3c + 5) \\ &= 2ab + c - 1 - ab - 3c - 5 \\ &= ab - 2c - 6 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 2ab + c - 1 \\ + \quad -ab - 3c - 5 \\ \hline ab - 2c - 6 \end{array}$$

Note que en cada forma al polinomio minuendo $(2ab + c - 1)$ se le adicionó el opuesto del sustraendo $(ab + 3c + 5)$, es decir, se le cambió el signo a cada uno de los términos del polinomio sustraendo y se efectuó la adición.

En el procedimiento de **eliminación de paréntesis** se sugiere partir de un problema que se modele por una ecuación lineal de la forma $ax + (bx - c) = d$ con $a \neq 0$ y $b \neq 0$, de manera tal que se les explique a los educandos que, para resolver determinados problemas, las expresiones algebraicas que se obtienen al traducir del lenguaje común al algebraico las relaciones que aparecen en el texto del problema, tienen términos entre paréntesis, precedidos por el signo más o por el signo menos.

Con los educandos se analizará que:

- Se utilizan paréntesis para diferenciar en la adición de polinomios, los sumandos y en la sustracción, el minuendo del sustraendo.
- Al efectuar la adición cada uno de los términos de cada sumando conservan su signo, mientras que en la sustracción los términos del sustraendo cambian su signo.

El docente debe resolver en la pizarra de manera conjunta con los educandos los ejemplos.

Para arribar a conjeturas y obtener el procedimiento para la eliminación de paréntesis se sugiere concluir la temática con la sección: "Atención" y resolver el ejemplo cuatro y cinco de este subepígrafe 3.2.1.

Es de vital significación que se oriente la lectura de la sección: "De la historia" y se analice su contenido para elevar la cultura general integral de los educandos y comprender la importancia del uso de los paréntesis.

Se les explicará a los educandos que la **introducción de paréntesis** se utiliza para agrupar determinados términos de una expresión algebraica, los que pueden estar precedidos del signo positivo o del signo negativo y es el proceso inverso a la eliminación de paréntesis proceder que se describe en la sección: "Atención" donde se ejemplifica, esto aparece después del ejemplo cinco del subepígrafe 3.2.1.

Es importante adiestrar a los educandos en la solución de ejercicios como el siguiente, en los que tienen que introducir paréntesis precedidos de signo negativo cuando tienen que sustituir por una expresión algebraica.

Ejercicio

Sean las expresiones algebraicas $A = 5m^3 + 2mn + 8$ y $B = 7mn - 2$. Calcula $A - B$.

Respuesta

$$\begin{aligned} A - B &= 5m^3 + 2mn + 8 - (7mn - 2) \\ &= 5m^3 + 2mn + 8 - 7mn + 2 \\ &= 5m^3 - 5mn + 10 \end{aligned}$$

En la presentación del trabajo con los **signos de agrupación superpuestos** se debe explicar que se refiere a las expresiones algebraicas que contienen varios signos de agrupación, incluidos unos dentro de otros. Por ejemplo, en la expresión $8a - 7 + \left[3a - \left(a - 2\right)\right]$ se encuentra dentro del corchete un paréntesis.

No se deben dejar de analizar las secciones: "Reflexiona un instante" referida a los diferentes signos de agrupación y "Atención" sobre los signos de agrupación superpuestos.

Aquí debe quedar claro a los educandos que la eliminación de signos de agrupación superpuestos puede hacerse de adentro hacia fuera o de afuera hacia adentro, aunque el más utilizado es el primero, pero en los dos casos debe explicarse que es más conveniente reducir los términos semejantes que se encuentran dentro del signo de agrupación, antes de eliminarlos.

Para simplificar la expresión $2x - \left\{ 3y + \left[4x - \left(x - 2y \right) \right] - y \right\}$ se puede proceder de la siguiente forma:

- Eliminando los signos de agrupación de adentro hacia afuera:

$2x - \left\{ 3y + \left[4x - \left(x - 2y \right) \right] - y \right\}$

$= 2x - \left\{ 3y + \left[4x - x + 2y \right] - y \right\}$ (Eliminación de paréntesis precedido de signo menos).

$= 2x - \left\{ 3y + \left[3x + 2y \right] - y \right\}$ (Reducción de términos semejantes dentro del corchete).

$= 2x - \left\{ 3y + 3x + 2y - y \right\}$ (Eliminación de corchete precedido de signo más).

$= 2x - \left\{ 4y + 3x \right\}$ (Reducción de términos semejantes dentro de la llave.)

$= 2x - 4y - 3x$ (Eliminación de paréntesis precedido de signo menos).

$= -x - 4y$ (Reducción de términos semejantes).

Eliminación de signos de agrupación de afuera hacia adentro:

$2x - \left\{ 3y + \left[4x - \left(x - 2y \right) \right] - y \right\}$

$= 2x - \left\{ 2y + \left[4x - \left(x - 2y \right) \right] \right\}$ (Reducción de términos semejantes dentro de la llave).

$= 2x - 2y - \left[4x - \left(x - 2y \right) \right]$ (Eliminación de signo de agrupación precedido de signo menos).

$= 2x - 2y - 4x + \left(x - 2y \right)$ (Eliminación de signo de agrupación precedido de signo menos).

$= 2x - 2y - 4x + x - 2y$ (Eliminación de signo de agrupación precedido de signo más).

$= -x - 4y$ (Reducción de términos semejantes).

Para fijar el procedimiento se analizarán los ejercicios de los ejemplos del seis al nueve de este mismo subepígrafe.

Si se resuelven ejercicios en que la orden sea simplificar una expresión algebraica, como el ejercicio tres del subepígrafe 3.2.1, es importante informar a los educandos que deben efectuar las operaciones indicadas y reducir términos semejantes, de forma tal que la expresión finalmente obtenida sea una suma algebraica de términos que no sean semejantes.

Se deben realizar los ejercicios del uno al siete del subepígrafe 3.2.1 para fijar las habilidades con la adición, sustracción de polinomios y la eliminación e introducción de signos de agrupación en expresiones algebraicas.

3. 2. 2 Multiplicación de polinomios

Los contenidos de esta subtemática aparecen en el capítulo tres, epígrafe 3.2, subepígrafe 3.2.2 del LT de octavo grado y para su desarrollo se sugieren tres horas-clase.

Para el tratamiento de esta subtemática se sugiere una clase para los ejercicios de la aplicación del procedimiento de la multiplicación de monomios y de monomios por un polinomio, otra clase para la multiplicación de dos binomios y la tercera de ejercitación en la que se resuelvan ejercicios que combinen las operaciones ya estudiadas.

Para el tratamiento de esta subtemática que se refiere a la multiplicación de polinomio, se sugiere como vía metodológica para el tratamiento de la multiplicación de polinomios utilizar la sección: "Aplica tus conocimientos" que aparece el subepígrafe 3.2.2.

Para reactivar la multiplicación de monomios y de monomios por un polinomio, que el educando ya conoce de séptimo grado, se realizará a través de la sección: "Recuerda que" del subepígrafe 3.2.2 y así se asegurará el nivel de partida para fijar estas habilidades con el análisis del ejemplo uno.

Presentar a los educandos un ejercicio en el que tengan que calcular la **multiplicación de dos binomios,** por ejemplo, $(n + 4)\ (2 + 3n)$.

$(n+ 4)\ (2 + 3n)$

$= n\ (2 + 3n) + 4(2 + 3n)$ — Al aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación resulta la multiplicación de un monomio por un binomio, que ya el educando sabe calcular.

$= 2n + 3n^2 + 8 + 12n$

Se efectúa la multiplicación del monomio por el binomio, aquí se aplica la propiedad del producto de potencias de igual base.

$= 3n^2 + 14n + 8$

Note que además de la reducción de términos semejantes se ordenó el polinomio en potencias decrecientes de la variable *n*.

Después de este ejemplo concluir con el procedimiento de **multiplicación de polinomios** que aparece en la sección: "Atención" del subepígrafe 3.2.2.

Es importante señalar que en todos los ejemplos resueltos del ejemplo dos del subepígrafe 3.2.2 no se realiza el ordenamiento del polinomio resultante de efectuar la multiplicación porque todos los polinomios factores están ordenados en potencias decrecientes de la variable, lo que no necesariamente siempre se presenta así, por lo que se debe explicar a los educandos que el polinomio de la respuesta final se debe ordenar en potencias decrecientes de la variable en el caso que el polinomio solo tenga una variable y si tiene más de una variable, se selecciona con respecto a qué variable se va a ordenar.

Por ejemplo, el ejercicio uno inciso l) del subepígrafe 3.2.2.

$(2q - r)\,(q^2r - 2r^3)$

$= (2q - r)\,(q^2 - 2r^3)$

$= 2q^3 - 4qr^3 - rq^2 + 2r^4$

Observe que en este caso no hay términos semejantes.

$= 2q^3 - rq^2 - 4qr^3 + 2r^4$

Aquí se ordenó el polinomio por potencias decrecientes de la variable *q* o se puede ordenar por potencias decrecientes de la variable r y en este caso la respuesta sería $2r^4 - 4qr^3 - rq^2 + 2q^3$.

Además, en clase se debe resolver un ejercicio como el ejemplo dos, inciso f) del subepígrafe 3.2.2 en que los polinomios factores tienen más de dos términos para mostrarle a los educandos cómo se efectúa la multiplicación de polinomios colocando los factores en columna.

Por ejemplo, el ejercicio uno inciso q) del subepígrafe 3.2.2.

