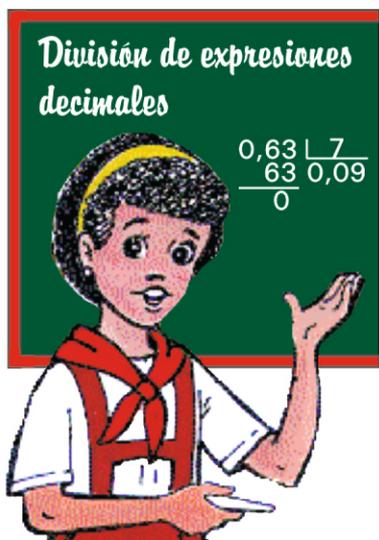
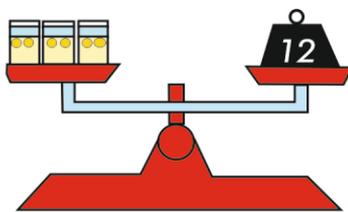


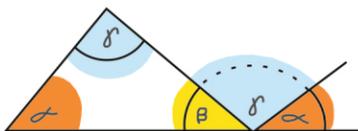
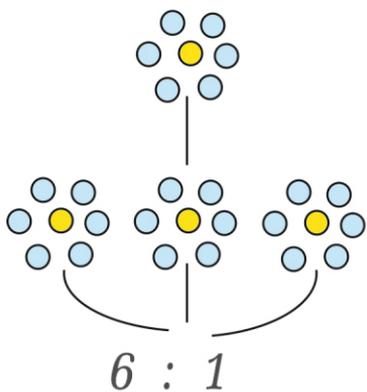
División de expresiones decimales



$$\begin{array}{r} 0,63 \overline{) 63} \\ \underline{63} \\ 0 \end{array}$$



$$3x = 12$$



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Matemática 6

Dra. Celia Rizo Cabrera
Lic. Gladys García Baró
Prof. Ana Lilia Lorenzo Hernández
Prof. Mario García Fariñas
Lic. Caridad Suárez Fidalgo
Dra. María García García



Editorial
Pueblo y Educación

Agradecemos la valiosa colaboración que han ofrecido en la elaboración de este libro la Lic. Elisa Martínez Quiñones y el Lic. Daniel Maza Luis, así como el colectivo de investigación sobre el desarrollo de las habilidades de fundamentar y demostrar en Geometría, de la Filial Pedagógica Asamblea de Guáimaro, de Ciego de Ávila. Agradecemos, además, al Dr. Luis J. Davidson su valioso trabajo en la elaboración de las referencias históricas que aparecen en este libro.

Edición: Lic. Laura Herrera Caseiro
Diseño de cubierta: Nilda Oliva Lloret
Diseño: Bienvenida Díaz Rodríguez
Ilustración: Martha Tresancos Espín
Ofelia Rodríguez Prendes
Corrección: Eneida Reyes García
Realización: Idania González Sisto
Emplane: Selandia Urquhart Rojas

© Sexta reimpresión, 2013
© Primera reimpresión, 1991
© Ministerio de Educación, 1990
© Editorial Pueblo y Educación, 1990

ISBN 978-959-13-0480-3

EDITORIAL PUEBLO Y EDUCACIÓN
Ave. 3ra. A No. 4601 entre 46 y 60,
Playa, La Habana, Cuba. CP 11300.
epe@ceniai.inf.cu

ORIENTACIONES SOBRE EL TRABAJO CON ESTE LIBRO

Para estudiar por este libro, debes tener en cuenta que el contenido se encuentra en los capítulos A, B, C, D, E y F. Cada capítulo está dividido en epígrafes, que aparecen numerados, y estos, a su vez, se subdividen en subepígrafes.

El índice, que se encuentra al inicio del libro, te ayudará a localizar las páginas donde se encuentra cada contenido.

En cada epígrafe encontrarás ejemplos resueltos, que ilustran cómo debes actuar para resolver ejercicios importantes que corresponden a ese contenido. Al final de cada epígrafe aparecen los ejercicios que debes resolver. Es importante que tengas en cuenta que en estos se han destacado con un asterisco (*) aquellos que tienen un mayor nivel de complejidad.

Al final del libro, podrás ver las respuestas de la mayoría de los ejercicios que debes resolver. De esa forma, cuando termines de realizarlos, podrás comprobar si has trabajado bien y de lo contrario, rectificar tus errores.

Esperamos que este texto te ayude y que alcances éxitos en este grado en el que ya terminas la educación primaria.

Índice

EL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO	VIII
Capítulo A. Números naturales	1
1. Operaciones básicas de cálculo con números naturales	1
Ejercicios	1
2. Repaso de los divisores y múltiplos de un número natural. Mínimo común múltiplo	3
Divisores de un número	3
Múltiplos de un número natural. Mínimo común múltiplo	6
Ejercicios	9
Ejercitación variada	12
CÁLCULO CON FRACCIONES	16
Capítulo B. Números fraccionarios	17
1. Repaso	17
Repaso del concepto fracción	17
Comparación de fracciones	18
Repaso de la adición y la sustracción de fracciones comunes y expresiones decimales	20
Repaso de la multiplicación de expresiones decimales	21
Ejercicios	22
2. Multiplicación y división de fracciones comunes	26
Multiplicación de fracciones comunes	26
Recíproco de una fracción	28
División de fracciones comunes	29
Fracción compleja	31
Ejercicios	32
3. Problemas típicos de fracciones	36
Ejercicios	38
4. División de expresiones decimales	43
Repaso de la división de números naturales. La división inexacta	43
División de expresiones decimales: el divisor es un número natural ..	45
El divisor es una expresión decimal	47
Fracciones comunes y expresiones decimales. Obtención de expresiones decimales finitas e infinitas	51

Concepto número fraccionario	54
Ejercicios	56
5. Operaciones con expresiones decimales	59
Reglas de redondeo. Valores aproximados para expresiones decimales	59
Cálculo con valores aproximados	63
Ejercicios	67
Ejercitación variada	70
TANTO POR CIENTO	80
Capítulo C. Tanto por ciento	81
1. Significado del tanto por ciento. Tanto por ciento de un número	81
Ejercicios	83
2. Qué tanto por ciento es un número de otro	85
Ejercicios	86
3. Hallar el número, conocido un tanto por ciento de él	88
Ejercicios	88
4. El tanto por ciento y las gráficas	89
Ejercicios	91
Ejercitación variada	93
EL ARTE DE PLANTEAR ECUACIONES	96
Capítulo D. Ecuaciones	98
1. Concepto ecuación	98
Ejercicios	103
2. Procedimiento para la solución de ecuaciones	104
Ejercicios	106
3. Solución de problemas mediante ecuaciones	108
Ejercicios	110
Ejercitación variada	113
LAS PROPORCIONES	115
Capítulo E. Proporcionalidad	116
1. Razones y proporciones	116
Ejercicios	121
2. Proporcionalidad	125
Proporcionalidad directa	125
Proporcionalidad inversa	129
Ejercicios	133
3. Razones, fracciones, tanto por ciento y proporciones	135
Ejercicios	137
Ejercitación variada	141

LA GEOMETRÍA	146
Capítulo F. Geometría	147
1. Repaso y profundización sobre figuras y cuerpos	147
Figuras planas y cuerpos	147
Algunas propiedades fundamentales de la planimetría	148
Ejercicios	149
2. Repaso y profundización de la igualdad geométrica y de los movimientos	151
Realización sucesiva de movimientos (composición)	151
Propiedades especiales de la reflexión, la traslación y la simetría central	154
Ejercicios	156
3. Ángulos. Repaso y profundización	160
Definición de ángulo	160
Clasificación de los ángulos según su amplitud	162
Ángulos consecutivos	163
Ángulos adyacentes	164
Ángulos opuestos por el vértice	167
Ejercicios	170
4. Ángulos entre paralelas	176
Ejercicios	182
5. Triángulos	187
Clasificación de los triángulos	187
Relaciones entre lados y ángulos de un triángulo	189
Desigualdad triangular	191
Teoremas sobre los ángulos de un triángulo	192
Ejercicios	195
6. Volumen de un ortoedro	200
Unidades de volumen	202
Unidades de capacidad	204
Ejercicios	205
Ejercitación variada	209
Respuestas de los ejercicios	215
Contenidos para recordar	244

EL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

A finales del siglo IV a.n.e., Euclides de Alejandría, uno de los sabios griegos más famosos de la historia, escribía una obra en trece libros en los que recogía toda la aritmética, el álgebra y la geometría conocidas en su época.

Esta obra se titula los *Elementos* y no solo es la primera obra matemática destacada que ha llegado hasta nuestros días, sino que ha sido la más difundida de su clase durante 24 siglos y, sin duda, la que universalmente ha ejercido mayor influencia en los científicos de todos los tiempos.

En el libro VII de los *Elementos*, establece Euclides el concepto mínimo común múltiplo y plantea el problema del modo siguiente:

Dados dos números hallar el menor número que ellos pueden dividir exactamente.

En este capítulo vas a recordar lo que aprendiste en quinto grado sobre el mínimo común múltiplo y aprender una nueva forma de calcularlo.

1. Operaciones básicas de cálculo con números naturales

En quinto grado profundizaste en el cálculo con números naturales y ahora debes saber resolver, sin equivocarte, las **operaciones básicas de cálculo**, así como la aplicación de sus propiedades. Ahora, al iniciar sexto grado, vas a reafirmar y consolidar tus habilidades de cálculo, las cuales tienen una gran importancia ya que te ayudarán a comprender los nuevos contenidos del grado.

Comenzaremos realizando una ejercitación variada con las operaciones de cálculo (fig. A1).

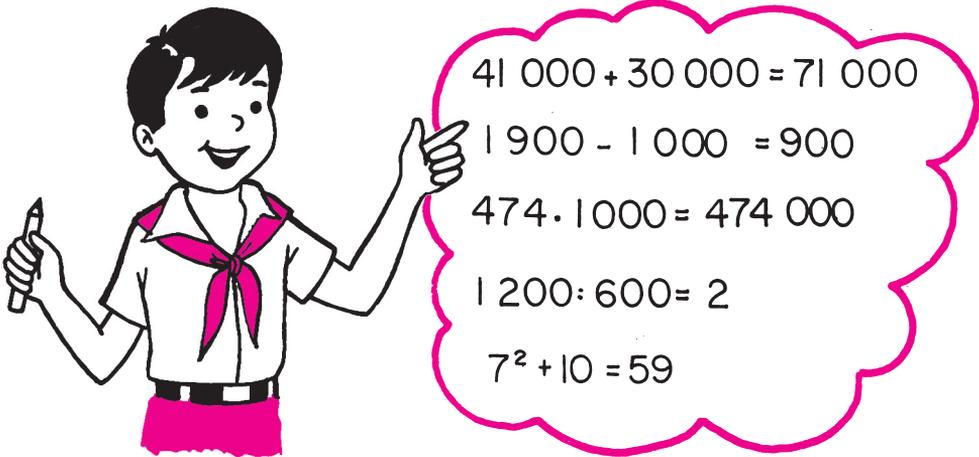


Fig. A 1

Ejercicios (epígrafe 1)

1. Adiciona:

- $13\ 576 + 3\ 055 + 9\ 023 + 4\ 385 + 9\ 876$
- $646 + 64\ 347 + 309 + 6\ 553 + 73$
- $74 + 944 + 9\ 427 + 94\ 578 + 838\ 635$
- $5\ 729 + 5\ 317 + 8\ 020 + 3\ 275 + 9\ 876$
- $735\ 623 + 5\ 846 + 12\ 687 + 904 + 73\ 458$

2. Sustraer y comprobar adicionando:

- | | |
|----------------------|--------------------------|
| a) 126 000 – 58 735 | b) 9 551 600 – 8 947 772 |
| c) 395 678 – 283 949 | d) 2 008 005 – 991 110 |
| e) 900 900 – 400 001 | f) 1 000 000 – 877 654 |

3. Calcula:

- a) $93\,568 + 75\,612 - 15\,234 + 8\,615$
- b) $762\,954 - 243\,129 - 5\,234 + 347\,812$
- c) $856\,724 - 274\,918 + 325\,268 - 492\,748$
- d) $348\,293 + 912\,083 - 975\,423 + 123\,482$
- e) $735\,000 - 468\,085 + 7\,408 - 139\,276$

4. Halla el producto:

- | | |
|---------------------------|-------------------------|
| a) $72\,000 \cdot 340$ | b) $732\,463 \cdot 100$ |
| c) $90\,000 \cdot 8\,600$ | d) $523 \cdot 291$ |
| e) $3\,573 \cdot 917$ | f) $4\,082 \cdot 315$ |
| g) $12\,345 \cdot 643$ | h) $21\,408 \cdot 721$ |
| i) $72\,456 \cdot 4\,008$ | j) $8\,200 \cdot 587$ |
| k) $42\,645 \cdot 6\,400$ | l) $9\,221 \cdot 112$ |

5. Resuelve y comprueba:

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| a) $56\,832 : 24$ | b) $184\,814 : 51$ | c) $48\,500 : 388$ |
| d) $16\,836 : 732$ | e) $5\,623 : 432$ | f) $76\,752 : 369$ |
| g) $12\,008 : 124$ | h) $192\,288 : 96$ | i) $57\,464 : 681$ |
| j) $340\,595 : 85$ | k) $46\,464 : 681$ | l) $78\,758 : 125$ |
| m) $38\,574 : 902$ | n) $12\,705 : 363$ | ñ) $152\,082 : 213$ |
| o) $85\,525 : 311$ | p) $63\,956 : 236$ | q) $186\,300 : 828$ |
| r) $456\,987 : 345$ | s) $105\,204 : 308$ | |

6. Calcula. Ten en cuenta el orden en que se realizan las operaciones.

- a) $20 + 12 : 2 \cdot 3 - 6 \cdot 5 : 2$
- b) $400 : (8 - 6) \cdot 35 - 3\,809$
- c) $7\,245 \cdot 407 + 2\,740 - 2\,958$
- d) $7^2 + 485 \cdot 37$
- e) $481 \cdot 100 - (3\,700 - 2\,814)$
- f) $12^2 (5 + 7)^2$
- g) $3\,235 + 8\,031 - 72\,108 : 36$

7. Si $r = 7\,085$, $s = 384$ y $t = 9\,237$, calcula:

- | | | |
|-----------------------------|----------------|------------------|
| a) $r - s$ | b) $s + t$ | c) $206 + s + r$ |
| d) $t \cdot 700 - 183\,489$ | e) $s : 3 + r$ | |

8. A un número se le resta 7 215 y se obtiene 2 380. ¿Cuál es el número?

9. Adiciona 2 348 a la diferencia de 8 000 y 178.

10. Halla el producto de la suma y la diferencia de los números 2 563 y 987.

11. Halla la quinta parte de la suma de 483 y 1 002.
12. Calcula el promedio de los números del conjunto A :

$$A = \{9\ 210 ; 7\ 548 ; 81\ 093\}$$
13. Sustrae a 2 905 la suma de 487 y 1 002.
14. Si se cuadruplica un número y a este producto se le adiciona el número 120, se obtiene 1 588. ¿Cuál es el número?
- 15*. Tres números consecutivos suman 363. ¿Cuáles son estos números?
- 16*. La suma de dos números es 56 y su diferencia 18. ¿Cuáles son estos números?
17. La diferencia de dos números es 1 400 y el duplo del menor 1 200. Halla el mayor.
18. En 5 cooperativas de la provincia La Habana, dedicadas al cultivo de granos, en un trimestre recolectaron las siguientes cantidades de granos: la primera cooperativa, 500 kg; la segunda, 76 kg más que la primera; la tercera, tanto como las dos primeras; la cuarta, tanto como la primera y la tercera y la quinta, tanto como las tres primeras más 5 kg.
 - a) ¿Cuántos kilogramos de granos se han cosechado entre las 5 cooperativas?
 - b) ¿Cuál es el promedio de kilogramos de granos por cooperativas?

2. Repaso de los divisores y múltiplos de un número natural. Mínimo común múltiplo

Divisores de un número

En quinto grado estudiaste los divisores y los múltiplos de un número natural. En sexto grado vamos a recordarlos, pues te van a ser de gran utilidad para ampliar tus conocimientos.

Ejemplo 1

Halla el conjunto de los divisores de 50.

Los divisores de un número natural son los números que lo dividen exactamente, por eso para buscarlo se descompone el número en todos los pares de **factores posibles** (fig. A2).

Factores

1·50
2·25
5·10



Divisores

1 y 50
2 y 25
5 y 10

Fig. A 2

Luego, el conjunto de los divisores de 50 es:

$$D_{50} = \{1; 2; 5; 10; 25; 50\}$$

Como puedes observar en el ejemplo, **todos los divisores de un número natural son también sus factores.**

En quinto grado aprendiste que se les denomina factores a los términos de la multiplicación y que **todo número natural distinto de cero que divide exactamente a otro es un divisor de él.** Cuando hacemos una caracterización como la anterior decimos que hemos **definido**, en este caso, **divisor de un número natural.** Más adelante estudiarás otras definiciones que es necesario que comprendas y memorices para que puedas entender el contenido.

Definición 1

Divisor de un número natural es todo número natural, distinto de cero, que lo divide exactamente.

Ejemplo 2

Halla los divisores de 8, 13 y 18.

Divisores de 8: 1, 2, 4 y 8.

Divisores de 13: 1 y 13.

Divisores de 18: 1, 2, 3, 6, 9 y 18.

Observa en el ejemplo 2 que hay números como el 8 y el 18 que tienen varios divisores, y otros, como el **13** que sólo tienen como divisores al 1 y a sí mismo. A números como el 13 se les llama **números primos.**

Definición 2

Un número es primo si es diferente de 1 y solo es divisible por 1 y por sí mismo.