$\begin{array}{r} c^2d^2 - 2cd + 5 \\ 2d^2c + 1 \\ \hline \end{array}$	Se coloca debajo el factor de menos términos porque racionaliza el cálculo.
$\begin{array}{l} \quad c^2d^2 - 2cd + 5 \\ \qquad\quad 2d^2c + 1 \\ \hline 3c^3d^4 - 4c^2d^3 + 10cd \end{array}$	Se coloca debajo de la raya el resultado de multiplicar el monomio $2d^2c$ por cada uno de los términos del polinomio $c^2d^2 - 2cd + 5$.
$\begin{array}{l} \quad c^2d^2 - 2cd + 5 \\ \qquad\quad 2d^2c + 1 \\ \hline 3c^3d^4 - 4c^2d^3 + 10cd \\ \qquad\qquad\qquad - 2dc + c^2d^2 + 5 \end{array}$	Observe que los términos del polinomio resultante de multiplicar el término 1 por cada uno de los términos del polinomio $c^2d^2 - 2cd + 5$ se ubican convenientemente debajo de los términos que son semejantes para facilitar el resultado final.
$\begin{array}{l} \quad c^2d^2 - 2cd + 5 \\ \qquad\quad 2d^2c + 1 \\ \hline 2c^3d^4 - 4c^2d^3 + 10cd \\ \qquad\qquad\qquad - 2dc + c^2d^2 + 5 \\ \hline 2c^3d^4 - 4c^2d^3 + 8cd + c^2d^2 + 5 \end{array}$	Se reducen términos semejantes.
$2c^3d^4 - 4c^2d^3 + c^2d^2 + 8dc + 5$	Se ordenan los términos del polinomio en potencias decrecientes en este caso de la variable *d*.

Se reitera que se trata de presentar a los educandos las diferentes formas en que pueden realizar el cálculo de estas operaciones, pero que cada cual decidirá la que considere más apropiada o ventajosa para él.

3.2.3 División de polinomios

Para el desarrollo de los contenidos de la subtemática referida a la división **de polinomios** se sugieren cuatro horas-clase.

Se inicia la subtemática con la reactivación de la división de monomios y polinomios por un monomio que aparece en la sección: "Recuerda que..." del subepígrafe 3.2.3, utilizando ejercicios como los del ejemplo uno del subepígrafe 3.2.3, para el cual es necesario previamente retomar la propiedad del cociente de potencias de igual base.

Es importante, antes de introducir la **división de un polinomio por un binomio**, recordar el procedimiento de la división de números naturales mediante una situación como la que aparece en la sección: "Reflexiona un instante" del subepígrafe 3.2.3, para que el educando identifique el dividendo, divisor, cociente y resto en la división y la relación existente entre estos: "el dividendo es igual al producto del cociente por el divisor más el resto". Esta conclusión aparece en la sección "Recuerda que..." en este subepígrafe.

Por ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 23 & 7 \\ \cline{2-2} \underline{-21} & 3 \\ 2 & \end{array}$$

Aquí 23 es el dividendo, 7 el divisor, 3 el cociente y 2 el resto. Note que $23 = 3 \cdot 7 + 2$.

Igualmente se debe recordar a los educandos que cuando el resto final en la división es cero se dice que la división es exacta y que cuando es distinto de cero se dice que es inexacta y que siempre los restos parciales son menores que el divisor.

En la división de un polinomio por un binomio debe explicar a los educandos que se procede como en la división de números naturales, explicación que aparece en el libro de texto después de la sección: “Recuerda que...”, donde con un ejemplo detallado se describe el procedimiento. Es importante que los educandos comprendan que el procedimiento termina cuando se obtiene un resto con grado menor que el divisor, por lo tanto, como el divisor es un binomio de la forma $ax + b$ ($a \neq 0$, a, $b \in \mathbb{R}$) que tiene grado uno, el resto necesariamente tiene que ser un polinomio de grado cero, es decir, un número.

Ejemplo: Efectuar la división del polinomio $5a^2 + a - 3$ por el binomio $a - 3$.

1.^{er} paso	$5a^2 + a - 3 \;\lfloor \underline{a - 3}$	En este caso no hay que ordenar los polinomios porque ambos están ordenados en potencias decrecientes de la variable a.
2.^{o} paso	$5a^2 + a - 3 \;\lfloor \underline{a - 3}$ $5a$	Al dividir el primer término del dividendo $5a^2$ por a, primer término del dividendo, se obtiene $\frac{5a^2}{a} = 5a$, que es el primer término del cociente.
3.^{er} paso	$5a^2 + a - 3 \;\lfloor \underline{a - 3}$ $\underline{-5a + 15a} \quad 5a$ $16a - 3$	Se calcula el producto de $5a$ por el divisor $(a - 3)$ y se obtiene $5a\,(a - 3) = 5a^2 - 15a$ y se le resta al dividendo este producto. Insistir al educando que como se le resta al dividendo este producto, lo que se coloca debajo del dividendo es $-(5a^2 - 15a)$ que es igual $a - 5a^2 + 15a$.
4.^{o} paso	$5a^2 + a - 3 \;\lfloor \underline{a - 3}$ $\underline{-5a + 15a} \quad 5a$ $16a - 3$	Como el resto $16a - 3$ tiene el mismo grado que el divisor repetimos el paso dos, siendo ahora el resto el nuevo dividendo o dividendo parcial.

Repitiendo 2.º paso	$\begin{array}{l\|l} 5a^2 + a - 3 & a - 3 \\ \hline -5a + 15a & 5a \\ \hline \quad 16a - 3 & \end{array}$	Al dividir 16a, primer término del nuevo dividendo, por a, primer término del divisor se obtiene $\frac{16a}{a} = 16$, que es el segundo término del cociente.
Repitiendo 3.er paso	$\begin{array}{l\|l} 5a^2 + a - 3 & a - 3 \\ \hline -5a + 15a & 5a \\ \hline \quad 16a - 3 & \\ \quad -16a + 48 & \\ \hline \qquad 45 & \end{array}$	Se calcula el producto de 16 por el divisor (a – 3) y se obtiene 16(a – 3) = 16a – 48 y se le resta al nuevo dividendo (dividendo parcial) este producto.
5.º paso		Como el resto es un número y es por tanto un polinomio de grado cero, o sea, un polinomio de grado menor que el grado del divisor, se terminó el procedimiento de la división.

Note que aquí el cociente es 5a + 16, el resto es 45, y el resultado de la división es correcto, pues el producto del cociente por el divisor, más el resto es igual al dividendo:

$$(5a + 16)\,(a - 3) + 45$$
$$= 5a^2 + 16a - 15a - 48 + 45$$
$$= 5a^2 + a - 3$$

Para efectuar la división de polinomios el grado del polinomio dividendo debe ser mayor o igual que el grado del polinomio divisor, pues en caso contrario los exponentes de la variable en el cociente serían negativos, por lo que el cociente no resultaría un polinomio.

En la fijación de este procedimiento se deben poner ejemplos de divisiones exactas e inexactas, como en el ejemplo dos del subepígrafe 3.2.2 e insistir en que una vía para comprobar que la división se efectuó correctamente es verificar que el dividendo es igual al producto del cociente por el divisor más el resto.

A los educandos se les informará que, si al dividir un polinomio por un binomio el resto es cero, se dice que el polinomio es divisible por el binomio o que el binomio es un divisor del polinomio.

En la sección: "De la historia" se puede apreciar que la división por galera es un proceder muy antiguo y es recomendable que los educandos lean su argumentación para aumentar su cultura general integral.

De las cuatro horas-clase se sugiere dedicar una clase a la división de monomios y polinomios por un monomio en la que se realizarán ejercicios como el uno del epígrafe 3.2.3, una clase para el procedimiento de la división de un polinomio por un binomio en la que se realizarán ejercicios para la fijación como el dos de este mismo epígrafe y una clase para la ejercitación de este procedimiento en la que se realizarán ejercicios de aplicación como tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y nueve también de este epígrafe.

La cuarta clase se propone dedicarla a la realización de ejercicios en los que se combinen todas las operaciones estudiadas con polinomios, la sección: "¿Sabías que...?" permite comenzar esta clase, donde los educandos se informarán sobre la similitud del proceder de operaciones combinadas con números racionales y el de operaciones con polinomios. El análisis de los ejemplos tres, cuatro y cinco permitirá que los educandos realicen varias operaciones con polinomios en una misma actividad manteniendo el orden operacional, de manera que apliquen procederes estudiados como el de la eliminación de signos de agrupación y las operaciones con polinomios, además del cálculo del valor numérico. En esta clase se pueden resolver ejercicios como el tres y del diez al 13 del epígrafe 3.2.3.

Se propone la solución del ejercicio diez para que se discuta con los educandos:

Sean los polinomios

$$M = 2x^3 + 3x^2 - 32x + 15,\ P = 3x^2 - 7x + 8,\ N = 2x - 1$$

Halla:

a) $M: N + P$

$= (2x^3 + 3x^2 - 32x + 15) : (2x - 1) + 3x^2 - 7x + 8$

$= x^2 + 2x - 15 + 3x^2 - 7x + 8$

$= 4x^2 - 5x - 7$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & +3x^2 & -32x & +15 & 2x-1 \\ \hline -2x^3 & +x^2 & & & x^2+2x-15 \\ \hline & 4x^2 & -32x & +15 & \\ & -4x^2 & +2x & & \\ \hline & & -30x & +15 & \\ & & 30x & +15 & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

b) $(M - N) - P$

$= [\ (2x^3 + 3x^2 - 32x + 15) - (2x - 1)\ ] - (3x^2 - 7x + 8)$

$= 2x^3 + 3x^2 - 32x + 15 - 2x + 1 - 3x^2 + 7x - 8$

$= 2x^3 - 27x + 8$

c) $N \cdot P - M = (2x - 1)(3x^2 - 7x + 8) - (2x^3 + 3x^2 - 32x + 15)$

$= 6x^3 - 17x^2 + 23x - 8 - (2x^3 + 3x^2 - 32x + 15)$

$= 6x^3 - 17x^2 + 23x - 8 - 2x^3 - 3x^2 + 32x - 15$

$= 4x^3 - 20x^2 + 55x - 23$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 7x + 8 \\ 2x - 1 \\ \hline 6x^3 - 14x + 16x \\ -3x^2 + 7x - 8 \\ \hline 6x^3 - 17x^2 + 23x - 8 \end{array}$$

d) $N^2 - P = (2x - 1)^2 - (3x^2 - 7x + 8)$

$= (2x - 1)(2x - 1) - (3x^2 - 7x + 8)$

$= 4x^2 - 2x - 2x + 1 - (3x^2 - 7x + 8)$

$= 4x^2 - 4x + 1 - (3x^2 - 7x + 8)$

$= 4x^2 - 4x + 1 - 3x^2 + 7x - 8$

$= x^2 + 3x - 7$

e) $M - N \cdot P = \left(2x^3 + 3x^2 - 32x + 15\right) - \left(2x - 1\right) \cdot \left(3x^2 - 7x + 8\right)$

$= \left(2x^3 + 3x^2 - 32x + 15\right) - \left(6x^3 - 17x^2 + 23x - 8\right)$

$= 2x^3 + 3x^2 - 32x + 15 - 6x^3 + 17x^2 - 23x + 8$

$= -4x^3 + 20x^2 - 55x + 23$

Propuesta de ejercicios que se pueden incorporar a las clases de consolidación en los que se integran todos los procedimientos estudiados.

1. Sean $P = \frac{1}{4}c^2 - 3$; $Q = 2c^2 - 5$ y $R = 2c + 3$

a) Calcula $4P - Q$.
b) Calcula el valor numérico de R para $c = 0{,}5$.
c) ¿A qué dominio numérico más restringido pertenece el valor de R?

2. Sean $M = x - 2$; $N = 2x - 5$ y $P = 4x + 2$

a) Sustituye y calcula $P - M + 3N$.
b) Calcula el valor numérico de la expresión N para $x = \frac{1}{4}$.

3. Sean las expresiones algebraicas:

$A = 7x - 1$; $B = 3x + 7$ y $C = 19x^2 + 45x - 7$.

3.1 Calcula: $A \cdot B - C$

3.2 Marca con una cruz la respuesta correcta.

El conjunto numérico al que pertenece el resultado de calcular el valor numérico de la expresión A para $x = -\frac{1}{7}$ es:

____ $\mathbb{N}$ ____ $\mathbb{Q}_+$ ____ $\mathbb{Z}$ ____ $\mathbb{R}$

4. Sean las expresiones algebraicas:

$M = 4a$; $N = 2a - b$; $P = 6a^2 - 3ab$

a) Halla $T = M \cdot N - P$.
b) Calcula el valor numérico de la expresión T, para $a = \frac{1}{2}$ y $b = -1$.

5. Sean las expresiones algebraicas:

$A = 3p^2 + 2p + 6$, $B = 8p^2 - 2$ y $C = p + 3$

5.1 Calcula $A + B \cdot C$

5.2 Comprueba que para $p = -\frac{1}{2}$ se cumple que $B = 0$.

6. Sean: $A = 6m^2 + 2n$; $B = 3m^2 - n$; $C = 4m^4 + n^2$

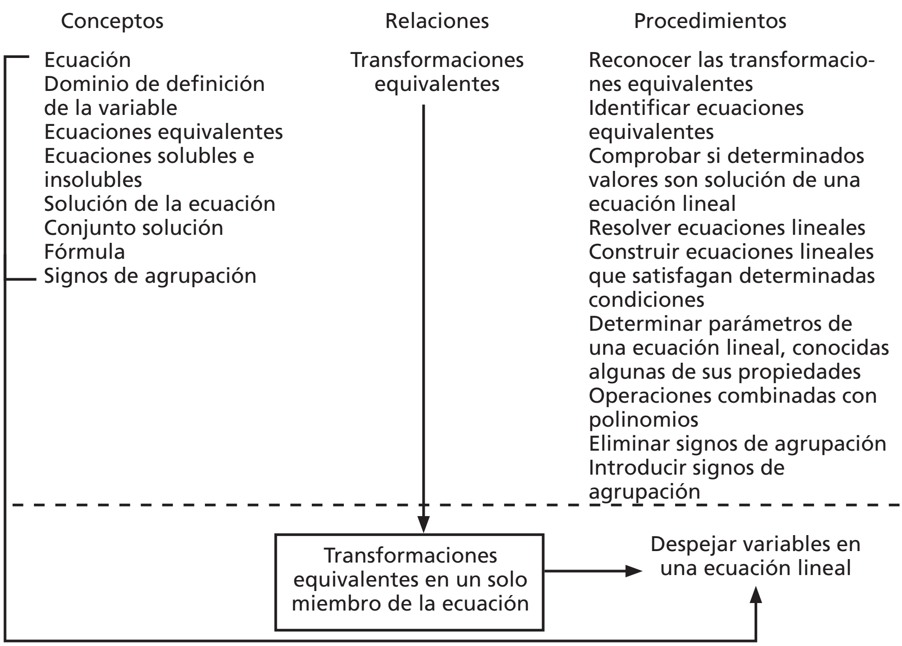
a) Simplifica $A \cdot B - 2C$.

b) Calcula el valor numérico de B para $x = -\frac{1}{3},\ y = -2{,}5$.

3.3 PROFUNDIZACIÓN SOBRE LAS ECUACIONES LINEALES

Los contenidos correspondientes a esta unidad temática se tratarán en 15 horas-clase y aparecen en el epígrafe 3.3 del capítulo tres “Variables, ecuaciones y funciones”, en el LT octavo grado.

En el esquema 3.4 que se muestra a continuación se puede observar la estructura interna de esta unidad temática, atendiendo a los conceptos, relaciones y procedimientos esenciales que en ella se abordan.



Esquema 3.4

Para el tratamiento de las ecuaciones lineales se partirá del planteamiento de un problema como el que aparece en la sección: “Aplica tus conocimientos” del epígrafe 3.3. Para la primera clase se propone que, de la ecuación obtenida en la búsqueda de la solución del problema planteado en esta sección, se reactiven los conceptos de ecuación, solución de la ecuación, conjunto solución, ecuaciones equivalentes, que posee el educando desde séptimo grado y se formalicen con la definición de ecuación lineal que aparece en este epígrafe. Se analizará con los educandos las secciones: "Reflexiona un instante" referido a cómo transformar las ecuaciones, y la sección: "Atención" donde se alerta sobre la eliminación de signos de agrupación y así estarán en condiciones de realizar ejercicios como los del ejemplo uno en los que los educandos tengan para identificar ecuaciones lineales con la aplicación de la definición, además se sugiere que se discuta con los educandos la sección: "Consejos útiles" y la sección: "Recuerda que..." relacionada con la solución de una ecuación.

Se sugiere que de conjunto con los educandos se reactive el procedimiento de solución de las ecuaciones lineales y las transformaciones equivalentes estudiadas en el séptimo grado, utilizando la ecuación que modela el problema planteado al inicio de la unidad temática. Se le hará notar a los educandos que estas transformaciones equivalentes que conoce se realizan en ambos miembros de la ecuación, pero que hay otras **transformaciones equivalentes que se realizan en un solo miembro**, como son la eliminación de paréntesis y la reducción de términos semejantes.

En el octavo grado no se resuelve un nuevo tipo de ecuaciones, lo que se realiza es la introducción de los nuevos elementos del tecnicismo algebraico estudiados en esta unidad y la ampliación del dominio de la variable al dominio de los números reales.

Insistir a los educandos en que para resolver estas ecuaciones deben primeramente eliminar los signos de agrupación, efectuar las operaciones indicadas con polinomios, reducir términos semejantes, agrupar los términos semejantes en cada miembro de la ecuación (transponer términos de un miembro a otro de la ecuación), despejar la variable y calcular el valor de esta, aunque indistintamente se pueden transponer los términos de un miembro a otro y después reducir términos semejantes. Es más recomendable realizar la reducción de términos semejantes que hay en un mismo miembro antes de transponerlo al otro miembro, pues reduce el número de términos a transponer de un miembro a otro. Por ejemplo:

$4x - (3x+5) + (x+7) = 2x - 3(x-1)$

$4x - 3x - 5 + x + 7 = 2x - 3x + 1$

$2x + 2 = - x + 1$

$2x + x = 1 - 2$

$3x = -1$

$x = -\frac{1}{3}$

En este caso se eliminaron lo signos de agrupación (paréntesis precedidos de signo más y menos) y después se redujeron términos semejantes en cada miembro de la ecuación. Note que, procediendo así, solo se trasponen dos términos de un miembro a otro lo que reduce la posibilidad de cometer errores en los signos de los términos.

$4x - (3x+5) + (x+7) = 2x - 3(x-1)$

$4x - 3x - 5 + x + 7 = 2x - 3x + 1$

$4x - 3x + x - 2x + 3x = 1 + 5 - 7$

$3x = -1$

$x = -\frac{1}{3}$

Aquí se eliminaron los signos de agrupación (paréntesis precedidos de signo más y menos) y después se transpusieron los términos. Note que en este caso, aunque se resuelve la ecuación en menor número de pasos se trasponen cuatro términos de un miembro a otro, lo que incrementa la posibilidad de cometer errores en los signos de los términos.