Es conveniente que memorices los números primos menores que 30:

Números primos menores que 30:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

Todos los demás números naturales diferentes de uno que no son primos, se llaman **números compuestos**. En el ejemplo 2, el 8 y el 18 son compuestos, pues no son primos.

Ejemplo 3

Escribe el conjunto A de todos los divisores de 24 y el conjunto B de todos los divisores de 24 que son números primos.

$$A = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$$

$$B = \{2; 3\}$$

Observa que todos los elementos que se encuentran en el conjunto B , se encuentran en el conjunto A . Cuando esto sucede, decimos que B es un **subconjunto de A** y escribimos:

$B \subset A$ (\subset : símbolo que indica subconjunto).

Esta relación también la puedes representar gráficamente (fig. A3):

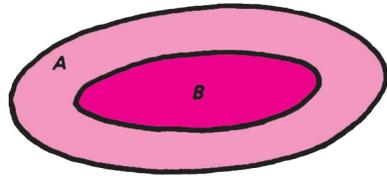


Fig. A 3

En el ejemplo anterior, vemos que el número 12 y otros pertenecen al conjunto A , pero no pertenecen al conjunto B . Estas relaciones las podemos expresar mediante símbolos:

$12 \in A$ se lee: 12 **pertenece** a A .

$12 \notin B$ se lee: 12 **no pertenece** a B .

Ejemplo 4

Descompón en factores primos los números 6, 15 y 24.

Descomponer en factores primos significa expresar cada número como un producto en el que todos los factores son números primos. Para ello es conveniente:

Escribes:

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

En la mente:

$$\begin{array}{l} 6 : 2 = 3 \\ \downarrow \\ 3 : 3 = 1 \end{array}$$

Dividir sucesivamente por todos los factores primos del número, comenzando por el menor y repitiéndolos si es necesario.

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$\begin{array}{l} 15 : 3 = 5 \\ \downarrow \\ 5 : 5 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$\begin{array}{l} 24 : 2 = 12 \\ \downarrow \\ 12 : 2 = 6 \\ \downarrow \\ 6 : 2 = 3 \\ \downarrow \\ 3 : 3 = 1 \end{array}$$

Múltiplos de un número natural. Mínimo común múltiplo

Podemos definir múltiplo de un número natural de la forma siguiente:

Definición 3

Múltiplo de un número natural, es el número que se obtiene multiplicándolo por un número natural cualquiera.

El conjunto de los múltiplos de un número natural tiene infinitos elementos que incluyen al cero y al propio número.

Ejemplo 5

Escribe el conjunto M_2 de los 8 primeros múltiplos de 2 y el conjunto M_4 de los 6 primeros múltiplos de 4.

$$M_2 = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14\}$$

$$M_4 = \{0; 4; 8; 12; 16; 20\}$$

Observa que en los conjuntos M_2 y M_4 hay elementos que son comunes, es decir, que pertenecen a ambos conjuntos.

Si los representamos gráficamente se obtiene (fig. A4):

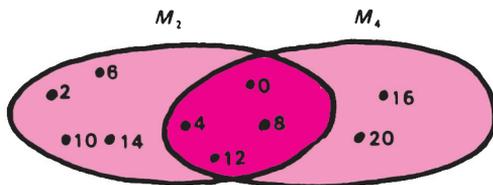


Fig. A 4

Al conjunto formado por los elementos comunes de dos o más conjuntos se le llama **conjunto intersección** y se denota con el símbolo \cap . En el ejemplo 5:

$$M_2 \cap M_4 = \{0; 4; 8; 12\}$$

En el conjunto de los múltiplos comunes del ejemplo 5, observa que hay un elemento, distinto de cero, que es el menor de todos ellos. En este caso es el 4 y se denomina **mínimo común múltiplo** entre 2 y 4.

Definición 4

El **mínimo común múltiplo** (se escribe mcm), de dos o más números naturales dados, es el menor de los **múltiplos comunes** que sea diferente de cero.

Ahora aprenderás un nuevo método para determinar el mcm, el de utilizar la descomposición en factores primos.

Ejemplo 6

Determina el mínimo común múltiplo (mcm) de 72, 18 y 60.

Hay que buscar el menor número que es divisible por 72, 18 y 60 a la vez. Observa que:

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$18 = 2 \cdot 3^2$$

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

El número buscado tiene que tener como factores primos a todos los factores de los números dados, en este caso:

$$2^3, 3^2, 2, 3^2, 2^2, 3, 5$$

Pero como buscamos el menor múltiplo basta tomar:

2^3 pues contiene además a 2 y a 2^2 .

3^2 pues contiene además a 3.

5.

Luego el mínimo común múltiplo se forma multiplicando los factores destacados.

$$\begin{aligned} \text{Se escribe: } \text{mcm}(72; 18; 60) &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ &= 360 \end{aligned}$$

En la práctica, para determinar el mínimo común múltiplo de dos o más números naturales:

- Se descomponen en factores primos los números dados.
- Se toman todos los factores, comunes y no comunes, con su mayor exponente.
- Se multiplican los anteriores factores y el producto obtenido es el mcm.

Ejemplo 7

Halla el mcm entre 5 y 24.

$$\begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$5 = 5$$

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$\begin{aligned} \text{mcm}(5;24) &= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \\ &= 120 \end{aligned}$$

Observa que entre 5 y 24 **no hay factores primos comunes**, es decir, no tienen divisores comunes **diferentes de 1**.

Cuando eso sucede se dice que son **primos entre sí**.

En ese caso el mcm se calcula multiplicando uno por el otro. En el ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{mcm}(5;24) &= 5 \cdot 24 \\ &= 120 \end{aligned}$$

También puedes utilizar el mcm en la resolución de problemas.

Ejemplo 8

Un rollo de alambre puede dividirse exactamente en partes de 14, 15 o 18 m. ¿Cuál es la menor longitud que puede tener dicho rollo?

Al leer el problema seguramente te darás cuenta que hay que buscar un número que sea a la vez múltiplo de 14, 15 y 18; pero como te piden la menor longitud que puede tener, esta la puedes hallar mediante el mcm:

$$\begin{array}{r|l} 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{mcm}(14;15;18) &= 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \\ &= 630 \end{aligned}$$

Respuesta: La menor longitud que puede tener el rollo de alambre es de 630 m.

Ejercicios (epígrafe 2)

- Halla todos los divisores de cada uno de los siguientes números:
a) 12, 18, 30, 48, 84, 90 b) 15, 72, 63, 96, 80, 98
- Escribe todos los números primos que se hallan entre los siguientes números:
a) 0 y 20 b) 20 y 30
c) 40 y 50 d) 60 y 70
e) 70 y 80 f) 80 y 90
- Halla en cada inciso el conjunto de todos los divisores de cada número y subraya los que son primos.
a) 8, 17, 54, 81 b) 10, 15, 66, 92
- Descompón en factores primos los números de los incisos siguientes:
a) 40, 75, 82 b) 52, 69, 80
c) 46, 66, 92 d) 35, 38, 98
- Forma los siguientes subconjuntos del conjunto \mathbb{N} de los números naturales del 1 al 50.
a) C_1 : El subconjunto de todos los números divisibles por 2.
b) C_2 : El subconjunto de todos los números divisibles por 3.

- c) Representa las relaciones entre \mathbb{N} y C_1 , y entre \mathbb{N} y C_2 mediante diagramas.
6. a) Escribe el conjunto M_3 de los ocho primeros múltiplos de 3 y el conjunto M_4 de los ocho primeros múltiplos de 4.
b) Representa gráficamente la intersección de estos dos conjuntos.
7. Halla en los siguientes ejercicios los divisores comunes. Subraya el mayor:
- | | | |
|------------|----------------|----------------|
| a) 12 y 18 | b) 20 y 24 | c) 15 y 22 |
| d) 42 y 56 | e) 21, 28 y 35 | f) 12, 18 y 40 |
8. Determina el mcm de los siguientes números mediante la descomposición en factores primos:
- | | | |
|----------------|----------------|----------------|
| a) 8 y 12 | b) 9 y 30 | c) 24 y 60 |
| d) 27 y 50 | e) 18 y 40 | f) 13 y 26 |
| g) 17 y 23 | h) 54 y 75 | i) 48, 50 y 26 |
| j) 22, 35 y 51 | k) 28, 36 y 38 | l) 31, 44 y 86 |
| m) 16, 60 y 28 | n) 16, 90 y 44 | |
9. ¿Cuál es el menor número de metros de tela que tiene una pieza de la que pueden cortarse partes de 12, 15 ó 20 m exactamente?
10. Halla el menor número de hectáreas de una cooperativa que puede dividirse exactamente entre 12, 15 ó 18 ha.
11. ¿Cuál es el menor número de libretas que puede repartirse exactamente entre 21, 24 ó 30 alumnos?
12. ¿Cuál es la menor cantidad de azúcar que puede ser envasada en paquetes de 150, 40 ó 24 lb?

RESUMEN

Números primos y compuestos

Ejemplos de números primos:
 $\{2;3;5;7;11;13;17;19;23;29...\}$
 Ejemplos de números compuestos:
 $\{4;6;8;9;10;12;14;15;16;18;20...\}$

Un número es **primo**, si es diferente de 1 y sólo es divisible por 1 y por sí mismo.
 Todos los números diferentes de 1 que no son primos son **compuestos**.

Conjuntos

A: Conjunto de todos los divisores de 12.
 B: Conjunto de todos los divisores de 12 que son primos.
 $A = \{1;2;3;4;6;12\}$ $B = \{2;3\}$
 $B \subset A$ (B subconjunto de A).
 $4 \in A$ (4 pertenece a A).
 $4 \notin B$ (4 no pertenece a B).
 Gráficamente:

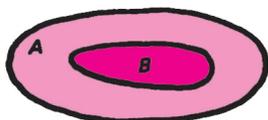


Fig. A 5

Cuando todos los elementos de un conjunto pertenecen también a otro conjunto, decimos que es un **subconjunto** del otro y utilizamos el símbolo \subset (fig. A5).
 Para decir que un elemento **pertenece** a un conjunto utilizamos el símbolo \in y para decir que **no pertenece** el símbolo \notin .

M_3 : Conjunto de los 7 primeros múltiplos de 3.
 M_6 : Conjunto de los 5 primeros múltiplos de 6.
 $M_3 = \{0;3;6;9;12;15;18\}$
 $M_6 = \{0;6;12;18;24\}$
 Conjunto intersección:
 $M_3 \cap M_6 = \{0;6;12;18\}$
 Gráficamente:

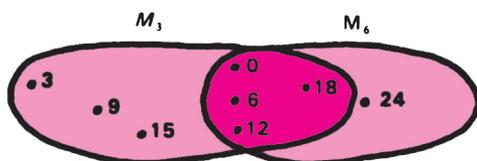


Fig. A 6

Conjunto intersección, se le llama al conjunto de elementos comunes que pertenecen a 2 o más conjuntos y se denota con el símbolo \cap (fig. A6).

RESUMEN

Descomposición de números naturales en factores primos

Descomposición del número 18 en factores primos:

$$\begin{array}{r|l}
 18 & 2 \\
 9 & 3 \\
 3 & 3 \\
 1 & \\
 \hline
 & 18 = 2 \cdot 3^2
 \end{array}$$

Divides sucesivamente por todos los factores primos del número comenzando por el menor y repitiéndolo si es necesario.

El cociente final será 1 y el producto de todos los divisores será igual al número.

Mínimo común múltiplo de dos o más números

El mcm de 20 y 30

$$M_{20} = \{20; 40; 60; 80; 100; 120; 140; \dots\}$$

$$M_{30} = \{30; 60; 90; 120; 150; \dots\}$$

$$\text{mcm}(20; 30) = 60$$

Se denomina **mcm** al menor de todos los múltiplos comunes de dos o más números.

Determinación del mcm en la práctica

Mínimo común múltiplo de 12 y 18

$$\begin{array}{r|l}
 12 & 2 & 18 & 2 \\
 6 & 2 & 9 & 3 \\
 3 & 3 & 3 & 3 \\
 1 & & 1 & \\
 \hline
 & & &
 \end{array}$$

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

$$18 = 2 \cdot 3^2$$

$$\begin{aligned} \text{mcm}(12; 18) &= 2^2 \cdot 3^2 \\ &= 36 \end{aligned}$$

Se descomponen en factores primos.

Se toman los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

Se halla el producto de los factores y obtenemos el **mcm**.

Ejercitación variada

1. Calcula:

- a) $26\ 708 + 593 + 813\ 507 + 78$
- b) $91\ 646 + 79 + 198 + 346\ 582$
- c) $73\ 528 + 648 + 23\ 457 + 63$
- d) $632\ 438 + 95\ 623 + 4\ 829 + 715$

2. Resuelve y comprueba adicionando:

- | | |
|------------------------|------------------------|
| a) $75\ 083 - 46\ 071$ | b) $93\ 475 - 82\ 697$ |
| c) $64\ 000 - 37\ 028$ | d) $80\ 000 - 50\ 037$ |

3. Halla el producto:

- a) $24\ 684 \cdot 73$
- c) $73\ 046 \cdot 62$
- e) $3\ 484 \cdot 384$
- g) $4\ 708 \cdot 962$
- i) $6\ 930 \cdot 603$

- b) $73\ 598 \cdot 84$
- d) $48\ 509 \cdot 59$
- f) $5\ 273 \cdot 672$
- h) $5\ 693 \cdot 804$
- j) $32\ 705 \cdot 900$

4. Resuelve y comprueba:

- a) $267\ 895 : 45$
- c) $952\ 714 : 82$
- e) $743\ 206 : 63$
- g) $6\ 952\ 041 : 776$
- i) $638\ 943 : 314$

- b) $731\ 265 : 68$
- d) $292\ 513 : 14$
- f) $4\ 223\ 410 : 351$
- h) $846\ 352 : 424$
- j) $456\ 732 : 525$

5.* Halla el término desconocido con la operación necesaria.

$$\begin{array}{r} \text{a) } \quad \text{***} \\ + 145 \\ \hline 438 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{b) } \quad 998 \\ - \text{***} \\ \hline 136 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{c) } \quad \text{***} \quad \underline{\hspace{1cm}} 25 \\ \hline 32 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{d) } \quad \text{****} \quad \underline{\hspace{1cm}} 51 \\ \hline 90 \\ \text{(resto 10)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{e) } \quad 1\ 206 \quad \underline{\hspace{1cm}} \text{***} \\ \hline 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{f) } \quad 3\ 190 \quad \underline{\hspace{1cm}} \text{**} \\ \hline 70 \\ \text{(resto 40)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{g) } \quad 94 \\ + \text{***} \\ \hline 342 \end{array}$$

$$\text{h) } 94 \text{***} = 3\ 008$$

6. Busca el divisor y escríbelo en tu libreta:

$$\text{a) } 520 : \underline{\hspace{1cm}} = 52$$

$$\text{b) } 1\ 500 : \underline{\hspace{1cm}} = 15$$

$$\text{c) } 9\ 000 : \underline{\hspace{1cm}} = 90$$

$$\text{d) } 800 : \underline{\hspace{1cm}} = 80$$

$$\text{e) } 3\ 000 : \underline{\hspace{1cm}} = 2$$

$$\text{f) } 50\ 000 : \underline{\hspace{1cm}} = 5$$

7. Busca el dividendo y cópialo en tu libreta:

$$\text{a) } \underline{\hspace{1cm}} : 100 = 25$$

$$\text{b) } \underline{\hspace{1cm}} : 10 = 34$$

$$\text{c) } \underline{\hspace{1cm}} : 1\ 000 = 65$$

$$\text{d) } \underline{\hspace{1cm}} : 100 = 40$$

8. ¿Por qué número se debe multiplicar 1 621 para obtener 614 359 de producto?

9. ¿Cuál es el número que dividido entre 243 da 1 306 de cociente y resto 92?

10. Si el producto de tres factores es 38 295 y dos de ellos son 23 y 45, ¿cuál es el tercero?

11. La suma de dos números es 5 487 y uno de ellos es 2 615. ¿Cuál es el otro? ¿Cuál es su producto?
12. Busca números que al restárselos o sumárselos a 745 el resultado sea divisible por 87. ¿Cuál es el cociente en cada caso?
13. ¿Qué número ha de sumarse a 38 para que dividido por 27 dé 6 por cociente?
14. El sonido recorre 340 m en cada segundo. Si oímos el estampido de un cañón 5 s después del disparo, ¿a qué distancia nos encontramos?
15. Un viajero recorre 12 km en 60 min. ¿Cuántas horas empleará en recorrer 48 km?
- 16*. Dos trenes parten de un mismo punto y a la misma hora, pero en sentido contrario. Marchan a velocidades de 56 y 47 km por hora; después de 7 h de marcha, ¿qué distancia los separa?
17. En un comedor obrero se consumen diariamente 16 000 g de productos cárnicos. Si cada obrero come 40 g, ¿cuántos obreros pueden almorzar en dicho comedor en un día?, ¿cuántos kilogramos se consumen a la semana? (Semana de 6 días.)
18. Ibory nació en septiembre y tiene 6 años cumplidos, y su hermano Alejandro en febrero cumplió 12 años. Di cuántos meses ha vivido cada uno de los dos hermanos, si nos encontramos en el mes de noviembre.
19. Argumenta por qué el mcm de varios números no puede ser menor que el mayor de los números dados.
20. Escribe el conjunto A de todos los múltiplos comunes de los números 6 y 8, que sean menores que 50.
21. Halla los 4 múltiplos comunes más pequeños de 6 y 15.
22. ¿Cuál es el menor divisor común a varios números?
23. Descompón los siguientes números en factores primos:

a) 20	b) 35	c) 70	d) 100	e) 32
f) 81	g) 77	h) 98	i) 112	j) 320
24. Determina el mcm de:

a) 8, 12 y 27	b) 24, 36 y 40
c) 9, 14 y 21	d) 80, 72 y 90
e) 60, 35 y 28	f) 42, 37 y 54
g) 30, 82 y 4	h) 45, 85 y 38
i) 69, 20 y 92	j) 44, 50 y 70
25. a) Halla el conjunto A de los factores de 12, y B de los de 18.
 b) Escribe el conjunto intersección de los conjuntos A y B .
 c) Escribe el mayor de los factores comunes y el menor.
 d) ¿Cuál es el mcm de 12 y 18?
26. a) Escribe los múltiplos de 3, hasta 36.
 b) Escribe los múltiplos de 4, hasta 36.
 c) Representa dichos múltiplos gráficamente, destacando la intersección.