Antes de plantear a los educandos ejercicios de resolución de ecuaciones lineales deben resolverse ejercicios como el uno del epígrafe 3.3, en el que se fijen los conceptos de ecuación, ecuaciones equivalentes, dominio de la variable y conjunto solución. Se debe resumir que cuando el dominio de la variable es el conjunto de los números racionales o reales toda ecuación lineal tiene solución única.

Se sugiere dedicar tres horas-clase a la ejercitación de la resolución de ecuaciones lineales.

En las clases de ejercitación además de resolver ecuaciones se presentarán ejercicios en los que los educandos tengan que comprobar si determinados valores son solución de una ecuación lineal, construir ecuaciones lineales que satisfagan determinadas condiciones y determinar parámetros de una ecuación lineal, conocidas algunas de sus propiedades, como los ejercicios ocho, nueve, diez, 11 y 12 del epígrafe 3.3.

Además, no deben faltar aquellos en los que la solución de la ecuación depende del dominio de la variable, como el 16 y 19 del epígrafe 3.3.

En cuanto al **despeje de variables en ecuaciones** se puede iniciar con una situación como la que aparece en la sección: "Reflexiona un instante" del subepígrafe 3.2.1 y luego presentarle la sección: "Aplica tus conocimientos" del mismo subepígrafe, además antes de analizar el ejemplo uno, es transcendental analizar con los educandos la sección: "Consejos útiles". Es importante que los educandos identifiquen que en las ecuaciones se expresan determinadas relaciones, principios o reglas que tienen utilización en la matemática, en otras ciencias y en la vida práctica y que en dependencia de esto se despeja determinada variable o magnitud que se identifica con una variable y que para esto tiene que aplicar las trasformaciones equivalentes que ha estudiado.

En las clases se resolverán ejercicios como el uno, dos, tres, cuatro y cinco del epígrafe 3.3.1.

3.3.2 Sistematización y profundización en la resolución de problemas que conducen a ecuaciones lineales

El tratamiento metodológico para la resolución de problemas se realizará siguiendo las cuatro fases del Programa Heurístico General. Se dedicarán ocho horas-clase para fijar este procedimiento de solución.

Para iniciar este contenido se sugiere una situación similar a la que se plantea en la sección: "Aplica tus conocimientos", luego se analizará con los educandos la sección: "Recuerda que..." del subepígrafe 3.3.2 y seguidamente se analizarán los ejemplos del uno al cuatro de este subepígrafe, en los que se modela el modo de actuación que debe seguir en clases el docente para resolver un problema.

Es importante hacerles notar a los educandos los recursos que se utilizan en la búsqueda de la solución del problema en estos ejemplos, como son subrayar las relaciones que aparecen en el texto, que tienen sentido matemático, el uso de tablas, esquemas, esbozos de figuras, aplicación de propiedades de las figuras planas, fórmulas, identificación de relaciones de igualdad en el texto del problema, entre otros.

En la ejecución del plan de resolución del problema el docente deberá insistir en que más que los datos del problema lo importante es escribir el significado que se le ha asignado a la variable que se va a utilizar y que esta fase se realiza cuando ya se encontró la vía de solución.

En estos ejemplos también se muestra cómo entrenar a los educandos en que antes de elaborar la oración de respuesta al problema, deben verificar en el texto si el resultado es lógico y comprobar la solución en el texto del problema, lo que significa que debe verificar que la solución hallada cumple con las condiciones planteadas en el texto del problema.

El docente con su modo de actuación en el aula al revisar la solución del problema de un educando, tanto en la pizarra como en su libreta, debe mostrar cómo se comprueba que el problema está resuelto correctamente, para esto debe verificar si la solución encontrada es lógica y si cumple con las relaciones que aparecen en el texto del problema, para fijar en sus educandos que así es cómo se verifica que el problema está bien resuelto.

Además, se debe entrenar al educando en que al resolver un problema debe detenerse a reflexionar en cómo procedió para encontrar la solución y si existe otra vía de solución. En clases deben resolverse los problemas, siempre que sea posible, empleando diferentes vías de solución.

Es necesario insistir en la importancia de que en la fase búsqueda de la solución, se identifique en el texto del problema las relaciones que permiten establecer una relación de igualdad, en la fase de ejecución del plan se declare el significado que se le va a asignar a la variable que se utiliza en la resolución del problema, y en la fase de la verificación de la vía utilizada se analice que la respuesta obtenida sea lógica y se realice la comprobación de la solución en el texto del problema.

A los educandos se les deben proponer ejercicios en los que dada una ecuación busquen una situación relacionada con la vida económica del país y de la biodiversidad que se represente matemáticamente por ella, como parte de su preparación para la formulación de problemas. Por ejemplo:

Dado	Elaborar la situación
$\frac{1}{2}(2x + x) = 9\,000$	Una empresa forestal ha sembrado en este año el doble de los árboles que sembró en igual fecha el año pasado. La mitad de los árboles sembrados en ambos años constituyen los 9 000 árboles que serán destinados a la reforestación del poblado.

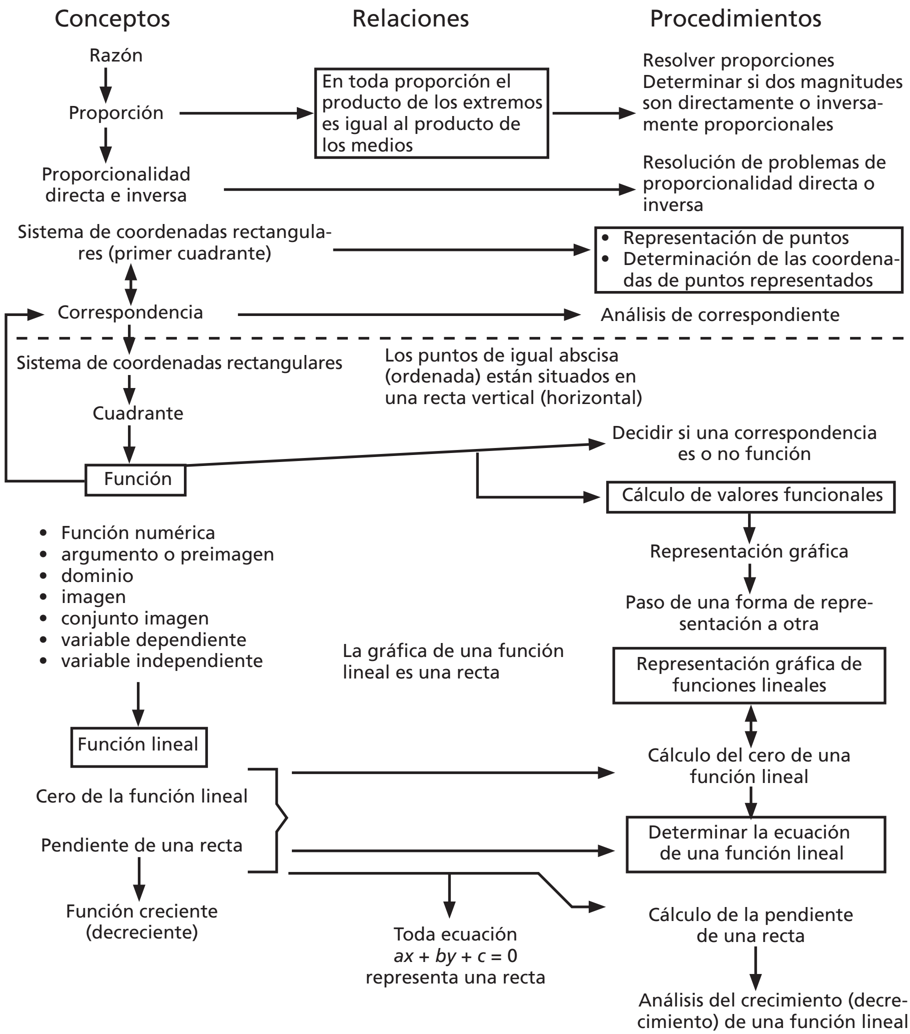
Para el tratamiento de las clases de este subepígrafe debe el docente tener en cuenta las secciones: "Atención" y "Reflexiona un instante" del libro que aparecen después del ejemplo cuatro del subepígrafe 3.3.2, para analizar como el educando puede formular un problema y luego discutir el ejemplo cinco.

Para fijar el procedimiento de resolución de problemas se solucionarán los ejercicios del uno al 29 del subepígrafe 3.3.2, además es necesario que los docentes no dejen de trabajar los ejercicios en los que los educandos tengan que ***formular problemas***, como el 30, 31, 32 y 33 teniendo en cuenta que deben seleccionar los datos apropiados, determinar las relaciones matemáticas entre estos, expresarlas en el lenguaje común, redactar el problema y sobre todo no puede faltar, resolverlo.

3.4 FUNCIÓN LINEAL

Los contenidos correspondientes a esta unidad temática se tratarán en 25 horas-clase y aparecen en el epígrafe 3.4, del capítulo tres "Variables, ecuaciones y funciones" en el LT octavo grado.

En el esquema 3.5 se puede apreciar la estructura interna de la unidad temática atendiendo a los conceptos, relaciones y procedimientos esenciales.



Esquema 3.5

Para iniciar esta temática el docente debe comentar a los educandos la actividad que propone la sección: "Aplica tus conocimientos" que puede orientarse como tarea extraclase en la última clase del epígrafe anterior de manera que asegure el nivel de partida de la primera clase de esta temática.

3.4.1 Profundización de razones y proporciones

La primera clase se dedicará a la sistematización de razones y proporciones, se sugiere comenzar con una situación similar a la que aparece en la sección: "Reflexiona un instante" para recordar el concepto de razón que se muestra en la sección: "Recuerda que...", el docente debe motivar a los educandos con la sección: "De la historia" relacionada con la razón áurea. Para recordar el concepto de proporción se puede emplear la situación de la sección: "Aplica tus conocimientos". Para sistematizar los proceder es de la aplicación a la vida de las razones y proporciones se deben analizar los dos ejemplos del epígrafe 3.4 y la sección: "De la historia". Además, el docente recordará de manera activa los términos de una proporción y la propiedad fundamental de las proporciones, pudiéndose utilizar los recuadros de la sección: "Recuerda que...".

Antes de fijar los procedimientos recordados el docente debe revisar la actividad de la tarea extraclase anterior.

Para la fijación de los procedimientos de aplicación de los conceptos sistematizados se propone resolver ejercicios del epígrafe de acuerdo con el diagnóstico de sus educandos, donde no se debe dejar de proponer algunos de los problemas del 11 al 15.

3.4.2 Sistematización de Proporcionalidad. Proporcionalidad directa e inversa

La segunda clase se dedicará al tratamiento de este subepígrafe, se comienza con la introducción de la proporcionalidad para lo que el docente puede auxiliarse de un ejemplo de la vida práctica, como el que aparece en la sección: "Reflexiona un instante", u otro similar. El análisis de las correspondencias que existen entre dos cantidades o magnitudes donde una depende de la otra que aparecen en el subepígrafe después de la sección mencionada permite que los educandos puedan concluir con lo planteado en la sección: "Atención".

La solución de la actividad de la sección: "Aplica tus conocimientos" dará la posibilidad de reactivar los conceptos de magnitudes directamente proporcionales y factor de proporcionalidad que aparece en la sección: "Recuerda que...". Luego, se debe solicitar a los educandos que expliquen ejemplos de magnitudes con esta característica. Todas estas tareas de aprendizaje el docente las debe realizar de manera movida, rápida y con agilidad porque son conocimientos conocidos por los educandos y trabajados de manera intuitiva en los epígrafes anteriores cuando se resuelven problemas que conducen a ecuaciones lineales.

Se concluirá el tratamiento de los conceptos anteriores con el análisis de lo planteado en la sección: "Atención", condición que es necesario que los educandos comprendan porque es un punto de partida para el posterior análisis de las funciones.

Se resolverán ejercicios como el dos del subepígrafe 3.4.2 u otro similar, donde se determinan elementos de las tablas dadas y problemas de proporcionalidad directa. Es importante en la resolución de estos problemas entrenar a los educandos en cómo identificar que la proporcionalidad es directa, en el uso de tablas y en cómo establecer la proporción. Se propone retomar la situación inicial de la sección: "Aplica tus conocimientos" del epígrafe 3.4 y revisar la solución de está con la aplicación de una tabla.

La tercera clase se puede utilizar para el tratamiento de la proporcionalidad inversa con un procedimiento análogo a la clase anterior e iniciar con el análisis de la sección: "Reflexiona un instante" para reactivar los conceptos que se muestran en la sección: "Recuerda que..." y concluir con las secciones: "Atención" y "De la historia", una para resumir la forma en que se expresa este tipo de proporcionalidad y la otra para comprender la importancia de este concepto que es aplicado desde el siglo VI a.n.e. por el tan reconocido matemático Pitágoras.

Es recomendable el análisis de los ejemplos cuatro y cinco del subepígrafe 3.4.2 y solucionar los ejercicios 21, 22 y 23 del mismo subepígrafe u otros similares que aparecen en el LT octavo grado.

En cada una de las clases se hará énfasis en la resolución de problemas de proporcionalidad directa e inversa, dados en tablas o con texto. No debe dejar de proponerse a los educandos ejercicios de formulación y resolución de problemas de ambos tipos, como son el 19, 20, 31 y 32 del subepígrafe 3.4.2.

Es posible que de acuerdo con el diagnóstico de sus educandos el docente determine dedicar una clase al tratamiento de los dos tipos de proporcionalidad y luego utilice la otra para ejercitar los procedimientos estudiados.

3.4.3 Sistema de coordenadas cartesiano

La última clase de las cuatro dedicadas al primer sistema de clases de este epígrafe 3.4 se dedicará al tratamiento del contenido del subepígrafe 3.4.3. Los conocimientos referidos a este subepígrafe los educandos los conocen desde la Educación Primaria, pero solo aprendieron a asignarle coordenadas a puntos de un plano, donde los valores de las coordenadas pertenecían al conjunto de los números fraccionarios, en este grado amplían el sistema de coordenadas rectangulares con los valores de los números negativos; para esto se amplían los ejes de coordenadas colocando a la izquierda en el eje *x* y hacia abajo en el eje *y* del punto origen del sistema de coordenadas, los números negativos, así se obtienen los cuatro cuadrantes del sistema de coordenadas rectangulares (SCR).

Se sugiere iniciar la clase con la actividad propuesta en la primera sección: "Reflexiona un instante" y la lectura de la sección: "De la historia" donde los educandos podrán ampliar su cultura general al conocer quién inventó el SCR y desde cuándo se utiliza.

Es necesario reactivar la representación de puntos en un sistema de coordenadas rectangulares y la determinación de las coordenadas de puntos representados en el mismo para lo que se sugiere analizar la actividad de la segunda sección: "Reflexiona un instante" y el ejemplo uno del subepígrafe 3.4.3 donde se actualicen los conceptos abscisa, ordenada, coordenadas, ejes de coordenadas, origen de coordenadas y sistema de coordenadas, así como los procedimientos para determinar y representar puntos en el primer cuadrante para introducir los sistemas de coordenadas rectangulares.

Para motivar la ampliación del SCR se le debe proponer al educando la representación de un par ordenado o coordenada donde uno de los valores de la abscisa o de la ordenada o ambos valores sean números negativos. Es conveniente escuchar las ideas que proponen los educandos y así de manera conjunta docente-educandos, donde ellos comprendan que con dos rayos perpendiculares entre sí no es suficiente para representar cualquier punto del plano, por lo que se hace necesario considerar dos rectas perpendiculares entre sí. Luego, se puede remitir a los educandos a la sección: "Atención" donde se analiza detalladamente el sistema de coordenadas rectangulares y se explica la composición de las coordenadas que pertenecen a cada uno de los cuatro cuadrantes.

El docente orienta el análisis del ejemplo dos del subepígrafe 4.3.3 en cual se les muestra a los educandos cómo se representan los puntos que no corresponden al primer cuadrante, haciendo énfasis en que los procedimientos para representar y determinar las coordenadas de puntos del primer cuadrante son válidos para cualquier otro cuadrante. Es conveniente analizar el caso de cuando una de las coordenadas es cero, donde se ubica este punto como aparece en la sección: "Atención" que aparece después del ejemplo dos. Se orienta a los educandos estudiar el ejemplo tres, que vincula el contenido con la geometría plana, de manera independiente para luego debatir con todos el proceder.

Se resolverán ejercicios como el uno, dos, tres, cuatro, cinco, ocho y 11 del subepígrafe 3.4.3.

3.4.4 Concepto de función

Los contenidos de esta subtemática aparecen en el capítulo tres, epígrafe 3.4, subepígrafe 3.4.4 y para su desarrollo se sugieren siete horas-clase donde se tratarán los contenidos referidos a: la función como correspondencia entre dos conjuntos. Distintas formas de representar una función. Variables dependientes e independientes. Dominio e imagen de una función. Cálculo de valores funcionales.

En la primera clase para elaborar el **concepto de función** se partirá de reactivar el concepto de correspondencia y se pueden presentar correspondencias entre objetos familiares del contexto del educando, como por ejemplo, que cada niño tiene una sola madre biológica, que a las casas se le asocian números, etc. y presentar varios ejemplos de correspondencias unívocas y no unívocas relacionadas con situaciones que el educando conoce de las clases de matemática, de otras asignaturas y de la vida práctica, como aparece en la segunda sección: " Reflexiona un instante" de este subepígrafe 3.4.4.

Es importante concluir de estos ejemplos u otros similares que en cada caso intervienen dos conjuntos uno de partida y otro de llegada y una regla o ley que asocia los elementos del conjunto de partida con los elementos del conjunto de llegada, se deben analizar las semejanzas y diferencias entre las correspondencias y destacar que estas se pueden representar utilizando diagramas, tablas y gráficos.

Para obtener el concepto de función se puede formular a los educandos la pregunta siguiente: ¿es posible hacer corresponder en todos los casos a cada elemento de un conjunto de partida un único elemento del conjunto de llegada?

De la respuesta a esta pregunta se puede concluir que hay correspondencias en las que es posible esto y en otras no, y se enuncia la definición de función que aparece en el subepígrafe 3.4.4. En los ejemplos en que los educandos deben determinar si las correspondencias son o no funciones se les exigirá que argumenten sus afirmaciones.

Se recomienda trabajar los otros conceptos en la próxima clase: **argumento** o **preimagen, dominio**, **imagen** y **conjunto imagen**, como aparece resumido en la figura 3.47 del subepígrafe 3.4.4, se debe analizar el ejemplo uno para determinar el dominio e imagen de diferentes correspondencias, además se debe realizar la lectura del contenido de la sección: "De la historia", la cual ampliará el conocimiento de los educandos sobre grandes matemáticos que se dedicaron al estudio de las funciones por ser uno de los temas más importante y utilizado.