27. Si dos números son primos, ¿cómo puedes determinar el mcm de ambos números?
28. Si uno de dos números es primo, ¿qué puedes hacer para hallar el mcm de los dos números?
29. a) Escribe el conjunto A con los divisores de 12 y el conjunto M con los divisores de 30.
b) Escribe el conjunto D con los divisores comunes.
c) ¿Cuál es el mayor de ellos?
d) ¿Cuál es el menor?
- 30*. De las 120 clases de piano en el curso, Grisell asistió a un número de ellas que es múltiplo de 2, 5, 10 y 22. ¿A cuántas clases asistió?
31. Un ómnibus sale cada 4 días, otro cada 5 días y otro cada 6 días, de Ciudad de La Habana para Santiago de Cuba. ¿Cada cuánto tiempo partirán los tres de Ciudad de La Habana el mismo día?

CÁLCULO CON FRACCIONES

En el libro de quinto grado ya aprendiste que en la matemática de los antiguos egipcios y los griegos, las fracciones de numerador 1 desempeñaban un importante papel. Los egipcios, por ejemplo, preferían escribir la fracción $\frac{7}{29}$ como la suma de las fracciones $\frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{87} + \frac{1}{232}$.

Otra era la costumbre de los antiguos babilonios, como lo recuerdan sus tablillas de barro con escrituras cuneiformes. En ellas se observa que expresaban los números fraccionarios como suma de fracciones cuyos denominadores eran todos potencias de 60. Por ejemplo, en una tablilla de la colección de la Universidad de Yale en los Estados Unidos se encuentra una expresión como la siguiente:

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$$

Si efectuáramos esta suma de fracciones, obtendríamos aproximadamente el valor 1,414 215.

Con este procedimiento te darás cuenta de que el cálculo con fracciones se hacía muy complejo, al extremo que en la época del Imperio Romano se necesitaba la ayuda de tablas para calcular con fracciones.

La teoría y el cálculo de las fracciones como la utilizamos en la actualidad, se le atribuye al matemático hindú Brahmagupta (600 años de nuestra era).

Gracias a los matemáticos indios, que revolucionaron el arte de calcular, podemos ahora expresar y calcular con fracciones de una forma más simple, como ya viste en quinto grado, y que en sexto grado podrás profundizar.

1. Repaso

Repaso del concepto fracción

En quinto grado aprendiste que se llama fracción a un par de números naturales escritos en la forma $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) que representan una o varias partes iguales de una unidad entera o de un conjunto (fig. B 1).

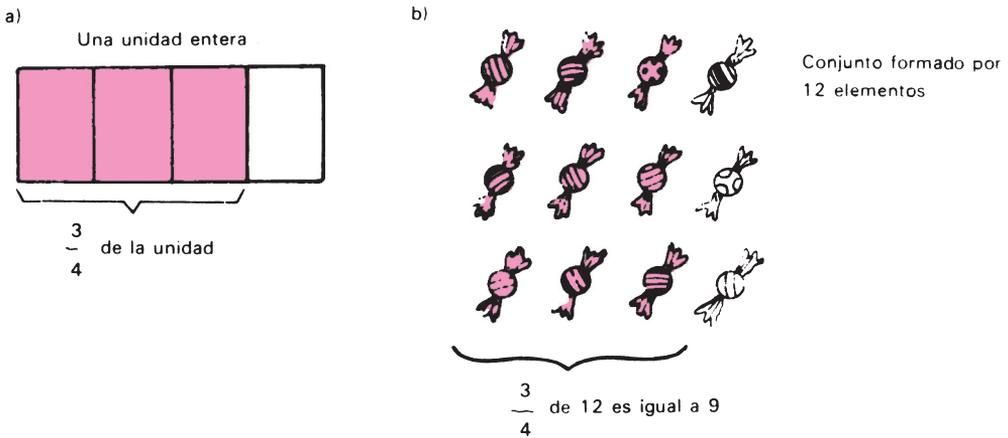


Fig. B 1

Igualmente aprendiste que en la práctica una fracción representa también una división indicada, por lo que esta se puede simplificar al simplificar la fracción.

Ejemplo 1

Escribe en forma de fracciones y simplifica:

- a) 8 : 32 b) 48 : 72 c) 72 : 12

a) Escribimos como fracción: $\frac{8}{32}$

El 8 es divisor de 32, luego podemos simplificar.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{8}}}{\underset{4}{\cancel{32}}} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Entonces } 8 : 32 = \frac{1}{4}$$

b) $\frac{48}{72}$

48 no es divisor de 72, pero 24 que es la mitad de 48, sí es divisor de este y de 72.

Simplificamos entonces dividiendo entre 24:

$$\frac{\overset{2}{\cancel{48}}}{\underset{3}{\cancel{72}}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Luego: } 48 : 72 = \frac{2}{3}$$

c) $\frac{72}{12}$

12 es divisor de 72 porque $6 \cdot 12 = 72$. Entonces simplificamos dividiendo entre 12:

$$\frac{\overset{6}{\cancel{72}}}{\underset{1}{\cancel{12}}} = \frac{6}{1} = 6$$

$$\text{Luego: } \frac{72}{12} = 6$$

Comparación de fracciones

Sabes comparar y ordenar fracciones. Si tienes dudas, busca al final de este libro en las páginas dedicadas al recordatorio.

También aprendiste un criterio, el de los productos cruzados, que te sirvió para determinar si dos fracciones son equivalentes; verás que este criterio te va a servir, además, para comparar fracciones cualesquiera.

Sabes que: $\frac{5}{8} < \frac{7}{8}$ porque $5 < 7$.

Observa que para estas fracciones también se cumple:

$$5 \cdot 8 < 8 \cdot 7$$

Si $\frac{7}{5} > \frac{5}{8}$, se cumple también que $7 \cdot 8 > 5 \cdot 5$.

Si comparamos fracciones, se cumple:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ siempre que } a \cdot d < b \cdot c$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ siempre que } a \cdot d = b \cdot c$$

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \text{ siempre que } a \cdot d > b \cdot c$$

Mediante este análisis podemos reducir la comparación de fracciones a la comparación de los números naturales resultantes de hallar los productos cruzados de sus términos.

Ejemplo 2

Compara y fundamenta:

a) $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{4}$ b) $\frac{5}{3}$ y $\frac{3}{7}$ c) $\frac{4}{8}$ y $\frac{8}{16}$

a) Hallas los productos cruzados de los términos y comparas:

En la mente:

$$3 \cdot 4 < 4 \cdot 5$$

entonces $\frac{3}{4} < \frac{5}{4}$

Fundamentas:

porque $3 \cdot 4 < 4 \cdot 5$

b) Procedes de igual forma:

En la mente:

$$5 \cdot 7 > 3 \cdot 3$$

por tanto $\frac{5}{3} > \frac{3}{7}$

Fundamentas:

porque $5 \cdot 7 > 3 \cdot 3$

c) En la mente:

$$4 \cdot 16 = 8 \cdot 8$$

luego $\frac{4}{8} = \frac{8}{16}$

Fundamentas:

porque $4 \cdot 16 = 8 \cdot 8$

Es importante que no olvides que siempre debes multiplicar primero $a \cdot d$ y después $b \cdot c$.

Repaso de la adición y la sustracción de fracciones comunes y expresiones decimales

Ya has aprendido que la adición y sustracción de fracciones se reduce a la adición y sustracción de números naturales.

Ejemplo 3

Calcula:

a) $\frac{3}{15} + \frac{13}{20}$ b) $\frac{17}{18} - \frac{7}{10}$ c) $5 - 2\frac{5}{8}$

a) Como ya has aprendido a hallar el mcm de números naturales, puedes hallar el menor denominador común de las fracciones aplicando ese procedimiento. Hallas el mcm mediante la descomposición en factores primos de 15 y 20:

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ & 5 \\ & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ & 2 \\ & 5 \\ & 1 \end{array} \quad \text{mcm}(15;20) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

Amplías las fracciones a denominador 60 y procedes como ya sabes:

$$\frac{3}{15} + \frac{13}{20} = \frac{12}{60} + \frac{39}{60} = \frac{12+39}{60} = \frac{51}{60}$$

b) Hallas el mcm de 18 y 10.

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ & 3 \\ & 3 \\ & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ & 5 \\ & 1 \end{array} \quad \text{mcm}(18;10) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$$

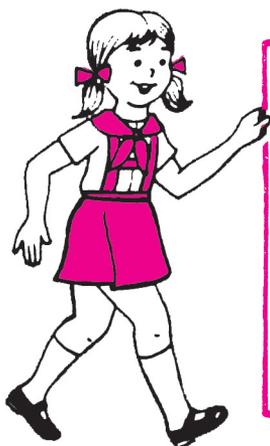
Amplías las fracciones a denominador 90 y procedes como ya sabes:

$$\frac{17}{18} - \frac{7}{10} = \frac{85}{90} - \frac{63}{90} = \frac{85-63}{90} = \frac{22}{90} = \frac{11}{45}$$

c) Sabes que $5 = \frac{5}{1}$, luego plantearás:

$$\frac{5}{1} - \frac{21}{8} = \frac{40}{8} - \frac{21}{8} = \frac{40-21}{8} = \frac{19}{8} = 2\frac{3}{8}$$

Debes recordar que las expresiones decimales se adicionan y sustraen como si fueran números naturales, colocándolas de modo que la coma quede debajo de la coma (fig. B2).



$\begin{array}{r} 28,27 \\ 4,5 \\ + 26,857 \\ \hline 59,627 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3,642 \\ - 1,537 \\ \hline 2,105 \end{array}$
--	---

Fig. B 2

Repaso de la multiplicación de expresiones decimales

No olvides que las expresiones decimales se multiplican como los números naturales. El producto tiene tantos lugares decimales como tengan los dos factores juntos (fig. B3).



$\begin{array}{r} 0,64 \cdot 8 \text{ (2 cifras decimales)} \\ \hline 5,12 \text{ (2 cifras decimales)} \end{array}$	$\begin{array}{r} 0,025 \cdot 0,5 \text{ (4 cifras decimales)} \\ \hline 0,0125 \text{ (4 cifras decimales)} \end{array}$
--	---

Fig. B 3

Ejercicios (epígrafe 1)

1. Completa (fig. B4):

a)

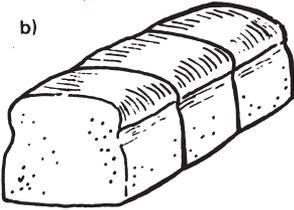


Este queso lo partimos en dos partes iguales

Cada parte es _____ queso.

Con números se escribe: _____

b)

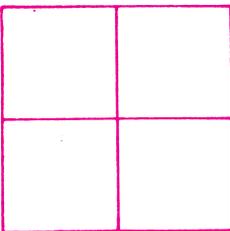


Una libra de pan la dividimos en tres partes iguales.

Cada parte es _____ del pan.

Se escribe: _____

c)



Este cuadrado está dividido en 4 partes iguales.

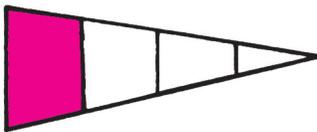
Cada parte es _____ del cuadrado.

Se escribe: _____

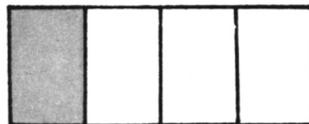
Fig. B 4

2. ¿Cuál de estas figuras está dividida en cuartos (fig. B5)? Argumenta tu respuesta.

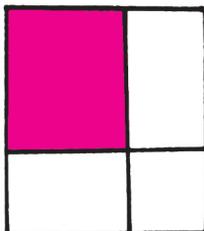
a)



b)



c)



d)

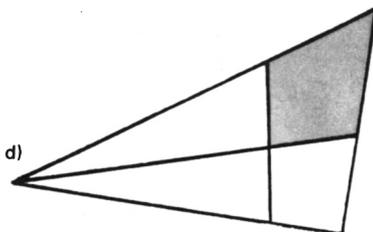


Fig. B 5

3. Escribe en forma de fracción y simplifica:

- a) 16:32
- d) 9:33
- g) 65:26

- b) 24:48
- e) 10:18
- h) 360:60

- c) 52:26
- f) 15:25
- i) 300:50

4. Encierra en un cuadrado las fracciones menores que la unidad y en un círculo

las fracciones iguales o mayores que la unidad: $\frac{2}{7}, \frac{7}{2}, \frac{4}{4}, \frac{3}{9}, \frac{3}{6}, \frac{3}{3}, \frac{17}{8}, \frac{13}{13}, \frac{1}{5}, \frac{5}{9}, \frac{13}{14}$.

- a) Las fracciones encerradas en cuadrados son fracciones _____.
- b) Las fracciones encerradas en círculos son fracciones _____.
- c) Las fracciones que representan una unidad tienen el numerador _____ al denominador.
- d) Representa como número mixto dos de las fracciones impropias señaladas.

5. Responde:

- a) ¿Cuántos sextos hay en una unidad?
- b) ¿Cuántos tercios tiene el número mixto $2\frac{1}{3}$?
- c) ¿Cuántos quintos tiene el número $6\frac{2}{5}$?
- d) ¿Cuántos cuartos hay en $3\frac{1}{4}$?

6. Cinco niños van a repartirse \$4. ¿Qué fracción de peso le toca a cada uno? ¿A cuántos centavos equivale?

7. ¿Cuánto es:

- a) $\frac{1}{5}$ de 15 mazorcas?
- b) $\frac{1}{4}$ de 24 @ ?
- c) $\frac{1}{8}$ de 48 m?
- d) $\frac{1}{3}$ de 60 niños?

8. Si el precio de una docena de botones es 48 ¢, ¿cuánto vale $\frac{3}{4}$ de docena?

9. Teresita empleó $\frac{1}{6}$ de hora peinándose, Paquita 11 min. ¿Quién empleó más tiempo? ¿Cuánto más?

10. De un grupo de 72 niños, 24 tienen puesto el uniforme.

- a) ¿Qué fracción representa del total?
b) Escribe otras 3 fracciones que representen esta misma fracción.

11. En una conferencia de 100 asistentes, 25 son hombres y 75 mujeres.

- a) ¿Qué fracción representa cada parte?
b) Escribe 3 fracciones equivalentes a cada una de las anteriores.

12. De un garrafón se sacan los $\frac{3}{4}$ del vino que contiene y quedan 4 litros.

¿Cuántos litros contenía al principio?

Compara los pares de fracciones siguientes. Fundamenta hallando los productos cruzados:

13. a) $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{5}$ b) $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ 14. a) $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{12}$ y $\frac{3}{8}$

c) $\frac{7}{20}$ y $\frac{14}{40}$ d) $\frac{8}{30}$ y $\frac{0}{20}$ c) $\frac{7}{15}$ y $\frac{3}{4}$ d) $\frac{14}{36}$ y $\frac{7}{18}$

15. De una cajita que contenía figuritas plásticas, Luisito recibe $\frac{3}{7}$ de su contenido y Elena $\frac{4}{7}$. ¿Cuál de los dos recibe mayor cantidad?

Calcula:

16. a) $\frac{1}{6} + \frac{5}{18}$ b) $\frac{1}{4} + \frac{7}{10}$

17. a) $\frac{5}{12} - \frac{7}{18}$ b) $\frac{11}{20} - \frac{8}{15}$

c) $\frac{5}{6} + \frac{5}{21}$ d) $\frac{2}{7} + \frac{4}{15}$

c) $\frac{15}{24} - \frac{20}{32}$ d) $\frac{4}{27} - \frac{1}{36}$

e) $\frac{14}{35} + \frac{12}{25}$ f) $\frac{11}{24} + \frac{15}{36}$

e) $3 - 1\frac{1}{3}$ f) $4 - 2\frac{3}{5}$

g) $4\frac{1}{9} + 6\frac{1}{10}$ h) $3\frac{1}{11} + 5\frac{5}{6}$

g) $4\frac{13}{24} - 2\frac{1}{12}$ h) $8 - 3\frac{4}{15}$

Calcula:

18. a) $0,7 + 0,33 + 1,98 + 5,8$
b) $0,041 + 13,82 + 6,0 + 0,55$
c) $2,88 + 0,33 + 1,47 + 5,5$
d) $15,008 + 7,403 - 0,321$
e) $11,003 - 2,807 + 5,8$

19. a) $0,3 + 0,77 + 1,82$
b) $12,19 + 11,2 + 4,3 + 0,68$
c) $33,07 - 28,7 - 2,87$
d) $2\ 500,8 - 1\ 328,7 + 5,041$
e) $2\ 700,4 + 328,46 - 1\ 999,8$

20. Un depósito de agua está lleno hasta los $\frac{2}{3}$. Se añade agua hasta llenar $\frac{1}{4}$ más del depósito.

- a) ¿Qué parte queda llena?
b) ¿Qué parte falta para llenarlo?

21. Un niño se come un pedazo de pastel que es la sexta parte de este; luego se come otro que corresponde a $\frac{2}{5}$ del pastel.

¿Qué parte queda del pastel?

22*

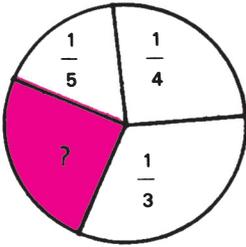


Fig. B 6

Este círculo se ha dividido en 4 sectores desiguales (fig. B6). En tres de ellos se ha indicado qué parte del círculo representan. Averigua qué parte del círculo representa el cuarto sector.

23. Un tercio de los alumnos de un aula están leyendo y $\frac{2}{5}$ están dibujando. Los demás juegan en el patio.
- ¿Qué parte de los alumnos están ocupados en el aula?
 - ¿Qué parte juega en el patio?
 - Si la clase tiene 30 alumnos, ¿cuántos se dedican a cada actividad?
24. La mamá de Luis hizo 3 pasteles de guayaba. A la hora de la merienda Luis se sirvió $\frac{3}{8}$ de uno de los pasteles. ¿Cuánto queda de los 3 pasteles que hizo la mamá de Luis?
25. Elisa tenía 4 m de cinta. Gastó $1\frac{1}{6}$ m en adornar una bolsa para guardar pañuelos. ¿Cuánto mide la cantidad de cinta que queda?
26. Un tablón de $3\frac{1}{4}$ dm se cepilló a $2\frac{5}{8}$ dm. ¿Cuánto se le rebajó?
27. Para confeccionar varias prendas de vestir una modista utiliza las siguientes cantidades de tela: para la primera, 1,62 m; para la segunda, 0,76 m; para la tercera, 2,15 m y para la cuarta, 1,45 m. ¿Cuántos metros de tela utilizó en total?
28. De un rollo de tela que contenía 10 m se cortan primero 4,20 m y después 3,45 m (fig. B7). ¿Qué cantidad de tela queda en el rollo?

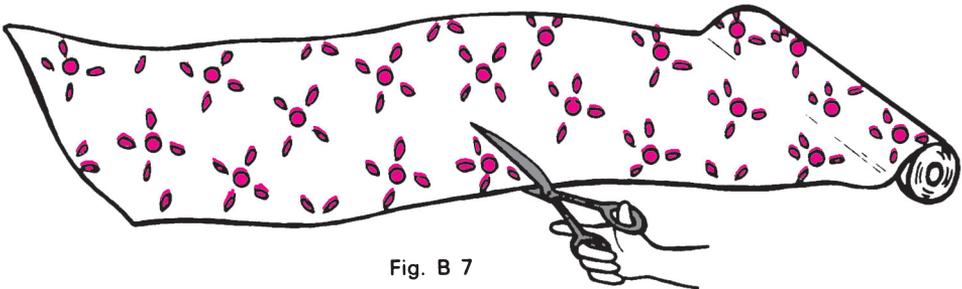


Fig. B 7

- 29* Alberto, que tiene \$0,60, quiere reunir \$3,75. Pide a su padre \$1,75 y este le da \$0,17 menos de lo que le pide, y a su hermano \$0,30 y este le da \$0,15 más de lo pedido. ¿Cuánto le faltó para completar lo que quiere reunir?

Halla el producto:

30. a) $0,376 \cdot 9 \cdot 684$
 b) $194,82 \cdot 509$
31. a) $36,264 \cdot 750$
 b) $9 \cdot 246 \cdot 6,08$

- c) $989,6 \cdot 58,3$
- d) $0,005 \cdot 8 \cdot 0,009 \cdot 3$
- e) $0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,4$
- f) $0,002 \cdot 0,2 \cdot 0,02$

- c) $39,65 \cdot 80,7$
- d) $0,008 \cdot 0,009$
- e) $39,48 \cdot 10 \cdot 0,4$
- f) $0,05 \cdot 0,1 \cdot 0,9$

32. Se compraron 8 m de determinada tela. Si cada metro costó \$16,75, ¿cuánto se pagó por la tela?
33. Para pagar 5 libretas de \$0,15 cada una, entregué una moneda de \$1. ¿Cuánto me devolvieron?
34. Queremos poner marco a dos cuadros rectangulares de igual tamaño, con listones de madera. Las dimensiones de los marcos son 1,40 m de largo y 0,60 m de ancho. ¿Qué longitud total deben tener los listones que necesitaremos?

2. Multiplicación y división de fracciones comunes

Multiplicación de fracciones comunes

Al igual que los números naturales, las fracciones se pueden multiplicar.

En la práctica puedes utilizar la multiplicación de fracciones para resolver diferentes problemas. Por ejemplo:

Deseas saber el tiempo que inviertes cada semana en practicar la ortografía, si 3 veces a la semana le dedicas $\frac{1}{4}$ de hora (fig. B8).

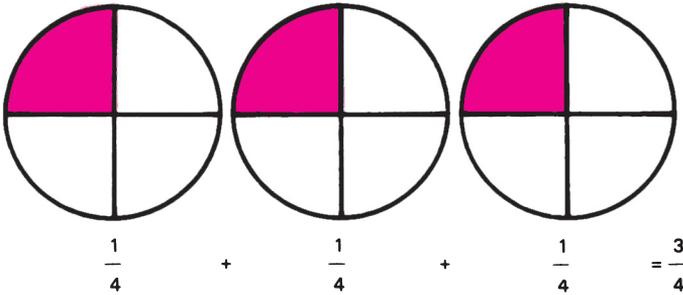


Fig. B 8

Como es una **suma de sumandos iguales** lo puedes también plantear como una multiplicación:

$$3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Necesitas conocer cuántos botones representan las $\frac{3}{4}$ partes de un conjunto de 8 botones (fig. B9).

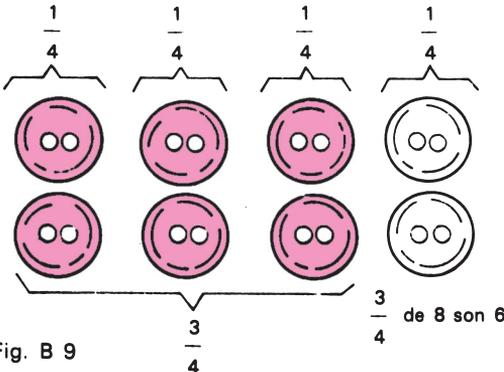


Fig. B 9

Para hallar una **parte fraccionaria de un conjunto**, también se utiliza la multiplicación:

$$\frac{3}{4} \cdot 8 = 6$$

Quieres saber qué parte del pastel se comió tu hermanita, si le sirvieron $\frac{1}{4}$ de la mitad del pastel (fig. B10).

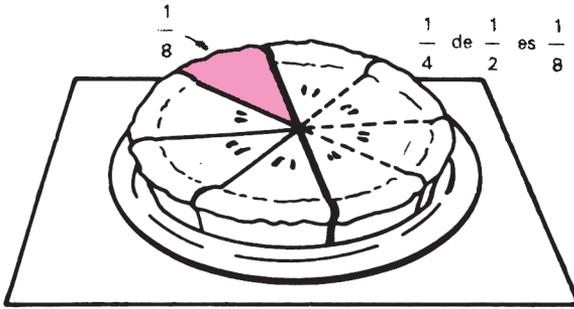


Fig. B 10

Para hallar **una fracción de otra fracción** también se utiliza la multiplicación.

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

En los ejemplos anteriores has visto diferentes representaciones para la multiplicación; pero en todos los casos el producto se calcula de la misma forma. Observa que:

$$3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 1}{1 \cdot 4} = \frac{3}{4} \quad \frac{3}{4} \cdot 8 = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{1} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 1} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8}$$

En todos los casos se han multiplicado las fracciones, **multiplicando numerador por numerador y denominador por denominador**.

Ejemplo 1

Halla el producto:

a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{14} \cdot \frac{7}{12}$ c) $2 \frac{1}{5} \cdot \frac{10}{22}$

a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{3}{8}$ Se multiplican los numeradores y los denominadores.

b) $\frac{5}{14} \cdot \frac{7}{12} = \frac{5 \cdot \cancel{7}^1}{\cancel{14}_2 \cdot 12} = \frac{5}{24}$ Se simplifica primero tanto como sea posible.

En la práctica se procede así, simplificando directamente en los factores:

$$\frac{5}{\cancel{14}_2} \cdot \frac{\cancel{7}^1}{12} = \frac{5}{24}$$

c) $2 \frac{1}{5} \cdot \frac{10}{22} = \frac{11}{5} \cdot \frac{\cancel{10}^1}{\cancel{22}_2}$ Se expresa el número mixto como fracción impropia y se simplifica.

En resumen:

La multiplicación de fracciones se realiza multiplicando los numeradores y multiplicando los denominadores de las fracciones dadas. Es conveniente antes de calcular el producto simplificar las fracciones, tanto como sea posible. De lo contrario debes hacerlo en la fracción resultante. En general:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad (b \neq 0; d \neq 0).$$

Recíproco de una fracción

Antes de comenzar el estudio de la división es necesario que aprendas qué es el recíproco de una fracción, pues lo necesitarás en el procedimiento para dividir.

Definición 1

El recíproco de una fracción $\frac{a}{b}$ es la fracción $\frac{b}{a}$ ($a \neq 0; b \neq 0$).

Observa que dada una fracción, para formar su recíproco basta **invertir** sus términos.

Ejemplo 2

Halla el recíproco de:

a) $\frac{1}{3}$ b) 2 c) $\frac{7}{4}$ d) 0,5

a) $\frac{1}{3} \rightarrow \frac{3}{1}$

Formas otra fracción invirtiendo los términos de la original.

El recíproco de $\frac{1}{3}$ es 3.

b) $2 = \frac{2}{1}$ luego:

El recíproco de 2 es $\frac{1}{2}$.

c) $\frac{7}{4} \rightarrow \frac{4}{7}$

El recíproco de $\frac{7}{4}$ es $\frac{4}{7}$.

Si la fracción dada está expresada como un número mixto $\left(1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}\right)$, primero debes expresarla como impropia y después buscar su recíproco.

d) $0,5 = \frac{5}{10}$ Se escribe la expresión decimal como fracción.

El recíproco de $\frac{5}{10}$ es $\frac{10}{5} = 2$.

División de fracciones comunes

Seguro te preguntarás cómo se pueden dividir las fracciones y qué uso tendrá en la práctica esta operación.

En los números naturales la división significa repartir en **partes iguales**, verás que con las fracciones también se le puede dar esa interpretación y resolver situaciones prácticas. Por ejemplo:

Tienes 5 pintas de helado y las divides exactamente a la mitad, ¿cuántas partes tienes ahora (fig. B11)?

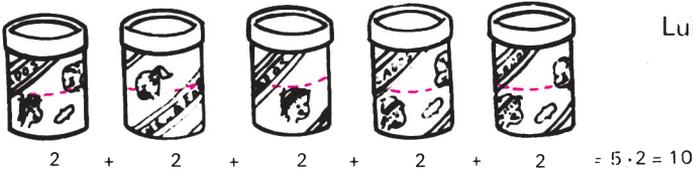


Fig. B 11

Luego:

$$5 : \frac{1}{2} = 10$$

La mitad de un huerto escolar la divides en cuatro partes iguales para sembrar lechugas en una de ellas, ¿qué parte del terreno se dedicará a ese tipo de hortalizas (fig. B12)?

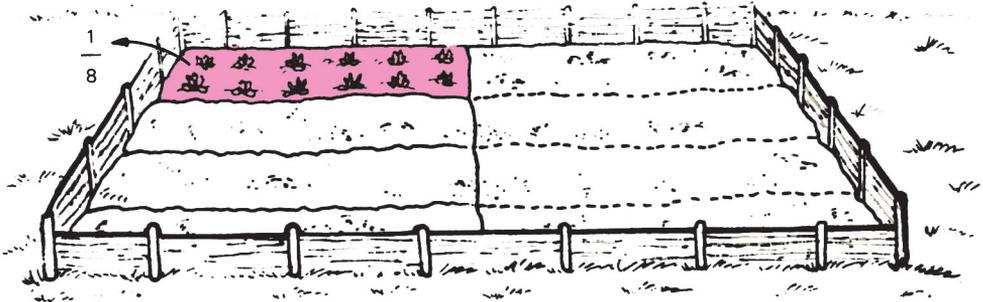


Fig. B 12

Luego:

$$\frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{8}$$

También aprendiste que para hallar qué parte es un conjunto de otro, debes dividir. Luego también podemos darle este significado a la división de fracciones. Por ejemplo: ¿Qué parte es $\frac{1}{2}$ m de tela de $\frac{3}{4}$ m (fig. B13)?

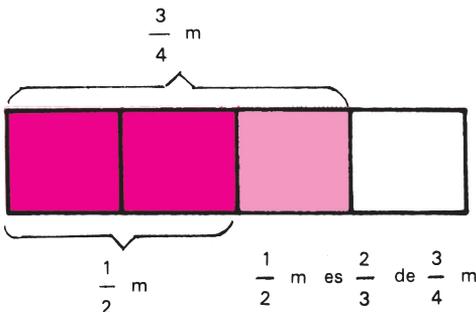


Fig. B 13

Luego:

$$\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$$

Al igual que en la multiplicación, independientemente de las diferentes interpretaciones que puede tener la división, para calcular existe un único procedimiento. Observa que en la figura B11 se reduce la división a una multiplicación:

$$5 : \frac{1}{2} = 5 \cdot 2 = 10$$

$$\text{Análogamente: } \frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} ; \quad \frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

En todos los casos se han dividido las fracciones **reduciéndolas a una multiplicación donde el segundo factor es el recíproco del divisor**.

Ejemplo 3

Halla el cociente:

$$\text{a) } \frac{1}{5} : 3 \quad \text{b) } \frac{2}{3} : \frac{6}{8} \quad \text{c) } 1\frac{1}{2} : \frac{3}{8}$$

$$\text{a) } \frac{1}{5} : 3 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}$$

Transformas la división en la multiplicación del dividendo por el recíproco del divisor y calculas.

$$= \frac{1}{15}$$

$$\text{b) } \frac{2}{3} : \frac{6}{8} = \frac{\cancel{2}^1}{3} \cdot \frac{8}{\cancel{6}_3}$$

Después de transformar la división en multiplicación simplificas y calculas.

$$= \frac{8}{9}$$

$$\text{c) } 1\frac{1}{2} : \frac{3}{8} = \frac{3}{2} : \frac{3}{8}$$

Se transforma el número mixto en una fracción impropia y se calcula.

$$= \frac{\cancel{3}^1}{2} \cdot \frac{8}{\cancel{3}_1} = 4$$

En resumen:

La división de fracciones se realiza transformándola en una multiplicación en la cual el primer factor es el dividendo y el segundo es el recíproco del divisor. Luego se procede como en la multiplicación.

$$\text{En general: } \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad (b \neq 0; c \neq 0; d \neq 0).$$

Fracción compleja

Has aprendido que una fracción es una división indicada:

$$\frac{a}{b} = a : b$$

En consecuencia toda división se puede indicar en forma de fracción. Consideremos estos ejemplos.

Ejemplo 4

Halla el cociente:

$$\text{a) } \frac{\frac{3}{5}}{5} \quad \text{b) } \frac{4}{\frac{3}{4}} \quad \text{c) } \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{2}}$$

Cada inciso es una división indicada en la que el dividendo es el numerador y el divisor es el denominador. Se usa una raya mayor para separar los términos y distinguirla así de la raya de la fracción de las fracciones dadas.

a) El numerador es una fracción, el denominador es un número natural. Efectúas la división indicada.

$$\frac{\frac{3}{5}}{5} = \frac{3}{5} : 5 = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{25}$$

b) El numerador es un número natural, el denominador es una fracción; procedes de la misma forma.

$$\frac{4}{\frac{3}{4}} = 4 : \frac{3}{4} = \frac{4}{1} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

c) En este inciso ambos términos son fracciones.

$$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{6} : \frac{1}{2} = \frac{5}{\cancel{6}_3} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{1} = \frac{5}{3}$$

En los incisos b) y c) en los que has obtenido como cociente una fracción impropia puedes también dar el resultado como número mixto.

Definición 2

Las fracciones que tienen fracciones en su numerador o en su denominador, o en ambos términos a la vez se denominan **fracciones complejas**.

Por tanto:

Toda fracción compleja es una división indicada; cuando efectuamos dicha operación decimos que hemos simplificado la fracción compleja.

Ejercicios (epígrafe 2)

1. Reconoce, escribe y resuelve la multiplicación representada en cada gráfico (fig. B 14).

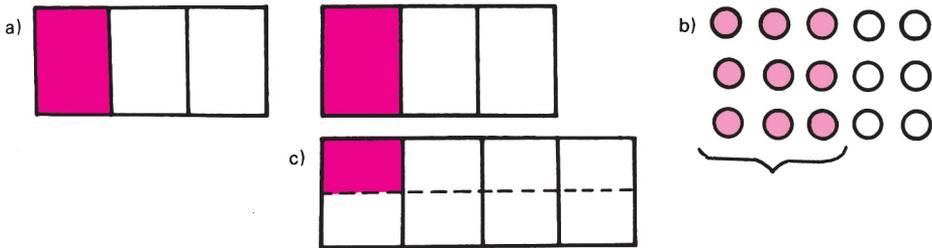


Fig. B 14

Calcula. Simplifica antes de calcular donde sea posible.