Para fijar la definición de función, al identificar cuáles de los casos presentados son funciones y fundamentar su respuesta, tratar el concepto de **función numérica,** el docente debe analizar de conjunto con los educandos el ejemplo dos. Es importante aclarar lo que aparece en la sección: "Atención" para no tener errores en la definición, también se explicará cómo se denotan las funciones y la imagen de un elemento.

Para el tratamiento del cálculo **de valores funcionales**, se puede proceder como muestra el ejemplo tres, cuatro y cinco del epígrafe3.4.4.

Se sugiere dedicar una clase a la fijación del concepto de función y al procedimiento del cálculo de valores funcionales, en la que se resuelvan ejercicios como el uno y nueve del epígrafe 3.4.4.

Para el tratamiento de las **diferentes formas de representar una función** se dedicará otra clase donde se pueden considerar algunas funciones dadas por la expresión que define la imagen, es decir, como por ejemplo $f(x) = x + 2$; $f(x) = \sqrt{x}$ o $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x}$. Explicar a los educandos que para la imagen de un elemento x por la función f se utiliza la variable *y*, de donde se obtienen las ecuaciones: $y = x + 2$; $\mathrm{y} = \sqrt{x}$; $y = \frac{1}{x}$, así el educando tendrá otra forma de representar una función.

Este es el momento apropiado para abordar la idea de **dependencia funcional**, el nombre de **variable independiente** para la *x*, que representa los elementos del dominio de la función y la **variable dependiente** para la *y,* que representa los elementos del conjunto imagen de la función, de manera que mediante una ecuación queda establecida una dependencia entre las variables *x* e *y*, por eso es usual decir que *y* está en función de *x* o que *y* depende de *x,* explicación que aparece en el libro de texto debajo del ejemplo cinco del subepígrafe 3.4.4. También se aprovecharán estos ejemplos para establecer el convenio siguiente que aparece en la sección: "Atención":

Cuando una función se representa por una ecuación, su dominio será el subconjunto de $\mathbb{R}$ para el cual está definida la expresión donde aparece la variable independiente, por eso, en los tres casos anteriores el dominio es $\mathbb{R}$; $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ y $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$, respectivamente. Es conveniente discutir con los educandos el ejemplo seis de este subepígrafe 3.4,4.

Para la representación gráfica de las funciones el docente puede utilizar en clases dos variantes.

Variante 1: presentar una función dada mediante una tabla, que servirá, primero para mostrar que hay funciones cuyo dominio es un conjunto finito y segundo para destacar que el conjunto formado por un elemento x del dominio de una función f y su imagen $f(x)$ en ese orden $(x; f(x))$ se puede interpretar como las coordenadas de un punto del plano coordenado, luego, esto nos permitirá representar las funciones gráficamente.

Variante 2: presentar las diferentes formas de representar una función que se mencionan en el párrafo que aparece encima del ejemplo siete del subepígrafe 3.4.4, y analizar dicho ejemplo. A partir de este momento continúa el análisis como en la variante anterior.

Se sugiere representar una función seleccionada del tipo $y = mx$ análogamente a como se realiza en el ejemplo siete. Es importante que el educando aprenda a determinar el dominio y la imagen de una función a partir de la gráfica, es decir, proyectando la gráfica en el eje "x" y en el eje "y" respectivamente. Por último, se deben mostrar ejemplos de funciones que vengan dadas por sus gráficas, que pueden tomarse de informaciones de la prensa sobre datos económicos, deportivos, etcétera.

El tratamiento del concepto de función debe ser sencillo, los ejemplos no deben ser complejos ni de situaciones poco usuales, no se le prestará especial atención al análisis de correspondencias representadas gráficamente para decidir si son o no funciones, pues esto se hará en décimo grado cuando se profundice en el concepto y se defina la función como conjunto de pares ordenados. En este grado solo se inicia el trabajo con las funciones que continuará sistemáticamente hasta la Educación Preuniversitaria donde se terminarán de estudiar las funciones elementales.

Se sugiere para la ejercitación dedicar las tres últimas clases del sistema de clases donde el docente debe seleccionar ejercicios de los 12 que aparecen en el subepígrafe 3.4.4, siempre teniendo en cuenta el diagnóstico de sus educandos y la graduación de los ejercicios según el grado de dificultad. Es necesario trabajar las diferencias individuales para garantizar la asimilación de las habilidades y procedimientos de esta nueva materia.

3.4.5 La función lineal

Los contenidos de esta subtemática aparecen en el capítulo tres, epígrafe 3.4, subepígrafe 3.4.5 del LT octavo grado y para su desarrollo se sugieren14 horas-clase.

Para el tratamiento de esta temática se propone iniciar con una situación como la que aparece en la sección: "Reflexiona un instante" del subepígrafe 3.4.5 donde el docente conducirá el análisis para las respuestas a las interrogantes como se explica en el libro, primero comenzando con determinar si la relación entre las magnitudes representadas en la gráfica es una función y luego deben determinar el dominio y la imagen de esta correspondencia. Después para obtener cuál es la ecuación que describe la variación de la longitud de la vela, debe el docente proponer la discusión de las situaciones que aparecen en el libro y así obtener una ecuación general para estas funciones y remitir a la definición de función lineal.

Seguidamente se debe analizar el ejemplo uno del mismo epígrafe, el cual propone diferentes ecuaciones de funciones lineales, tratando que queden todos los casos que corresponden según los valores de m y n, es decir, para $m \neq 0$ y $n \neq 0$, $m \neq 0$ y $n = 0$, y $m = 0$, es importante analizar con los educandos la sección: "Atención" del epígrafe 3.4.5.

Para la fijación del concepto de función lineal se propone resolver los ejercicios del uno al cinco del epígrafe 3.4.5 u otros similares.

3.4.6 Representación gráfica de una función lineal

La clase que se refiere a esta temática se sugiere iniciarla con una situación como la que aparece en la sección: inicial: "Reflexiona un instante" del subepígrafe 3.4.6 para motivar a los educandos al estudio de esta temática y recordar que el conjunto formado por los elementos del dominio de una función y sus respectivas imágenes, se pueden interpretar como las coordenadas de los puntos de un plano lo cual aparece en la sección: "Recuerda que..." del mismo epígrafe. Además, se debe enfatizar en la sección: “Atención” que se muestra después de las secciones mencionadas para que los educandos comprendan el concepto de gráfica de una función, se sugiere resolver un ejercicio como el que aparece en el ejemplo uno de este subepígrafe. Explicar a los educandos que el uso de tablas facilita el trabajo para determinar las coordenadas de los puntos del gráfico de la función y resaltar, que mientras más puntos se determinen se obtiene una idea más clara de cuál es el gráfico de la función. La sección: “Atención” que aparece debajo del ejemplo uno explica cómo obtener la representación gráfica de las funciones lineales con la unión de todos los puntos con una línea.

El docente debe exponer el procedimiento para representar gráficamente las funciones lineales como se describe en el ejemplo uno de este epígrafe.

La segunda sección: “Reflexiona un instante” se debe discutir con los educandos para determinar la relación entre la inclinación de la recta y el valor de *m* en la ecuación de la función correspondiente y entre el valor de *n* y la intersección del gráfico de la función con el eje de las ordenadas y llegar a las conclusiones que aparecen en la sección: “Atención” del subepígrafe 3.4.6.

La tercera sección: “Reflexiona un instante” de este subepígrafe es para reflexionar con los educandos sobre la cantidad de puntos necesarios y suficientes para representar una función lineal, si dicha representación es una recta. El docente guiará el análisis recordando cuantos puntos son suficientes para construir una recta, de manera que los educandos arriben a la conclusión de que basta con determinar dos puntos y explicar las ventajas de utilizar los llamados puntos cómodos, que son aquellos en que la gráfica de la función corta a los ejes del sistema de coordenadas, es decir, los puntos $P_1(0; y)$, en el que, y es igual al valor de n en la ecuación que define la función, y $P_2(x; 0)$. Los valores de x, y de P_2 y P_1, respectivamente, se denominan interceptos.

En el ejemplo dos del subepígrafe 3.4.6 se describe el procedimiento para representar gráficamente funciones lineales con la ubicación en el SCR de los puntos cómodos y se explica cómo calcular estos puntos que se interceptan con los ejes de coordenadas, también se muestra el proceder para determinar si un punto pertenece o no a la representación gráfica de una función lineal o si un par ordenado pertenece o no a la función. Es importante que los educandos reconozcan que cuando hablamos de los elementos de la función se dice que el par ordenado pertenece a la función y que cuando nos referimos a la representación gráfica de la función, hablamos de las coordenadas de un punto.

La sección: "Aplica tus conocimientos" permite utilizar un asistente matemático para determinar si un punto pertenece a la representación gráfica de la función.

La lectura comentada de la sección: "Sabias que" del subepígrafe 3.4.6 permite a los educandos relacionar la representación gráfica de funciones con objetos de la vida cotidiana que le dan su nombre.

Para la fijación se podrán realizar los ejercicios del uno al siete de este subepígrafe.

3.4.7 Ecuación de una función lineal

Para la **determinación de la ecuación de una función lineal** dada su representación gráfica o dos puntos que pertenecen al gráfico de la función o valores de *m* o *n* y un punto de la gráfica se sugiere utilizar una de las variantes siguientes.

Variante 1: a partir de la situación problémica que aparece en la sección inicial: "Reflexiona un instante" de este subepígrafe llegar de conjunto con los educandos a la necesidad de escribir la ecuación para determinar la altura de la vela. El docente debe realizar el análisis para escribir la ecuación de una función lineal si se tiene:

- el valor de *n* y un *punto* de la recta,
- el valor de *m y un punto* de la recta,
- la representación gráfica y las coordenadas de dos puntos por donde pasa la gráfica de la función.

Finalmente, después del análisis de todos los procedimientos el docente debe conducir a los educandos para generalizar el proceder para escribir la ecuación de una función lineal aplicando el método de lo particular a lo general.

Variante 2: se puede comentar a los educandos que ya estudiaron cómo representar gráficamente la función lineal a partir de su ecuación y que es hora de aprender a realizar el procedimiento inverso, es decir, escribir su ecuación a partir de ciertas condiciones incluidas su representación gráfica.

La segunda sección: "Reflexiona un instante" le permitirá al docente conducir el tratamiento de la determinación del **dominio y la imagen de la función lineal,** resaltando que al proyectar la gráfica sobre el eje "*x*" se obtiene el dominio de la función lineal que es $\mathbb{R}$, como se muestra en la figura 3.68 del subepígrafe 3.4.7 del LT octavo grado, como ya se conoce, y mediante preguntas a los educandos como ¿cuál será la imagen de estas funciones?, pueden por analogía obtener que proyectando el gráfico sobre el eje "*y*" se determina el conjunto imagen de la función, figura 3.69 de este subepígrafe. El docente debe inducir a los educandos a resumir lo analizado para obtener la información que aparece en el recuadro relacionada con el dominio e imagen de las funciones lineales.

El análisis de la última sección: "Reflexiona un instante" del subepígrafe 3.4.7 no puede dejar de realizarse porque le permitirá a los educandos comprender ¿cuál será el dominio y la imagen de la función lineal $y = n$, o sea, cuando $m = 0$?, que es un caso particular de funciones constantes.

Es pertinente realizar el análisis del caso cuando $m = n = 0$, en el que la ecuación de la función es $y = 0$ y su representación gráfica coincide con el eje "*x*" y su conjunto imagen es {0}.

Para la fijación de este procedimiento se puede proponer a los educandos ejercicios como el uno del subepígrafe 3.4.7 y para la ejercitación se sugiere resolver los ejercicios del dos al nueve de este mismo subepígrafe.

3.4.8 Cero de una función lineal

El tratamiento del concepto de **cero de una función lineal** se puede motivar con la situación problémica que aparece en la sección: "Reflexiona un instante" de este subepígrafe y mediante una conversación heurística con los educandos reflexionar con ellos sobre a la necesidad de calcular el valor del tiempo cuando la altura de la vela es igual a cero, para poder saber a qué hora se gastó completamente la vela, para esto, se puede formular la pregunta a los educandos: ¿qué es necesario conocer para determinar el punto de intersección con el eje *x*? y concluir que basta conocer la abscisa del punto. Seguidamente enunciar la definición de cero de una función lineal que aparece en el libro de texto. Es importante no dejar de analiza la sección: "Atención" que aparece después de la definición donde se precisan que el cero de la función lineal es la *abscisa* del punto donde la recta corta al eje *x*, además el proceder para su cálculo dada la ecuación de la función lineal. Es importante que el educando comprenda la interpretación geométrica del concepto de cero de una función lineal y destacarse la diferencia entre el cero y el punto de intersección con el eje *x*.

El procedimiento para calcular el cero de la función lineal se describe en el ejemplo uno del subepígrafe 3.4.8. Se sugiere llamar la atención de los educandos en los incisos a), b) y c), donde $m \neq 0$, en los que se obtiene un único cero, y en los casos particulares como el inciso d) que se obtiene una contradicción $0 = 6$, que significa que la función no tiene cero, y como el inciso e) que se obtiene la igualdad $0 = 0$, lo que quiere decir que la ecuación se satisface para cualquier valor real de *x*, *y* representa que la función tiene infinitos ceros.

Debe además destacarse la correspondencia que existe entre este razonamiento analítico y la interpretación geométrica del concepto de cero de una función lineal, ya que en los incisos a), b) y c) las rectas cortan al eje *x* en un único punto, en el d) la recta es paralela al eje *x* por lo que no tiene puntos comunes y en el inciso e) la recta coincide con el eje *x* por lo que tiene infinitos puntos comunes (todos los del eje *x*). Debe quedar claro para el educando que cuando $m \neq 0$ las funciones lineales sólo tienen un único cero y resumir con el recuadro que aparece al final del subepígrafe 3.4.8.

Para las clases de ejercitación se pueden proponer ejercicios como los del uno al nueve del subepígrafe 3.4.8.

3.4.9 Rectas y funciones

Para comenzar el desarrollo de la subtemática podemos utilizar la situación que aparece en la sección inicial: “Reflexiona un instante” de este subepígrafe y analizar el ejemplo uno de este mismo subepígrafe u otro similar , llamando la atención de los educandos sobre el hecho de que los resultados obtenidos en cada inciso del ejemplo representan rectas en el plano coordenado, pues las ecuaciones corresponden a funciones lineales cuya gráfica ya conocen que son rectas y concluir con el enunciado del teorema sobre la ecuación de una recta que se presenta en el subepígrafe.

Se sugiere analizar el caso particular en que $b = 0$, por ejemplo, la ecuación $5x - 10 = 0$. Aquí $x = 2$ y como $b = 0$, la variable y puede tomar cualquier valor real para un mismo valor de x, por lo que las coordenadas de los puntos de la recta son de la forma $(2; y)$, por lo que es una recta paralela al eje y que pasa por el punto (2; 0), sin embargo, esta recta no es la representación gráfica de una función, aunque sea la ecuación de una recta, pues como todos los puntos de la recta son de la forma $(2; y)$ significa que al número real dos se le hace corresponder todos los números reales y por lo tanto esta correspondencia no es una función.

Para el tratamiento del **cálculo de la pendiente** se pueden utilizar las variantes siguientes:

Variante 1: a partir del análisis de la sección: “Investiga y aprende” del subepígrafe 3.4.9, el docente puede introducir el nombre de pendiente para ***m*** y recordar que en clases anteriores se analizó cómo variaba la posición de la recta según el valor de este parámetro. Con esto se muestra la necesidad de calcular el valor de la pendiente de una recta.

Variante 2: el docente puede orientar la representación gráfica en un mismo sistema de coordenadas de las rectas: $y = 2x + 1$; $y = -2x + 1$,y $y = 4$.

Después de representadas debe destacar la inclinación de las rectas respecto al eje x y pedir a los educandos que digan los valores de m y n en cada caso, para recordar que cuando m varía, cambia la inclinación de la recta, como se resume en el recuadro de la sección: "Recuerda que...", para después introducir el nombre de **pendiente de la recta** para el parámetro *m* como aparece en la sección: "Atención" y comentar que también se conoce a la pendiente de una recta con el nombre de coeficiente angular; pues la inclinación de la recta depende del ángulo que esta forma con el eje *x* y ejemplificar dichos ángulos con las rectas representadas.

Se sugiere realizar el análisis de la sección: "Reflexiona un instante" de este subepígrafe 3.4.9, para motivar la necesidad del cálculo de la pendiente conociendo el valor de *n* y un punto de la recta.

Se propone que el docente realice el análisis detallado de la actividad de la sección: "Aplica tus conocimientos" para determinar cómo calcular el valor de *m* si conocemos dos puntos de la recta. De este análisis los educandos deben concluir que la pendiente está determinada por el cociente entre la variación de la ordenada y la variación de la abscisa. Seguidamente se enunciará el **Teorema de la pendiente de una recta** del subepígrafe 3.4.9, el cual presenta la ecuación para calcular la pendiente de una recta conocidas las coordenadas de dos de sus puntos. Seguidamente se puede dar respuesta a la situación inicial, hallando el valor de la pendiente de la recta r_2 como se muestra en este subepígrafe.

Se sugiere utilizar el ejemplo dos del subepígrafe 3.4.9, para fijar el procedimiento del cálculo de la pendiente de una recta, dada las coordenadas de dos de sus puntos, así como el ejercicio dos y tres de este subepígrafe.

Para obtener los conceptos de **función creciente y decreciente** se sugiere seguir la idea que aparece en el subepígrafe 3.4.9 donde se relaciona la inclinación y el desplazamiento de la recta (en el gráfico) con el valor calculado de la pendiente de la recta en los casos anteriores del ejemplo dos y se pueden formular a los educandos las preguntas siguientes ¿cómo se comportan las imágenes en cada caso a medida que aumentan los valores del dominio?, ¿qué relación existe entre el signo de la pendiente y el crecimiento de las funciones lineales? para que identifiquen la relación existente entre la pendiente y el crecimiento de la función lineal y lleguen a obtener las conclusiones sobre el comportamiento de los valores de ***x*** y de ***y*** como aparece en el recuadro donde se resume cuándo la función es monótona creciente o decreciente.

Otra vía es utilizar el asistente matemático GeoGebra para darle tratamiento a los conceptos de función creciente y decreciente.

¿Cómo hacerlo?

Se introduce la ecuación $y = mx + n$ en la barra de entrada, después se crea un deslizador para cada parámetro; al ejecutar los deslizadores se observan las transformaciones del gráfico de cualquiera de las funciones que se obtienen y se puede llegar a conclusiones generales, figura 3.1.