2. a) $1 \cdot \frac{1}{3}$

b) $2 \cdot \frac{2}{5}$

3. a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5}$

b) $\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{3}$

c) $2 \cdot \frac{1}{6}$

d) $\frac{1}{5} \cdot 2$

c) $\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{1}$

d) $\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{8}$

e) $\frac{3}{5} \cdot 25$

f) $\frac{7}{8} \cdot 32$

e) $\frac{8}{9} \cdot \frac{9}{8}$

f) $\frac{8}{16} \cdot \frac{4}{16}$

g) $\frac{3}{12} \cdot 8$

h) $\frac{5}{7} \cdot 49$

g) $6 \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{12}$

h) $3 \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{13}$

i) $5 \cdot \frac{3}{6}$

j) $\frac{7}{35} \cdot 14$

i) $\frac{11}{18} \cdot 3 \frac{3}{5}$

j) $2 \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{11}$

4. Calcula:

a) $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{8}$

b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$

c) $\frac{9}{18} \cdot \frac{11}{18}$

d) $\frac{3}{7} \cdot \frac{14}{21}$

e) $\frac{3}{15} \cdot \frac{2}{9}$

f) $\frac{4}{9} \cdot \frac{9}{16}$

g) $3 \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7}$

h) $\frac{4}{5} \cdot 4 \frac{3}{4}$

5. Halla el valor de la variable x ($x \in \mathbb{N}$).

a) $x \cdot \frac{13}{44} = \frac{39}{44}$

b) $x \cdot \frac{17}{35} = \frac{34}{35}$

c) $7 \cdot \frac{x}{23} = \frac{14}{23}$

d) $\frac{13}{14} \cdot \frac{x}{5} = \frac{78}{70}$

e) $x \cdot \frac{2}{16} = 1$

f) $\frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{x}{42}$

6. Triplica la fracción $\frac{6}{7}$.
7. Quintuplica la fracción $\frac{1}{5}$.
8. María toma todos los días a la hora de la merienda $\frac{1}{2}$ pinta de helado. ¿Cuántas pintas de helado se toma en 6 días?
9. Un reloj se adelanta $\frac{1}{2}$ min en cada hora. ¿Cuánto adelanta
a) en 5 h?
b) en un día?
c) en una semana?
10. Tomasito tenía 48 bolas y le dio dos terceras partes a su hermano. ¿Cuántas le quedaron?
11. Carlitos tiene \$ 20 y su hermana tiene $\frac{3}{4}$ de ese dinero. ¿Cuánto dinero tiene la hermana de Carlos?
12. En un destacamento de 45 alumnos las $\frac{2}{3}$ partes son niñas. ¿Cuántos varones hay?
13. Las $\frac{2}{5}$ partes del total de páginas de un libro de Geografía, son mapas. Si el libro tiene 200 páginas, ¿cuántas son de mapas?
14. En el estante de una bodega hay 12 botellas de sirope de naranja, 3 botellas de sirope de limón y 15 botellas de sirope de cola. Cada botella contiene $\frac{7}{10}$ L de sirope. ¿Cuántos litros de sirope hay en total?
15. ¿Qué número se obtiene sumando 14 veces $12\frac{2}{7}$?
16. ¿En cuánto excede el producto de $12 \cdot 3\frac{1}{6}$ al producto de $5 \cdot 4\frac{1}{5}$?
17. En el refrigerador había $\frac{3}{4}$ de libra de mantequilla. La mamá de Sonia gastó la mitad de la mantequilla para hacer un dulce. ¿Qué parte de una libra gastó?
18. Melba tenía $\frac{5}{8}$ de libra de chocolate. Gastó $\frac{2}{5}$ del chocolate que tenía en preparar unas tazas de chocolate. ¿Qué parte de una libra gastó?
19. En las clases de Educación Laboral los alumnos usaron unas tirillas de papel de $1\frac{1}{3}$ dm de largo. En uno de los trabajos realizados tuvieron que emplear $2\frac{3}{4}$ veces dichas tirillas colocadas una a continuación de otra. ¿Qué longitud tiene el conjunto de tirillas así dispuestas?
20. Martha ha conseguido la receta de un bizcocho grande de piñas, que requiere $3\frac{1}{2}$ tazas de harina. ¿Qué cantidad de harina necesita para hacer uno que tenga la mitad del tamaño del que se obtiene empleando las medidas indicadas en la receta?

21. Escribe qué significa cada una de las siguientes operaciones:

a) $\frac{1}{2} : 3$ b) $3 : \frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{4} : \frac{1}{3}$

22. Completa las siguientes expresiones:

a) El recíproco de $\frac{1}{2}$ es _____. b) El recíproco de $\frac{3}{4}$ es _____.

c) El recíproco de $\frac{9}{12}$ es _____. d) _____ es el recíproco de 0,1.

e) _____ es el recíproco de $\frac{7}{4}$. f) El recíproco de $\frac{0}{1}$ _____.

23. Completa la siguiente tabla:

Fracción	$\frac{1}{8}$	$1\frac{1}{5}$			$4\frac{1}{5}$	
Recíproco			$\frac{4}{7}$	$\frac{10}{5}$		$\frac{7}{16}$

24. Forma el recíproco de las siguientes fracciones (los mixtos debes expresarlos previamente como fracciones impropias). Calcula el producto de cada fracción por su recíproco. ¿A qué conclusión llegas?

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{15}{14}$ d) $\frac{17}{20}$ e) $1\frac{1}{5}$ f) $3\frac{1}{4}$

Halla el cociente. Simplifica siempre que sea posible:

25. a) $\frac{1}{2} : 3$ b) $\frac{1}{5} : 3$ 26. a) $\frac{1}{5} : 8$ b) $\frac{3}{4} : 5$

c) $\frac{3}{4} : 2$ d) $\frac{3}{4} : 9$ c) $\frac{2}{3} : 14$ d) $\frac{4}{10} : 4$

e) $2 : \frac{1}{2}$ f) $3 : \frac{1}{4}$ e) $2 : \frac{1}{3}$ f) $2 : \frac{3}{4}$

g) $5 : \frac{5}{6}$ h) $4 : \frac{3}{4}$ g) $4 : \frac{4}{5}$ h) $7 : \frac{7}{15}$

Calcula. Simplifica tanto como sea posible:

27. a) $\frac{1}{4} : \frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{6} : \frac{1}{5}$ 28. a) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3} : \frac{1}{5}$

c) $\frac{1}{5} : \frac{1}{4}$ d) $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{4} : \frac{3}{4}$ d) $\frac{3}{5} : \frac{9}{10}$

e) $\frac{1}{6} : \frac{11}{12}$ f) $\frac{11}{12} : \frac{1}{6}$ e) $\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$ f) $\frac{11}{15} : \frac{44}{45}$

g) $4\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$ h) $\frac{5}{8} : 2\frac{1}{4}$ g) $4\frac{4}{5} : \frac{8}{15}$ h) $2\frac{3}{4} : \frac{11}{12}$
 i) $7\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4}$ j) $6\frac{4}{5} : 1\frac{2}{10}$ i) $6\frac{3}{5} : \frac{3}{5}$ j) $5\frac{4}{7} : 3\frac{3}{12}$

29. El cociente de dos fracciones es $\frac{3}{4}$. El dividendo es: 30. ¿Por qué fracción multiplicas $\frac{5}{6}$ para obtener $2\frac{1}{7}$?

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{4}{3}$

¿Cuál es el divisor?

31. Pedro llevó a una excursión $\frac{1}{2}$ lb de queso. La repartió por igual entre él y dos compañeros más. ¿Qué parte de una libra tocó a cada uno?

32. María tenía $\frac{3}{4}$ m de cinta. La repartió por igual entre ella y Luisa. ¿Qué parte de la cinta le tocó a cada una?

33. El producto de dos fracciones es 6. Uno de los factores es $1\frac{1}{2}$. ¿Cuál es el otro? 34. El cociente de una división indicada es $\frac{3}{4}$. El dividendo es 3. ¿Cuál es el divisor?

35. Anita tenía 9 panquecitos. Los dividió en cuartos para repartirlos por igual entre varias compañeras. Cada una recibió $\frac{3}{4}$ de panqué. ¿Para cuántas personas alcanzaron los 9 panquecitos? 36. En el círculo de interés de costura las alumnas confeccionarán mantelitos individuales. Para cada mantelito necesitan $\frac{1}{4}$ m. Han comprado 3 m de tela. ¿Cuántos mantelitos podrán confeccionar?

37. Cary tenía $\frac{3}{4}$ m de muselina. Gastó $\frac{1}{2}$ m en hacer una blusa a su hijita. ¿Qué parte de lo que tenía fue lo que gastó?

38. Dos muchachos compraron $28\frac{3}{4}$ m de cordel para utilizarlo en dos papalotes. Lo dividieron en dos partes iguales. ¿Cuánto mide la parte que le tocó a cada uno?

39. En la clase de Educación Laboral los alumnos van a confeccionar marcadores. Disponen de 3 m de cinta. Cada marcador tiene una longitud de $15\frac{1}{2}$ cm.

¿Para cuántos marcadores alcanzará la cinta?

40. Un obrero tarda $1\frac{3}{4}$ h en barnizar un estante de cocina. En 7 h de trabajo, ¿cuántos estantes habrá barnizado? 41. Un automóvil tarda $2\frac{1}{2}$ h en recorrer 150 km. ¿Cuál es su velocidad promedio por hora?

3. Problemas típicos de fracciones

En quinto grado aprendiste a resolver gráfica y prácticamente, problemas como:

1. Hallar $\frac{3}{4}$ de 8.
2. ¿Qué parte es 6 de 8?
3. ¿De qué número es 6 los $\frac{3}{4}$?

Ahora aprenderás a resolverlos utilizando operaciones de multiplicar y dividir fracciones.

Primer problema: Hallar una fracción de un número.

Ejemplo 1

Halla:

- a) $\frac{3}{5}$ de 120 b) $\frac{7}{3}$ de 21

Ya tú sabes que hallar una fracción de un número equivale a multiplicar.

a) Hallamos el resultado efectuando la multiplicación:

$$\frac{3}{5} \cdot 120 = 72$$

Fíjate que el producto obtenido es menor que el número dado porque la fracción por la que multiplicaste es propia.

$$\frac{3}{5} \cdot 120 = 72$$

b) procedemos de la misma forma:

$$\frac{7}{3} \text{ de } 21 \text{ es } \frac{7}{3} \cdot 21 = 49$$

Observa que el producto obtenido es mayor que el número dado, $49 > 21$, porque la fracción por la que multiplicaste es impropia.

$$\frac{7}{3} \cdot 21 = 49$$

En resumen:

Para hallar una fracción de un número multiplicamos la fracción por el número dado.

Segundo problema: Hallar qué parte es un número de otro.

Ejemplo 2

Qué parte es:

- a) 8 de 12 b) 9 de 6

Para hallar qué parte es un número de otro debes aplicar la división.

- a) Divides 8 entre 12 expresando la división en forma de fracción. Como es posible, simplifícas.

$$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

8 es $\frac{2}{3}$ de 12

Como estamos averiguando qué parte es un número menor de otro mayor, la fracción obtenida es propia.

- b) Divides 9 entre 6 expresando la división en fracción y simplifícas.

$$\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

9 es $\frac{3}{2}$ de 6

Como estamos averiguando qué parte es un número mayor de otro menor, la fracción obtenida es impropia.

Observa que:

Para hallar qué parte es un número de otro aplicas la división simplificando la fracción obtenida.

Tercer problema: Hallar el número cuando se conoce una parte fraccionaria de él.

Ejemplo 3

De qué número es:

a) 25 los $\frac{5}{6}$ b) 32 los $\frac{8}{3}$

a) Podemos plantear:

$$\frac{5}{6} \text{ de un número es } 25.$$

Si designamos el número por x diremos:

$$\frac{5}{6} \cdot x = 25$$

Despejando la x (pasando $\frac{5}{6}$ al otro miembro dividiendo):

$$x = 25 : \frac{6}{5}$$

$$x = 25 \cdot \frac{5}{6}$$

$$x = 30$$

Respuesta: El número es 30.

b) Procederemos de la misma forma ya de una manera más simplificada:

$$32 : \frac{8}{3} = \frac{32}{1} \cdot \frac{3}{8} = 12$$

Respuesta: El número es 12.

En la práctica trabajamos así:

Para hallar el número cuando se conoce una parte fraccionaria, se divide el número que representa la parte fraccionaria entre la fracción.

Ejercicios (epígrafe 3)

1. Halla mentalmente:

a) $\frac{1}{4}$ de 4; de 12; de 24; de 40. b) $\frac{1}{5}$ de 20; de 25; de 30; de 50.

c) $\frac{3}{10}$ de 40; de 60; de 80; de 100.

Halla:

2. a) $\frac{1}{3}$ de 51 b) $\frac{2}{3}$ de 51
 c) $\frac{1}{4}$ de 96 d) $\frac{3}{4}$ de 96
 e) $\frac{1}{6}$ de 120 f) $\frac{7}{6}$ de 120
 g) $\frac{1}{5}$ de 200 h) $\frac{9}{5}$ de 200
3. a) $\frac{1}{8}$ de 80 b) $\frac{7}{8}$ de 80
 c) $\frac{1}{9}$ de 81 d) $\frac{5}{9}$ de 81
 e) $\frac{5}{6}$ de 300 f) $\frac{7}{10}$ de 1 000
 g) $\frac{17}{12}$ de 240 h) $\frac{18}{15}$ de 450
4. Dice Celia que ella duerme $\frac{1}{3}$ de las 24 h del día. ¿Cuántas horas duerme Celia?
5. De una caja de 20 lápices vamos a coger $\frac{3}{4}$ de ellos. ¿Cuántos lápices cogeremos?
6. Han transcurrido $\frac{5}{6}$ de una hora. ¿Cuántos minutos faltan para completar la hora?
7. Ángel gastó en la librería los $\frac{3}{5}$ de su dinero. Si tenía \$10, ¿cuánto dinero le queda?
8. En una cooperativa recogieron ayer 200 kg de tomates. Enviaron al mercado $\frac{3}{4}$ de lo recogido. ¿Cuántos kilogramos de tomates dejaron para el consumo de la cooperativa?
9. En el aula de 6.B hay matriculados 30 alumnos, pero el pasado martes, por la lluvia, dejó de asistir $\frac{1}{5}$ del alumnado.
 a) ¿Cuántos alumnos faltaron por la lluvia?
 b) ¿Cuántos asistieron?
10. Leí un libro de 200 páginas en tres días. Pude comprobar que el primer día leí $\frac{3}{8}$ del libro; el segundo día $\frac{2}{5}$ y el tercero el resto. ¿Cuántas páginas leí cada día?
11. Gladys tiene que resolver 30 problemas de una guía de estudio. Un día resuelve los $\frac{3}{10}$ de los problemas y al día siguiente $\frac{4}{7}$ del resto. ¿Cuántos problemas le faltan por resolver aún?
- 12* La figura B15 muestra la distribución realizada con las 180 cab de una granja.
 ¿Cuántas caballerías se dedican a la cría de aves?



Fig. B 15

13.* Un terreno de 200 m² se distribuyó del modo siguiente:

$\frac{1}{4}$ del terreno para siembra de cítricos,

$\frac{2}{3}$ del resto para frutos menores,

$\frac{1}{2}$ del nuevo resto para árboles frutales,

y los metros cuadrados restantes para hortalizas.
¿Cuántos metros cuadrados mide cada parcela?

14. Resuelve las siguientes actividades dando siempre la respuesta en una fracción irreducible:

a) ¿Qué parte es 7 de 12?

b) ¿Qué parte es 5 de 10?

c) ¿Qué parte es 20 de 40?

d) ¿Qué parte es 18 de 12?

e) ¿Qué parte es 20 de 14?

f) ¿Qué parte es 16 de 10?

15. ¿Qué parte es la edad de Julia, 8 años, de la de Luis, 12 años?

16. Carmita tiene 9 años y su hermano Pedro 12 años. ¿Qué parte representa la edad de Carmita de la edad de su hermano?

17. Halla qué parte de cada conjunto son los subconjuntos representados en las figuras correspondientes. En cada caso comprueba si la suma de las fracciones obtenidas equivale a la unidad.

a) Conjunto de 18 figuras geométricas (fig. B16).



Subconjunto de triángulos



Subconjunto de rectángulos



Subconjunto de círculos

Fig. B 16

b) Conjunto de 15 alumnos de un destacamento (fig. B17).



Fig. B-17

18. Marlene está leyendo un libro de 150 páginas. El lunes leyó 50 páginas y el martes leyó sólo 25.
- ¿Qué parte del libro ha leído cada día?
 - ¿Qué parte del libro le falta por leer?
19. Tenemos que recorrer, en automóvil, 1,82 km para llegar al pueblo en que viven mis abuelos. Solo nos faltan 21 km.
- ¿Cuántos kilómetros hemos recorrido?
 - ¿Qué parte del trayecto hemos recorrido y qué parte nos falta por recorrer?
20. Un tanque puede contener 250 L de agua. Si sólo contiene 150 L, ¿qué parte del tanque se ha llenado?, ¿qué parte no se ha llenado aún?
21. En una nave de una granja avícola hay 300 pollitos, de los cuales 180 tienen menos de una semana de nacidos. ¿Qué parte del total de pollitos tiene más de una semana?
22. Elio tenía 90 sellos de correo repetidos. Regaló 50 sellos a su hermano, dio 30 sellos a su primo y se quedó con los 10 restantes para intercambiarlos. Qué parte del total de sellos dio a cada uno y con qué parte se quedó?
23. Marilín pasa en la escuela 8 h, duerme 9 h, dedica al juego 4 h y durante 3 h realiza diversas actividades. ¿Qué parte del día dedica a cada cosa?
24. ¿25 equivale a $\frac{5}{7}$ de qué número?
25. $\frac{13}{27}$ de un número es igual a 26. ¿Cuál es el número?
26. Cuatro quintos de un número es 32. ¿Cuál es el número?
27. ¿De qué número es 45 las $\frac{9}{10}$ partes?