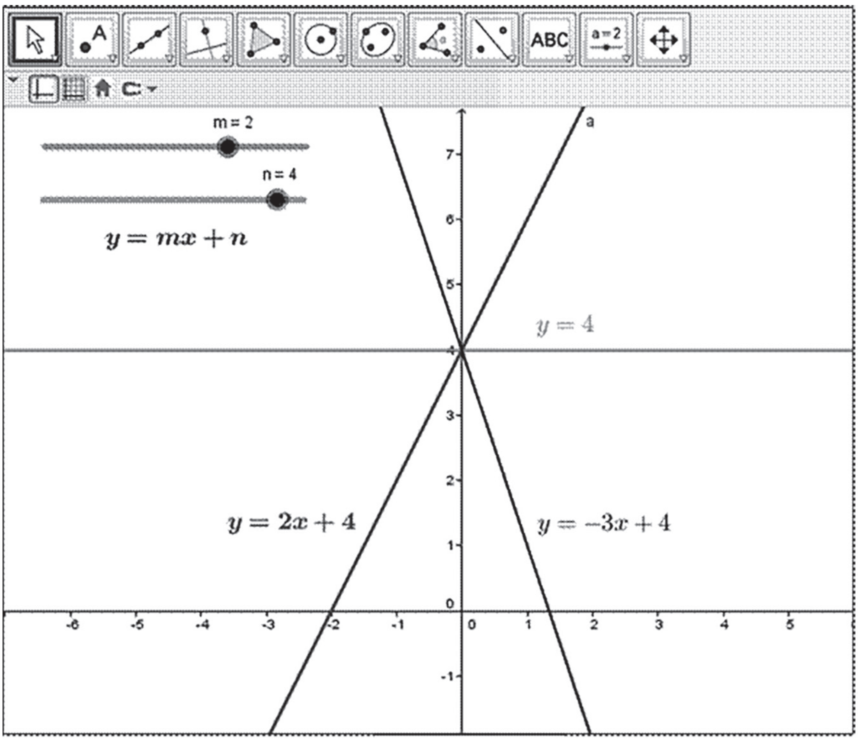


Figura 3.1

Se puede concluir el tratamiento de esta subtemática con el recuadro final del subepígrafe y utilizar los ejemplos tres y cuatro para la fijación del proceder.

Finalmente se deberá analizar el ejemplo cinco del subepígrafe 3.4.9 en el que se ilustran cómo conocidas las coordenadas de dos puntos del gráfico de una función lineal. Se puede escribir la ecuación de la función utilizando la ecuación para calcular la pendiente de la recta.

Para la ejercitación y las tareas extraclases se pueden proponer los ejercicios del cuatro al nueve subepígrafe 3.4.9. Además, se pueden realizar ejercicios como el siguiente:

Escribe la ecuación de la función lineal cuya gráfica pasa por los puntos:

a) *A* (2; 2) y *B* (3; 5) b) *M* (4; – 3) y *P* (– 1; – 2) c) *H* (1; 1) y *Q* (3, 1)

1.1. Calcula el cero de la función en cada caso.
1.2. Analiza su crecimiento.
1.3. Represéntalas en un sistema de coordenadas rectangulares.

3.4.10 Funciones lineales definidas por tramos

El estudio de las **funciones lineales definidas por tramos** pretende que los educandos apliquen los conocimientos adquiridos sobre las funciones lineales a la resolución de ejercicios sobre fenómenos de la vida que se grafican a partir de funciones lineales definidas por tramos.

Para introducir el tema el docente puede auxiliarse de la situación planteada en la sección: "Reflexiona un instante" de este subepígrafe u otro similar, donde se refleje el comportamiento por tramos de un fenómeno de la vida cotidiana.

En la sección: "¿Sabias que...?" del subepígrafe 3.4.10, se orienta a los educandos sobre la necesidad de representar gráficamente en un mismo sistema de coordenadas, fenómenos de la naturaleza cuyo comportamiento no es estable.

Para darle solución a la situación problémica inicial se sugieren las interrogantes que aparecen en la sección: "Aplica tus conocimientos" de este subepígrafe. En las preguntas que se realicen, cualquiera sea la variante utilizada, debe quedar evidenciada, la necesidad de interpretar correctamente la gráfica, con el apoyo de los conocimientos adquiridos por los educandos en esta unidad.

Con la respuesta a cada pregunta se debe insistir en qué parte del contenido estudiado sobre funciones lineales se pone de manifiesto, o sea, el valor de n, el cero de la función, la proyección de segmentos sobre los ejes, etc. Además, para lograr la comprensión y aplicación de los procedimientos estudiados en las funciones lineales en los diferentes tramos que conforman la representación de una situación determinada se sugiere analizar detalladamente con los educandos el ejemplo uno del subepígrafe 3.4.10.

En las clases de ejercitación, sistematización y consolidación pueden utilizarse ejercicios del uno al 11 del subepígrafe 3.4.10, los cuales deben seleccionarse de acuerdo con el diagnóstico de los educandos.

Es importante que en este tipo de ejercicios donde sea necesario escribir la ecuación de un determinado tramo, se utilicen como variables en la ecuación las variables que identifican las magnitudes que se reflejan en cada eje, pues dará mayor claridad al educando en cómo dada una de las magnitudes, determinar el valor de la otra.

Otros ejercicios que pueden utilizar en las clases de consolidación de esta subtemática.

1. ¿Cuáles de las siguientes correspondencias son o no funciones (fig. 3.2)? Argumenta en cada caso tu respuesta.

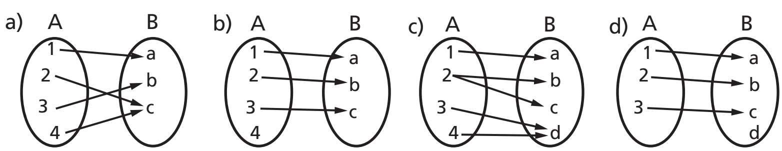


Figura 3.2

   e) La correspondencia de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que a cada número real asocia su triplo aumentado en ocho.
   f) La correspondencia de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{Z}$ que a cada número real asocia su mitad disminuida en dos.
   g) La correspondencia que a cada polígono asocia su cantidad de lados.

2. Sea la función *f* definida en por la ecuación $f(x) = -2x + 4$.
   a) Representa gráficamente dicha función.
   b) Calcula su cero.
   c) Determina su monotonía.
   d) Verifica si el par (0,5; 3) pertenece a *f*.

e) Calcula $f(-1) + 3\,f(2{,}5)$.

3. En el sistema de coordenadas aparece representada la función g, figura 3.3.

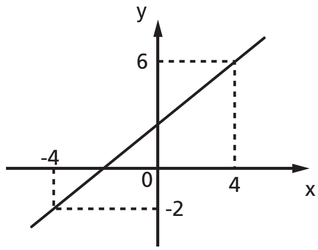


Figura 3.3

a) Escribe su ecuación.
b) Determina su imagen.
c) Calcula su cero.
d) Di su monotonía.

4. La gráfica de la figura 3.4 muestra la variación de la temperatura de una sustancia expuesta a condiciones diferentes en un laboratorio, a partir de las 8:30 a.m.

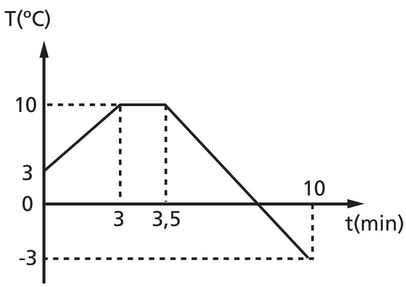


Figura 3.4

4.1. Selecciona la respuesta correcta.

a) La ecuación que describe la variación de la temperatura de la sustancia durante los primeros 3 min es:

___ $T = \frac{3}{7}t + 3$ ___ $T = \frac{7}{3}t + 3$

___ $T = -\frac{7}{3}t + 3$ ___ $T = 3t + 3$

b) La temperatura se mantuvo constante durante:

___ media hora ___ medio segundo ___ medio minuto

___ cinco minutos

c) La sustancia alcanzó su temperatura mínima a las:

___ 8:33 a.m. ___ 11:30 a.m. ___ 8:40 a.m. ___ 6:30 p.m.

4.2. Completa los espacios en blanco:

a) La temperatura inicial de la sustancia fue de _________.
b) La ecuación que describe la variación de la temperatura a partir de los tres minutos y medio es ________________.
c) La temperatura de la sustancia estuvo descendiendo durante ____ min.
d) La temperatura máxima alcanzada por la sustancia fue de _____.
e) La sustancia alcanzó los 0 °C de temperatura a las ____ a.m.

Vocabulario

El vocabulario que le presentamos a continuación contiene las palabras más utilizadas en esta unidad, en las cuales los educandos tienen tendencia a escribirlas con faltas de ortografía, por lo que se requiere una labor atenta del docente con este vocabulario en las diferentes actividades que programe (dictados, buscar en el diccionario el significado común y compararlo con el significado matemático).

adición	sustracción	división
reducción	términos	traducción
algebraico	expresiones	lenguaje
traducción	viceversa	razón
excede	despeje	trasformaciones
texto	transponer	cociente
comprobación	reducción	dividendo
correspondencia	función	monotonía
unívoca	imagen	gráfica
abscisa	creciente	decreciente
intercepto	cero	proporción

BIBLIOGRAFÍA

ACOSTA HERNÁNDEZ, S. y otros: *Matemática 8*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2014.

_______ *Programa de tránsito de Matemática* 8, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2011.

ÁLVAREZ PÉREZ, M., B. ALMEIDA Y E VILLEGAS: *El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Documentos metodológicos*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2014.

BALLESTER PEDROSO, S y otros: *Didáctica de la Matemática*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2016.

Materiales complementarios

Selección de videos de carácter histórico y metodológico de las videoclases de séptimo grado.

CANTÓN ARENAS, J.: *Ejercicios y problemas integradores de Matemática para la Educación Secundaria Básica*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2011.

RODRÍGUEZ ARUCA, M., T. LEÓN ROLDÁN y S. LIMA MONTENEGRO: *Geometría y dinamismo: una propuesta didáctica*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 2010.

EDITORIAL
PUEBLO Y EDUCACIÓN

9 789591 347428