28. ¿Cuál es el número cuyos $\frac{2}{5}$ equivalen a 50?
29. $\frac{3}{4}$ de un número es 120. ¿Cuál es el número?
30. ¿De qué número es 50 los $\frac{5}{4}$?
31. Los $\frac{7}{6}$ de un número equivalen a 210. ¿Cuál es el número?
32. La mamá de Juanita compró $\frac{1}{4}$ lb de mantequilla por 60 ¢. ¿Cuánto cuesta la libra de mantequilla?
33. Los $\frac{3}{8}$ de los alumnos de un aula practican baloncesto. Si son 15 los alumnos que practican ese deporte, ¿cuántos alumnos hay matriculados en el aula?
34. A Susy le faltan 15 cm para completar el largo de la saya que está tejiendo. Si esta cantidad equivale a $\frac{5}{20}$ de la longitud total de la saya, ¿cuál es el largo de la saya?
35. Han llevado a la escuela cierta cantidad de posturas de lechuga. Al aula de Carlos le entregaron 45 posturas que representan $\frac{3}{5}$ del total recibido. ¿Cuántas posturas se recibieron en la escuela?
36. En una fábrica de pantalones, por atrasos en la producción, los obreros trabajaron la pasada semana 55 h. Esto equivale a $\frac{5}{4}$ de lo que regularmente trabajan.
37. La matrícula de este año en una escuela del municipio Plaza, es de 564 alumnos. Dice la directora que se ha sobrepasado en $\frac{1}{5}$ la matrícula del año anterior. Esto equivale a decir que la de este año representa $\frac{6}{5}$ de la del pasado año. ¿Cuántos alumnos tenía la escuela el año pasado?
- 38* Alexis tiene 12 años y cuatro hermanos, dos varones y dos hembras. Entre las edades de estos existen las siguientes relaciones:

La edad de Julián, el hermano mayor, es $\frac{5}{4}$ de la de Alexis.

La edad de Alexis representa $\frac{2}{3}$ de la de Caridad, que es la hermana mayor.

La edad de Paco equivale a $\frac{5}{9}$ de la de Caridad.

La edad de Hortensia es $\frac{1}{2}$ de la de Paco.

¿Cuántos años tiene cada hermano de Alexis?

4. División de expresiones decimales

Repaso de la división de números naturales. La división inexacta

En quinto grado aprendiste que las divisiones en las que el dividendo contiene un número exacto de veces al divisor, son divisiones exactas; en estas el resto es cero.

En la práctica has visto que muchas veces has realizado divisiones en las que no es posible obtener un resto cero. Estas divisiones se denominan inexactas.

Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 50 \overline{) 8} \\ \underline{48} \\ 2 \end{array}$$

se obtiene el cociente 6
y el resto 2.

Aprendiste también que en estos casos el resultado se expresa mediante una fracción:

$$50 : 8 = \frac{50}{8} = \frac{25}{4}$$

Ahora aprenderás a realizar la división de modo que el cociente sea una expresión decimal. Para ello basta dividir como en los números naturales teniendo cuidado de colocar la coma en el cociente:

50 : 8

En la mente. Calculas: Escribes:

$$\begin{array}{r} 50 \overline{) 8} \\ 6 \end{array}$$

6 · 8 = 48

Se transforman las 2 unidades del resto en 20 décimas, esto equivale a agregar un cero.

$$\begin{array}{r} 50 \overline{) 8} \\ \underline{48} \\ 20 \\ \underline{16} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

antes de escribir las décimas del cociente debes colocar la coma.

6,25

20 · 8 = 16

las décimas del resto se transforman en centésimas.

$$\begin{array}{r} 20 \overline{) 8} \\ 2 \end{array}$$

40 · 8 = 40

$$\begin{array}{r} 40 \overline{) 8} \\ 5 \end{array}$$

$50 : 8 = 6,25$

Ejemplo 1

Halla el cociente:

- a) $346:16$ b) $6:24$ c) $500:12$

a) Procederás de la siguiente forma:

	346	16	
	32	21,625	
	26		
	16		
	100		
primer resto:	96		
10 unidades: 100 décimas	40		
	32		
segundo resto:	80		
4 décimas = 40 centésimas.	80		
	0		

antes de escribir las décimas del cociente colocas la coma decimal.

tercer resto:
8 centésimas = 80 milésimas.

$346:16 = 21,625$

b) Como $6 < 24$ colocas un cero en el cociente y la coma decimal; las 6 unidades las conviertes en 60 décimas.

60	24	
48	0,25	
120		
120		
0		

$6:24 = 0,25$

c) Trabajas como en los incisos anteriores:

500	12	
48	41,66...	
20		
12		
80		
72		
80		
72		
8		

Si continúas dividiendo, encontrarás que siempre hay un resto que es 8 una nueva cifra 6 en el cociente.

$$500 : 12 = 41,66\dots$$

Las expresiones decimales que has obtenido en las divisiones de los incisos a) y b) en las cuales obtuviste un resto cero y un último lugar en el cociente, se llaman **expresiones decimales finitas**.

En la división del inciso c) no has obtenido una expresión decimal finita en el cociente, esta expresión decimal se llama **infinita**.

Conclusión:

El cociente de una división inexacta a veces puede completarse y obtener una expresión decimal finita, continuando la división transformando las unidades del resto en décimas, las décimas del nuevo resto en centésimas, las centésimas en milésimas, ..., hasta obtener un resto cero.

En las divisiones en las que no se obtiene un resto cero, el cociente que se obtiene es una **expresión decimal infinita**. En ese caso **se acostumbra a terminar la división en el segundo resto que se repite, a no ser que se indique otra cosa**.

División de expresiones decimales: el divisor es un número natural

Analiza el siguiente problema:

Alberto tenía \$0,86 y le dio la mitad a su hermano. ¿Cuánto dio a su hermano?

Como te habrás dado cuenta, debes dividir $\$0,86 : 2$ para poder dar la respuesta.

El dividendo es una expresión decimal.

Vamos a hallar gráficamente el resultado (fig. B18).



Fig. B 18

Si \$0,86 lo repartes en dos grupos, cada uno tendrá \$0,43. Vas a aprender ahora cómo proceder para dividir una expresión decimal entre un número natural:

$$0,86 : 2$$

En la mente:

0 2 **¡Atención!** se coloca la coma decimal detrás del
 0 cero en el cociente para determinar que no
 hay parte entera.

0,86	<u> 2 </u>
8	0,43
06	
6	
0	

8 2
 4 Divides las décimas y obtienes décimas.

6 2
 3 Divides las centésimas y obtienes centésimas.

En la práctica divides como si fueran números naturales teniendo cuidado de colocar la coma decimal en el cociente después de haber dividido las unidades. Si no hay unidades colocas un cero antes de la coma.

Ejemplo 2

Halla el cociente y comprueba:

- a) $87,96 : 5$ b) $0,003\ 44 : 8$

a) Divides como en los números naturales. Colocas la coma en el cociente después de dividir las unidades del dividendo:

87,96	<u> 5 </u>
5	17,592
37	
35	
29	
25	
46	
45	
10	
10	
0	

Para comprobar multiplicas el cociente por el divisor y debes obtener el dividendo:

Comprobación:

$$\begin{array}{r} 17,592 \cdot 5 \\ \hline 87,960 \end{array}$$

b) Procedes como en el ejercicio anterior:

$$\begin{array}{r} 0,00344 \quad | \quad 8 \\ \hline 32 \quad 0,000 \ 43 \\ \hline 24 \\ \hline 24 \\ \hline 0 \end{array}$$

Comprobación:

$$\begin{array}{r} 0,000 \ 43 \cdot 8 \\ \hline 0,003 \ 44 \end{array}$$

Observa que has tenido que colocar después de la coma del cociente tantos ceros, como ceros decimales hay después de la coma y uno más debido a que no fue posible dividir el 3 por el 8.

En resumen:

Para dividir una expresión decimal entre un número natural se efectúa la operación como si se tratara de una división de números naturales, teniendo cuidado de colocar en el cociente la coma decimal, cuando se termine de dividir la parte entera del dividendo.

El divisor es una expresión decimal

Analiza el siguiente problema:

Elenita tiene 4 m de tela de algodón. Quiere hacer mantelitos individuales de 0,5 m de largo cada uno.

¿Cuántos mantelitos podrá obtener de la tela que posee?

Debe averiguar cuántas veces cabe 0,5 m en 4 m (fig. B19).

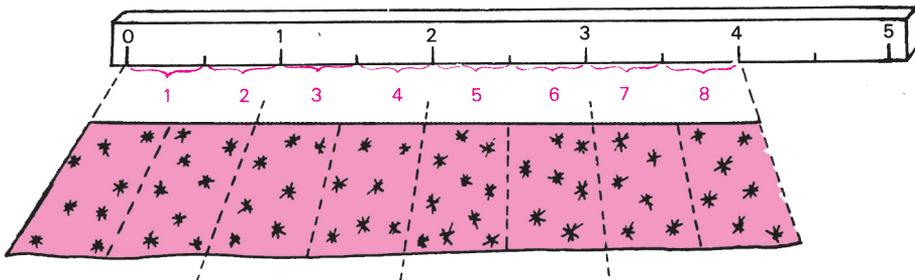


Fig. B 19

Puede obtener 8 pedazos de 0,5 m.

Observa que de cada metro de tela se obtiene más de un mantel; **el cociente es mayor que el dividendo.**

Resolvamos gráficamente otra situación:

¿Cuántas veces cabe 1,5 cm en 7,5 cm (fig. B20)?

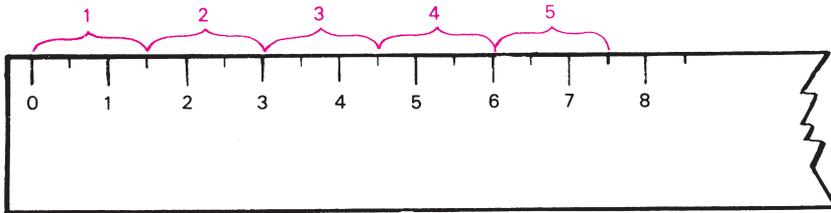


Fig. B 20

1,5 cm cabe 5 veces en 7,5 cm. ¿Cómo podrás obtener estos resultados operando con los números?

Recuerda que para averiguar las veces que un número está contenido en otro se divide el segundo entre el primero. Las dos comparaciones que acabas de realizar equivalen a las divisiones:

$$4 : 0,5 \quad 7,5 : 1,5$$

Observa que en estos ejercicios el divisor es una expresión decimal. Antes de comenzar a dividir lo **debes convertir en un número natural.** Para ello lo multiplicas por 10, 100, 1 000, ..., según convenga.

Lo mismo debes hacer con el dividendo.

$$\begin{array}{r} 4 : 0,5 \\ \downarrow \quad \swarrow \\ 40 \quad \underline{5} \\ 40 \quad \quad 8 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7,5 : 1,5 \\ \downarrow \quad \swarrow \\ 75 \quad \underline{15} \\ 75 \quad \quad 5 \\ \hline 0 \end{array}$$

Ejemplo 1

Halla el cociente y comprueba:

a) $54,6 : 1,3$ b) $175 : 0,4$ c) $6,936 : 0,34$

a) Debes multiplicar por 1.0 el dividendo y el divisor para expresar el divisor como un número natural.

$$\begin{array}{r} 546 \quad \underline{13} \\ 52 \quad \quad 42 \\ \hline 26 \\ 26 \\ \hline 0 \end{array}$$

Comprobación:

$$\begin{array}{r} 42 \cdot 1,3 \\ \hline 42 \\ \underline{126} \\ 54,6 \end{array}$$

b) Procedes como en el inciso a).

$$\begin{array}{r}
 1750 \quad \underline{4} \\
 \underline{16} \quad 437,5 \\
 15 \\
 \underline{12} \\
 30 \\
 \underline{28} \\
 20 \quad \rightarrow \text{Transformas el resto en d\u00e9cimas.} \\
 \underline{20} \\
 0
 \end{array}$$

Colocas la coma decimal en el cociente.

Comprobaci\u00f3n:

$$\begin{array}{r}
 437,5 \cdot 0,4 \\
 \hline
 175,00
 \end{array}$$

c) Debes ampliar por 100.

$$\begin{array}{r}
 693,6 \quad \underline{34} \\
 \underline{68} \quad 20,4 \\
 136 \\
 \underline{136} \\
 0
 \end{array}$$

Comprobaci\u00f3n:

$$\begin{array}{r}
 20,4 \cdot 0,34 \\
 \hline
 612 \\
 816 \\
 \hline
 6,936
 \end{array}$$

En resumen, para dividir expresiones decimales (el dividendo puede ser natural):

1. Conviertes el divisor en un n\u00famero natural multiplicando dividendo y divisor por 10, 100, 1 000, ..., seg\u00fan convenga.
2. Divides como si fueran n\u00fameros naturales colocando la coma inmediatamente despu\u00e9s que se termine de dividir la parte entera del dividendo.

Al dividir expresiones decimales, tambi\u00e9n puede suceder que el cociente sea una expresi\u00f3n decimal infinita.

Ejemplo 4

Calcula:

a) $48 : 0,22$

b) $5,12 : 0,3$

a) $48 : 0,22 \rightarrow 4800 \quad \begin{array}{r} 22 \\ \overline{) 4800} \\ 44 \\ \hline 40 \\ 22 \\ \hline 180 \\ 176 \\ \hline 40 \\ 22 \\ \hline 180 \\ 176 \\ \hline 40 \\ 22 \\ \hline 180 \\ \\ \\ \end{array}$

$\begin{array}{r} 22 \\ \overline{) 4800} \\ 218,181\dots \end{array}$

Escribes tres puntos para indicar que el cociente es una expresión decimal infinita.

Si continúas la división, las cifras 1 y 8 se repetirán infinitamente en el cociente.

El cociente hallado es una expresión decimal infinita.

b) $5,12 : 0,3 \rightarrow 51,2 \quad \begin{array}{r} 3 \\ \overline{) 51,2} \\ 3 \\ \hline 21 \\ 21 \\ \hline 020 \\ 18 \\ \hline 20 \\ 18 \\ \hline 20 \\ \\ \end{array}$

La cifra 6 se seguirá repitiendo infinitamente en el cociente.

Cuando sucede esto, por lo general se divide hasta que empiece a repetirse el resto, a no ser que se indique o sea necesario dejar la respuesta con un número determinado de cifras decimales.

Fracciones comunes y expresiones decimales.

Obtención de expresiones decimales finitas e infinitas

En quinto grado aprendiste que las fracciones que mediante ampliación o simplificación se convierten en fracciones decimales, se pueden escribir también como expresiones decimales:

$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0,75$$

Como en este grado has ampliado tus conocimientos sobre la división, aprenderás a obtener expresiones decimales de fracciones comunes cualesquiera:

Ejemplo 5

Escribe como expresión decimal y clasifica en expresión decimal finita o infinita.

a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{113}{40}$ c) $\frac{2}{9}$ d) $\frac{5}{11}$

Puedes obtener las representaciones de estas fracciones como expresiones decimales, escribiendo la fracción como cociente y calculando de acuerdo con las reglas de la división de expresiones decimales que ya conoces:

a) $\frac{3}{8} = 3 : 8$ \longrightarrow
$$\begin{array}{r} 30 \\ \underline{24} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$
 \longleftarrow $\begin{array}{r} 8 \\ \hline 0,375 \end{array}$

Obtuviste resto 0, luego: 0,375 es una expresión decimal finita.

$$\frac{3}{8} = 0,375$$

$$b) \frac{113}{40} = 113 : 40 \longrightarrow \begin{array}{r} 113 \\ \underline{80} \\ 330 \\ \underline{320} \\ 100 \\ \underline{80} \\ 200 \\ \underline{200} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} \underline{40} \\ 2,825 \end{array}$$

$$\boxed{\frac{113}{40} = 2,825}$$

$$c) \frac{2}{9} = 2 : 9 \longrightarrow \begin{array}{r} 20 \\ \underline{18} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 20 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \quad \begin{array}{r} \underline{9} \\ 0,222... \end{array}$$

En esta división, la cifra 2 del cociente se repite infinitamente y de cada división parcial se obtiene un resto 2.

0,222... es una expresión decimal infinita en la que aparece una cifra básica que se repite constantemente.

Entonces:

$$\boxed{\frac{2}{9} = 0,222...}$$

$$d) \frac{5}{11} = 5 : 11 \rightarrow \begin{array}{r} 50 \\ \underline{44} \\ 60 \\ \underline{55} \\ 50 \\ \underline{44} \\ 60 \\ \underline{55} \\ 50 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \quad \begin{array}{r} 11 \\ \hline 0,4545\dots \end{array}$$

$$\frac{5}{11} = 0,4545\dots$$

0,4545... es una expresión decimal infinita en la que hay dos cifras básicas que se repiten indefinidamente.

En los incisos c) y d) los cocientes son expresiones decimales infinitas en cuyos lugares decimales **hay determinada cifra básica o grupos de cifras básicas que se repiten**. Estas cifras básicas que se repiten se llaman **períodos**.

Definición 1

Las expresiones decimales infinitas en cuyos lugares decimales aparecen períodos se llaman **expresiones decimales periódicas**.

Existe una forma más breve de escribir las expresiones decimales periódicas: sobre la cifra o las cifras que forman un período se traza una rayita horizontal. 0,222 ... Se escribe: **0,2̄** Se lee: **cero coma dos periodo dos**.

0,4545... Se escribe: **0,45̄** Se lee: **cero coma cuarenta y cinco período cuarenta y cinco**.

De lo anterior puedes concluir que:

Mediante el procedimiento de la división, a toda fracción le puedes hacer corresponder una expresión decimal finita o una periódica.

Concepto número fraccionario

Ya sabes que las fracciones que se derivan unas de otras por ampliación o por simplificación son fracciones equivalentes.

$\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{4}{16}$ son fracciones equivalentes.

Veamos qué expresión en notación decimal le corresponde a cada una de estas fracciones:

$$\frac{1}{4} = 1 : 4 \rightarrow \begin{array}{r} 10 \\ \underline{8} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ \hline 0,25 \end{array}$$

$$\frac{2}{8} = 2 : 8 \rightarrow \begin{array}{r} 20 \\ \underline{16} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ \hline 0,25 \end{array}$$

$$\frac{3}{12} = 3 : 12 \rightarrow \begin{array}{r} 30 \\ \underline{24} \\ 60 \\ \underline{60} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ \hline 0,25 \end{array}$$

$$\frac{4}{16} = 4 : 16 \rightarrow \begin{array}{r} 40 \\ \underline{32} \\ 80 \\ \underline{80} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 16 \\ \hline 0,25 \end{array}$$

Puedes decir:

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = 0,25$$

Además, recuerda que una expresión decimal no se altera porque le agreguemos ceros a la derecha, entonces puedes decir:

$$\frac{1}{4} = 0,250$$

ó

$$\frac{1}{4} = 0,25000$$

Si $\frac{1}{3} = 1 : 3$

al dividir:

$$\begin{array}{r} 10 \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 10 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ \hline 0,33... \end{array}$$

obtenemos que $\frac{1}{3} = 0,\bar{3}$.

Análogamente sucede si efectuamos:

2:6; 3:9; 4:12; ...

Entonces:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \dots = 0,\bar{3}$$

Como puedes observar, todas las fracciones equivalentes a una fracción dada tienen la misma representación decimal. Ya viste en quinto grado que todas representaban la misma parte de una unidad y les correspondía el mismo punto en el rayo numérico (fig. B21).

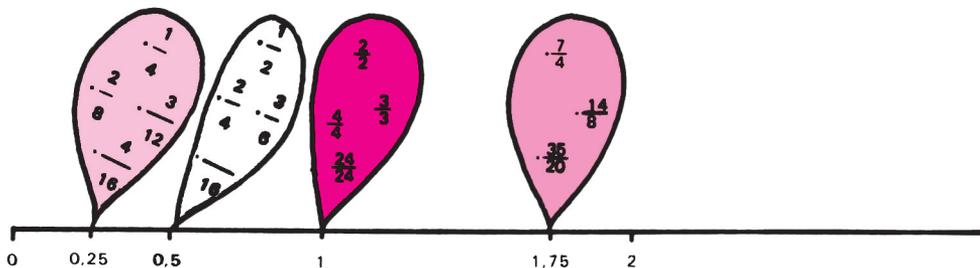


Fig. B 21

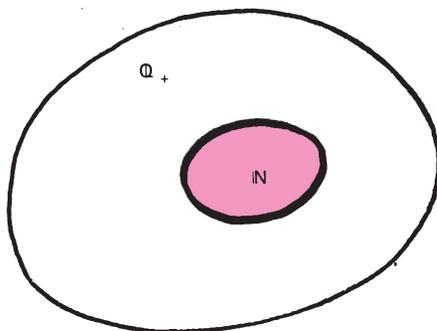
Definición 2

Al conjunto de fracciones equivalentes a una fracción dada se le denomina **número fraccionario**.

Por ejemplo: $\left\{ \frac{1}{4} ; \frac{2}{8} ; \frac{3}{12} ; \frac{4}{16} ; \dots \right\}$ es un número fraccionario.

En la práctica, los números fraccionarios se identifican con cualquiera de las fracciones que lo forman, por ello **los números fraccionarios se representan por fracciones**, escritas como fracciones comunes o en notación decimal.

Al conjunto de los números fraccionarios se le denota por \mathbb{Q}_+ . El conjunto \mathbb{N} de los números naturales es un **subconjunto** de \mathbb{Q}_+ (fig. B22).



Puedes decir: $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}_+$; $0,5 \in \mathbb{Q}_+$; $4 \in \mathbb{Q}_+$.

Fig. B 22

Ejercicios (epígrafe 4)

Halla el cociente completo, si es posible, en las siguientes divisiones inexactas. Clasifica en expresiones finitas o infinitas, los cocientes obtenidos.

1. a) $45\,960:80$ b) $4\,596:25$ c) $15\,465:12$
d) $3\,486:16$ e) $15\,863:50$ f) $17\,585:12$
g) $93\,987:125$ h) $37\,008:250$
2. a) $7\,061:20$ b) $5\,486:11$ c) $2\,272:64$
d) $99\,999:25$ e) $77\,840:160$ f) $48\,656:200$
g) $50\,000:180$ h) $39\,864:250$

Halla el cociente y comprueba:

3. a) $0,9:3$ b) $0,63:3$ c) $0,55:5$
d) $0,63:7$ e) $5,35:5$ f) $14,07:7$
g) $0,048:16$ h) $0,552:12$
4. a) $0,729:9$ b) $59,877:9$ c) $732,6:5$
d) $735,2:8$ e) $0,483\,6:12$ f) $97,92:32$
g) $69,36:34$ h) $739,84:578$
5. La familia de Rolando hizo un recorrido en automóvil de 254,8 km empleando 4 h en el viaje. ¿Cuál es la velocidad promedio con que se realizó el viaje?
6. Si una planta tiene capacidad para producir aproximadamente 28,8 t de materia prima en 6 meses, ¿cuánto producirá la planta en un mes?
7. El perímetro de un polígono de 6 lados es de 18,036 m. ¿Cuánto mide cada lado, si todos son iguales?
8. ¿Cuál es el promedio de velocidad de un automóvil que ha recorrido aproximadamente 348,24 km en 6 h?
9. ¿Cuál es mayor, el producto de $136 \cdot 0,09$ o el cociente de $4\,316,4:436$? Halla la diferencia.
10. ¿En cuánto excede el cociente de $4,58:5$ a la diferencia entre 0,58 y 0,396?
11. Usa una regla graduada en centímetros y milímetros para hallar los cocientes de estas operaciones:
a) $1:0,2$ b) $3:0,6$ c) $4,5:0,5$ d) $2,8:0,4$

Halla el cociente:

12. a) $24:0,2$ b) $48:1,6$ c) $25:1,25$
d) $25:12,5$ e) $114:11,4$ f) $13,2:3,3$
g) $0,84:0,12$ h) $245,7:1,35$ i) $3,072:9,6$
j) $307,2:0,96$
13. a) $84:1,2$ b) $288:1,2$ c) $77:7,7$
d) $7,5:0,5$ e) $0,84:0,42$ f) $8,4:0,12$
g) $1,35:4,5$ h) $27,36:0,342$ i) $476,8:1,49$
j) $476,8:0,149$

14. Decide cuál de los números que aparecen a la derecha de cada división indicada es su cociente. Enciérralo en un círculo.

- | | | | | |
|-----------------|-------|------|------|-----|
| a) $24,99:0,49$ | 0,051 | 0,51 | 5,1 | 51 |
| b) $3,710:0,05$ | 0,742 | 7,42 | 74,2 | 742 |
| c) $4,368:9,1$ | 0,048 | 0,48 | 4,8 | 48 |

15. ¿Cuántas piezas de 15,2 cm pueden sacarse de un listón que mide 1 216 cm?
16. De un rollo de alambre de 3 726 m, ¿cuántos pedazos de 248,4 m se pueden sacar?
17. El papá de Rosa paga una cuota sindical de \$2,75 mensuales. Cuando ha pagado \$22, ¿cuántos meses del año ha abonado?
18. El perímetro de un polígono de lados iguales es 21 cm. Si cada lado mide 3,5 cm, ¿cuántos lados tiene este polígono?
19. El área de un rectángulo es de 12 cm². Si el lado menor mide 1,5 cm, ¿cuánto mide el otro lado?
20. La tía de Luisa gastó \$34 en tela para hacer vestidos a sus sobrinas. Si la tela comprada por ella le costó a \$8,50 el metro, ¿cuántos metros compró?
21. La bibliotecaria de la escuela está haciendo un tarjetero nuevo. Tiene franjas de cartulina que miden 82,5 cm de largo. Ella quiere hacer tarjetas de 7,5 cm. ¿cuántas tarjetas podrá obtener de cada franja?
22. Luis midió en centímetros el largo del cordón eléctrico que necesitó para instalar una lámpara a su mesa de trabajo. Tiene 370,5 cm de largo, ¿a cuántas pulgadas equivale? Recuerda que: 1 in 2,5 cm.
23. El hermanito de Luisa pesa 35,2 lb. ¿A cuántos kilogramos equivale ese peso?
24. El papá de Maritza hizo un viaje en automóvil de 292,5 km empleando 4,5 h. ¿Cuál es la velocidad promedio con que realizó el viaje?
- 25*. Alexander está ahorrando para comprarse un radio que cuesta \$25. Ya tiene ahorrado \$15,85. Su papá le da \$1,75 a la semana y su mamá \$1,30 cada domingo. Si ahorra todo lo que recibe cada semana, ¿cuántas semanas necesitará para reunir lo que le falta?

Utiliza la división para escribir en notación decimal las fracciones siguientes. Clasifica cada expresión obtenida en finita o infinita.

- | | | | |
|----------------------|--------------------|----------------------|--------------------|
| 26. a) $\frac{3}{4}$ | b) $\frac{1}{3}$ | 27. a) $\frac{1}{4}$ | b) $\frac{1}{5}$ |
| c) $\frac{7}{8}$ | d) $\frac{4}{5}$ | c) $\frac{5}{9}$ | d) $\frac{15}{32}$ |
| e) $\frac{23}{25}$ | f) $\frac{17}{20}$ | e) $\frac{8}{11}$ | f) $\frac{19}{25}$ |
| g) $\frac{20}{11}$ | h) $\frac{5}{36}$ | g) $\frac{9}{32}$ | h) $\frac{7}{16}$ |

Halla el cociente en cada división indicada.

28. a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{5}{8}$ 29. a) $\frac{3}{6}$ b) $\frac{4}{7}$ c) $\frac{37}{40}$

d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{5}{6}$ f) $\frac{17}{10}$ d) $\frac{16}{11}$ e) $\frac{17}{15}$ f) $\frac{32}{8}$

30. Convierte en expresión decimal. Divide hasta obtener dos veces el período:

a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{7}{9}$ c) $\frac{11}{6}$

d) $\frac{7}{11}$ e) $\frac{19}{33}$ f) $\frac{6}{27}$

31. Indica qué tipo de expresión decimal es cada una de las siguientes:

a) 0,5 b) $0,\overline{72}$ c) 0,3

d) $0,\overline{3}$ e) $0,\overline{57}$ f) 0,75

32. Carlos tiene 3 hermanos. Su papá le dio \$3 para que los repartiera por igual entre los cuatro. Carlos utilizó la división para averiguar cuánto le tocaría a cada uno. ¿Qué resultado obtuvo Carlos?

33. La maestra llevó 3 m de cinta para que sus alumnos hicieran unos marcadores para obsequiar por el Día del pionero. Pidió que dividieran los 3 m en 20 partes iguales. ¿Qué longitud tendrá cada marcador?

34. Halla el valor de x de modo que en cada par una fracción se derive de la otra por simplificación:

35. Determina si cada uno de los pares de fracciones siguientes representan el mismo número fraccionario.

a) $\frac{10}{30}$ y $\frac{1}{x}$ b) $\frac{16}{64}$ y $\frac{x}{8}$

a) $\frac{7}{11}$ y $\frac{49}{77}$ b) $\frac{5}{6}$ y $\frac{10}{12}$

c) $\frac{34}{2}$ y $\frac{17}{x}$ d) $\frac{35}{91}$ y $\frac{x}{13}$

c) $\frac{17}{21}$ y $\frac{34}{42}$ d) $\frac{5}{3}$ y $\frac{50}{32}$

e) $\frac{75}{125}$ y $\frac{3}{x}$ f) $\frac{x}{12}$ y $\frac{100}{60}$

e) $\frac{0}{7}$ y $\frac{10}{70}$ f) $\frac{7}{8}$ y $\frac{35}{40}$

36. De las fracciones siguientes circula, en cada inciso las que le corresponde el mismo punto en el rayo numérico:

a) $\frac{5}{4}$, $\frac{0}{2}$, $\frac{15}{12}$, $\frac{50}{45}$, $\frac{55}{44}$

b) $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{12}{16}$, $\frac{12}{15}$, $\frac{36}{48}$

c) $\frac{5}{1}$, $\frac{10}{2}$, $\frac{20}{15}$, $\frac{55}{11}$

d) $\frac{7}{1}$, $\frac{21}{3}$, $\frac{56}{8}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{77}{11}$

37. Determina si los siguientes pares, formados por una fracción común y una expresión decimal, representan el mismo número fraccionario:

a) $\frac{1}{2}$ y 0,5

b) $\frac{11}{2}$ y 5,5

c) $\frac{7}{25}$ y 0,28

d) $\frac{3}{6}$ y 0,25

e) $\frac{3}{10}$ y 0,06

f) $\frac{8}{50}$ y 0,16

5. Operaciones con expresiones decimales

Reglas de redondeo. Valores aproximados para expresiones decimales

Imagínate que vas a comprar una serie de artículos que tienen los precios indicados en la tablita (fig. B23).



Fig. B 23

Sin hallar la cantidad total, ¿como sabrás rápidamente si puedes pagar o no con \$20?

Para ello debes hacer un estimado mental donde previamente redondeas los datos.

En cuarto grado aprendiste a redondear números naturales obteniendo así **valores aproximados**.

También puedes redondear expresiones en notación decimal y obtener así valores aproximados para expresiones decimales finitas o para expresiones decimales periódicas.

Las reglas del redondeo, en este caso, son las mismas que aprendiste para los números naturales.

Ejemplo 1

Redondea a un lugar decimal:

a) $4,865 \underline{4}$

a) $4,865 \underline{4}$

b) $0,3\overline{2}$

Como 8 es la cifra que corresponde al primer lugar decimal, se analiza la siguiente, en este caso 6. Como $6 > 5$ se añade 1 al 8, o sea, se **redondea por exceso**, y se eliminan las siguientes cifras decimales.

$$4,865 \underline{4} \approx 4,9$$

b) $0,3\overline{2}$

Como $0,3\overline{2}$ significa $0,323 \overline{2} \dots$ la primera cifra decimal es 3. La siguiente es 2. Como $2 < 5$, se conserva el 3, es decir, se **redondea por defecto**, y las siguientes se eliminan.

$$0,3\overline{2} \approx 0,3$$

Ejemplo 2

Redondea a dos lugares decimales:

a) $34,58\underline{1}$ b) $3,5\overline{5}$ c) $0,876 \underline{8}$

a) $34,58\underline{1} \approx 34,58$

$1 < 5$, el redondeo es **por defecto**

b) $3,5\overline{5} = 3,555 \dots \approx 3,56$

$5 = 5$, el redondeo es **por exceso**.

c) $0,876 \underline{8} \approx 0,88$

$6 > 5$, el redondeo es **por exceso**.

En resumen, para redondear expresiones decimales se redondea **por defecto** si la cifra siguiente a la que ocupa el lugar hasta donde se debe redondear es **menor que 5**, y **por exceso** si la cifra siguiente es **mayor o igual que 5**.

Cuando se redondea, el número obtenido es un **valor aproximado** del número dado.

Una importante aplicación del redondeo es cuando divides expresiones decimales y el cociente no es finito o tiene muchos lugares decimales.

Ejemplo 3

Efectúa las siguientes divisiones y expresa la respuesta con dos lugares decimales.

a) $\frac{585}{11}$

b) $0,28 : 1,5$

$$\begin{array}{r} 53,181 \\ 11 \overline{) 585} \\ \underline{55} \\ 35 \\ \underline{33} \\ 20 \\ \underline{11} \\ 90 \\ \underline{88} \\ 20 \\ \underline{11} \\ 9 \end{array}$$

Como la respuesta debe ser con dos lugares decimales, **se calcula hasta un lugar más**, para saber cómo redondearla, si por defecto o por exceso. En este caso como $1 < 5$ se redondea por defecto.

$$\frac{585}{11} \approx 53,18$$

b) $0,28 : 1,5$

$$\begin{array}{r} 2,8 \\ 15 \overline{) 2,80} \\ \underline{15} \\ 130 \\ \underline{120} \\ 100 \\ \underline{90} \\ 10 \end{array}$$

Como $6 > 5$ se redondea por exceso.

$$0,28 : 1,5 \approx 0,19$$

Otra aplicación importante del redondeo es cuando quieres representar en un rayo numérico diferentes fracciones.

En ese caso es conveniente **redondearlas todas a un lugar decimal** y utilizar la regla y sus divisiones en centímetros y milímetros.

Ejemplo 4

Representa en un rayo numérico las fracciones:

$$\frac{1}{2}, \frac{5}{3} \text{ y } \frac{41}{8}$$

Primero se expresan en notación decimal y se redondean a un lugar decimal, si es necesario.

$$\frac{1}{2} = 0,5$$

$$\begin{array}{r} 5 \quad \overline{) 3} \\ \underline{3} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 2 \end{array}$$

$$\frac{5}{3} \approx 1,7$$

$$\begin{array}{r} 41 \quad \overline{) 8} \\ \underline{40} \\ 10 \\ \underline{8} \\ 20 \\ \underline{16} \\ 4 \end{array}$$

$$\frac{41}{8} \approx 5,1$$

Después se representan en el rayo numérico utilizando la regla (fig. B24).

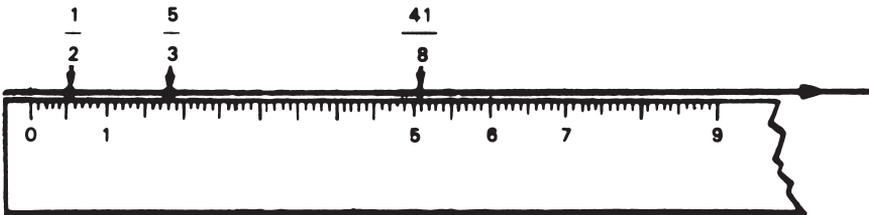


Fig. B 24

Los puntos así obtenidos son también aproximados, pero ese es el procedimiento que generalmente se usa en la práctica.

Como has podido apreciar, cuando redondeas expresiones decimales obtienes valores aproximados del original, así como cuando representas en un rayo numérico una determinada expresión decimal, por lo general esa representación es sólo un valor aproximado.

También puedes obtener valores aproximados de otras formas, por ejemplo, al medir una determinada longitud.

Si deseas medir con una regla un segmento AB (fig. B25).

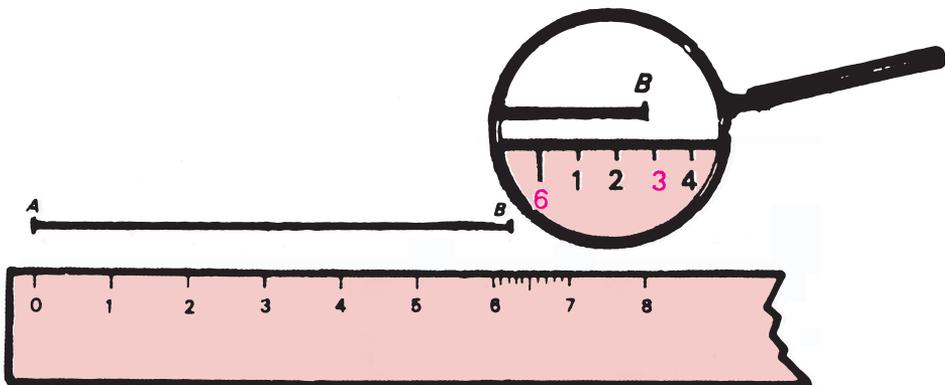


Fig. B 25

El extremo B del segmento que quieres medir queda casi siempre entre dos divisiones de la regla y entonces tomas como medida la longitud representada por la división más próxima, que en este caso es 6,3 cm.

En realidad, cuando concluyes que la longitud del segmento AB es 6,3 cm, sólo estás dando un **valor aproximado** de esa longitud y como no sabes si es por exceso o por defecto sólo puedes afirmar que:

$$6,25 \leq \overline{AB} < 6,35$$

pues lo has obtenido **por redondeo** de la verdadera longitud que no conoces.

Cuando un valor aproximado se ha obtenido por redondeo de un valor exacto se dice que tiene todas sus **cifras correctas**.

Cálculo con valores aproximados

Hasta ahora sólo has calculado con expresiones decimales que son exactas, es decir, no proceden de un redondeo o de una medición. Sin embargo, en muchas ocasiones tendrás que calcular con valores que no son exactos, sino solo **aproximaciones** de los valores reales, y para ello debes conocer reglas especiales.

Lo primero que debes saber es que **cuando calculas con valores aproximados el resultado es también un valor aproximado y que la precisión del resultado no puede ser mayor que la de los datos.**

Te preguntarás que cómo puede saberse o estimarse la precisión de un valor aproximado (fig. B26).

Pues esa precisión puede estimarse por el **número de cifras correctas** que tiene el valor dado.

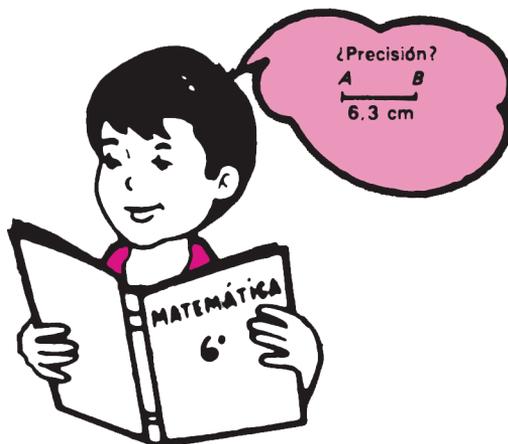


Fig. B 26

Por ejemplo, al medir el segmento AB de la figura B25 expresamos que su longitud es 6,3 cm; este valor tiene **dos cifras correctas** y esa es su exactitud. Podríamos también haber expresado que medía: 0,63 dm ó 0,063 m.

Observa que hemos escrito el valor dado con más cifras, añadiendo ceros a la izquierda, pero **eso no aumenta la exactitud**. En estos casos es conveniente hablar de **cifras significativas**.

Definición 1

Se llaman cifras significativas de un número a todas sus cifras menos los ceros que aparecen a la izquierda.

Ejemplo 5

a) ¿Cuántas cifras significativas tienen los números siguientes: 107; 0,037; 0,650; 10,00?

b) Escribe la expresión decimal de $\frac{1}{11}$ con 3 cifras significativas correctas.

- a) **107** tiene 3 cifras significativas, pues no tiene ceros a la izquierda.
0,037 tiene dos cifras significativas el 3 y el 7.
0 650 tiene tres cifras significativas, el 6, el 5 y el 0, pues este último está a la derecha y en ese caso sí es significativa.
10,00 tiene cuatro cifras significativas.

b) Como se pide que las tres cifras significativas sean correctas hay que calcular hasta una cifra significativa más (cuatro en este caso) para poder redondear.

$$\begin{array}{r} 100 \\ 99 \overline{) 11} \\ \underline{99} \\ 100 \\ 99 \\ \underline{10} \end{array} \quad \begin{array}{l} 11 \\ \hline 0,090 \ 90\dots \end{array}$$

$$\frac{1}{11} = 0,0\overline{9} \approx \boxed{0,090 \ 9}$$

Observa que para tener tres cifras hemos escrito cuatro lugares decimales, pero el primero es cero y la parte entera cero.

Otra idea importante que debes considerar es que **al calcular con números aproximados no aumenta la precisión**, y en la práctica debes tener cuidado de no expresar el resultado con más cifras significativas de las que puedes garantizar, pues asumes una precisión **que no existe**.

Por ejemplo, si el segmento AB de la figura B25 es el lado de un cuadrado y calculamos su área (fig. B27).

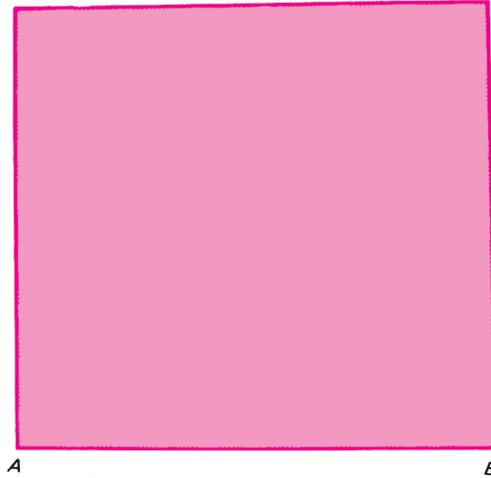


Fig. B 27

Si suponemos que $\overline{AB} = 6,3$ cm, entonces el área del cuadrado será:

$$A = (6,3 \text{ cm})^2 \\ = 39,69 \text{ cm}^2$$

Sin embargo, el lado \overline{AB} puede llegar a medir hasta 6,349 cm y en ese caso

$$A = (6,349 \text{ cm})^2 \\ = 40,309 \text{ 801 cm}^2 \\ = 40,31 \text{ cm}^2$$

¿Cuál de los dos resultados es más preciso? Realmente desconocemos la medida exacta del segmento AB y al calcular con un valor aproximado de ella, el resultado no es más preciso porque tenga muchas cifras pues muchas de ellas **no son confiables**. Por esta razón es conveniente en la práctica utilizar el siguiente procedimiento:

Cuando calcules con valores aproximados, expresa el resultado con tantas cifras significativas como el dato que menos cifras significativas tiene.

En el ejemplo del área del cuadrado, solo hay un dato que es $\overline{AB} = 6,3$ cm. Tiene dos cifras significativas correctas, luego la respuesta es $A = (6,3 \text{ cm})^2 = 39,69 \text{ cm}^2 \approx 40 \text{ cm}^2$ redondeando a dos cifras significativas el resultado.

Para comprender completamente por qué esto es así, observa que sólo conocemos las cifras de un número que, además, tiene otras cifras; es decir, podemos representarlo así: $6,3?$ donde $?$ sustituye las cifras que no conocemos.

Al multiplicar resulta:

$$\begin{array}{r}
 6,3 \quad ?6,3 \quad ? \\
 \hline
 378 \quad ? \\
 189 \quad ? \\
 \hline
 ??? \rightarrow \text{El producto parcial podría tener cuatro cifras.} \\
 \hline
 39, \quad ????
 \end{array}$$

Observa que sólo podemos conocer dos cifras, **y no con absoluta seguridad**, pues en el resto de los lugares hay que sumar cifras que desconocemos.

Ejemplo 6

Sabiendo que los datos son valores aproximados (con todas sus cifras correctas), calcula:

a) $1,37 \cdot 0,21$ b) $0,45 + 0,171$ c) $6,18 \cdot 2,6 + 11$

a) dos cifras significativas

$$1,37 \cdot 0,21 = 0,2877 \approx 0,29$$

Redondeamos el resultado al número de cifras del dato que tenga **menos** cifras.

$$b) 0,45 + 0,171 = 0,621 \approx 0,62$$

$$c) 6,18 \cdot 2,6 = 16,068$$

$$16,068 + 11 = 27,068 \approx 27$$

En la práctica se puede omitir el signo " \approx " y escribir el signo "=" pero sobrentendiendo que se trata de un resultado aproximado.

En este último ejemplo, en el resultado intermedio (16,068) fue inútil conservar las cinco cifras, pues el resultado final sólo tendrá dos. En ese caso se pueden eliminar cifras redondeando, pero tampoco sería correcto trabajar sólo con dos, pues se pueden introducir errores. En la práctica:

Al calcular con valores aproximados los cálculos intermedios se realizan **con una cifra más** de las que debe tener el resultado.

En el ejemplo anterior:

$$6,18 \cdot 2,6 = 16,1 \quad 16,1 + 11 = 27$$

1 cifra más que la que debe tener el resultado.

En resumen, para calcular con valores aproximados debes tener en cuenta lo siguiente:

- Son cifras significativas todas las cifras menos los ceros a la izquierda.
- El resultado se expresa con tantas cifras significativas como el dato que menos tiene.
- Los resultados intermedios se expresan con una cifra más.

Ejercicios (epígrafe 5)

Redondea las expresiones decimales siguientes a tres lugares, dos lugares y un lugar después de la coma:

1. a) 0,775 6 b) 0,468 75 2. a) 4,729 5 b) 0,934 5
c) 0,281 25 d) 0,94 c) 0,53 d) 0,5
e) 0,6 f) 0,47 e) 0,72 f) 0,9
3. Halla el cociente aproximando hasta las décimas: 4. Halla el cociente aproximando hasta las centésimas:
a) 78:25 b) 67:16 a) 24:7 b) 82:3
c) 99:20 d) 99:32 c) 134:27 d) 200:49
e) 345:80 f) 80:11 e) 9,82:32 f) 28,3:14
5. Representa en un rayo numérico las fracciones:
a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $1\frac{1}{5}$ d) $\frac{43}{8}$ e) $\frac{5}{3}$ f) $4\frac{1}{3}$ g) $\frac{19}{6}$
6. ¿Cuántas cifras significativas tienen los siguientes números?
a) 48 b) 36,5 c) 0,005 d) 0,05 e) 3,500 f) 0,095 g) 4,5
7. Expresa en notación decimal con dos cifras significativas correctas:
a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{5}{9}$ d) $\frac{17}{9}$ e) $\frac{12}{11}$
8. Calcula aproximando a dos lugares decimales las expresiones periódicas. Considera que los restantes datos también son valores aproximados:
a) $3,\overline{2} \cdot 1,2$ b) $7,\overline{3} \cdot 1,\overline{36}$ c) $16,4 \cdot 2,\overline{5}$

d) $1,\overline{09} \cdot 1,\overline{83}$

e) $0,\overline{75} \cdot 0,\overline{6}$

f) $\frac{9}{4} : 1,\overline{3}$

g) $9,47 : 0,\overline{75}$

h) $\frac{3}{8} : 3,\overline{6}$

i) $0,\overline{6} : 0,\overline{2}$

j) $\frac{3}{4} : 0,\overline{1}$

Calcula aproximando a un lugar decimal las expresiones periódicas. Considera que los restantes datos también son valores aproximados:

9. a) $43,\overline{5} + 65,836 + 25,6$

10. a) $4,864 - 3,\overline{5}$

b) $8,\overline{51} + 2,865 + 1,\overline{3}$

b) $365,965 - 106,348$

c) $6,2 + 3,7\overline{5} + 0,543$

c) $16,\overline{4} - 9,95$

d) $3,48 + 1,50 + 6,586 + 4,56$

d) $454,25 - 80,8\overline{5}$

e) $0,\overline{3} + \frac{2}{3} + 4,\overline{5}$

e) $\frac{22}{3} - 0,\overline{2}$

11. Calcula. Los datos que no son expresiones periódicas son valores aproximados:

a) $(6,405 + 17,8 + 0,70) \cdot 2,5$

b) $(26,986 - 14,76) : 3,0$

c) $0,435 - 0,3 + 0,648 \cdot 8,9$

d) $15,\overline{2} \cdot 1,48 \cdot 5,36$

e) $(3,288 : 4,11) : 2$

f) $5,28 : (4,\overline{3} + 7,8)$

RESUMEN

Operaciones de cálculo con fracciones comunes

$$\frac{\cancel{3}^1}{\cancel{4}_1} \cdot \frac{\cancel{8}^2}{\cancel{9}_3} = \frac{2}{3}$$

La multiplicación de fracciones se realiza multiplicando los numeradores y multiplicando los denominadores. Es conveniente antes de calcular simplificar las fracciones.

RESUMEN

$\frac{b}{a} \text{ es el recíproco de } \frac{a}{b}$ $a \neq 0; b \neq 0$	<p>Si invertimos los términos de una fracción, hallamos su recíproco.</p>
$\frac{12}{26} : \frac{36}{13} = \frac{\cancel{12}^1}{\cancel{26}_2} \cdot \frac{\cancel{13}^1}{\cancel{36}_3} = \frac{1}{6}$	<p>Para dividir fracciones comunes se transforma la división en la multiplicación del dividendo por el recíproco del divisor.</p>
<p>(1) Halla $\frac{3}{5}$ de 15.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\frac{3}{5} \cdot \frac{\cancel{15}^3}{1} = 9$ </div> <p>(2) ¿Qué parte es 9 de 15?</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ </div> <p>(3) ¿De qué número es 9 los $\frac{3}{5}$?</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $9 : \frac{3}{5} = \frac{\cancel{9}^3 \cdot 5}{\cancel{3}_1} = 15$ </div>	<p>Los problemas típicos de fracciones son:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Hallar una fracción de un número (1): se resuelve multiplicando. • Hallar qué parte es un número de otro (2): se forma una fracción y se simplifica. • Hallar el número cuando se conoce una parte fraccionaria de él (3): se resuelve dividiendo.
Operaciones con expresiones decimales	
$ \begin{array}{r} 801 : 0,09 \\ \hline 801 \quad 00 \quad \overline{) 9} \\ \underline{72} \\ 81 \\ \underline{81} \\ 000 \end{array} $	<p>Para dividir expresiones decimales:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Se elimina la coma del divisor multiplicando el dividendo y el divisor por 10, 100, 1 000, ... • Se divide como si el dividendo fuera un número natural. • Se coloca la coma en el cociente inmediatamente después que se hayan dividido las unidades del dividendo si fuera necesario.

RESUMEN

Operaciones con expresiones decimales	
$\frac{1}{4} = 1 : 4$ $\begin{array}{r} 10 \quad \overline{) 4} \\ \underline{8} \\ 20 \\ \underline{20} \\ \text{resto} \rightarrow 0 \\ \text{cero.} \end{array}$ <p style="text-align: right; margin-right: 20px;">0,25 ↑ expresión decimal finita.</p> $\frac{1}{3} = 1 : 3$ $\begin{array}{r} 10 \quad \overline{) 3} \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 1 \end{array}$ <p style="text-align: right; margin-right: 20px;">0,33... ↑ expresión decimal periódica.</p>	<p>Mediante la división pueden obtenerse expresiones decimales de fracciones comunes cualesquiera. Si al dividir se obtiene un resto cero, la expresión decimal es finita.</p> <p>Si al dividir no se obtiene el resto cero y en el cociente se repite determinada cifra o grupos de cifras, la expresión obtenida es una expresión decimal periódica.</p>
$1,2 \cdot 0,\bar{3}$ $0,\bar{3} \approx 0,33$ $\begin{array}{r} 1,2 \cdot 0,33 \\ \underline{36} \\ \underline{36} \\ \hline 0,396 \approx 0,40 \end{array}$ <p style="text-align: right; margin-right: 20px;">2 cifras significativas. ↑</p>	<p>Al calcular con valores aproximados debe expresarse el resultado con tantas cifras significativas como el dato que menos cifras tiene.</p>

Ejercitación variada

- Haz estos dibujos de la figura B28 en tu libreta y escribe junto a cada uno el número natural, la fracción o la expresión decimal que le corresponda, seleccionándolo del recuadro:

$$1 ; 0,1 ; 2\frac{3}{4} ; \frac{3}{8} ; 1\frac{1}{2} ; 0,01 ; 0,25 ; \frac{3}{5}$$

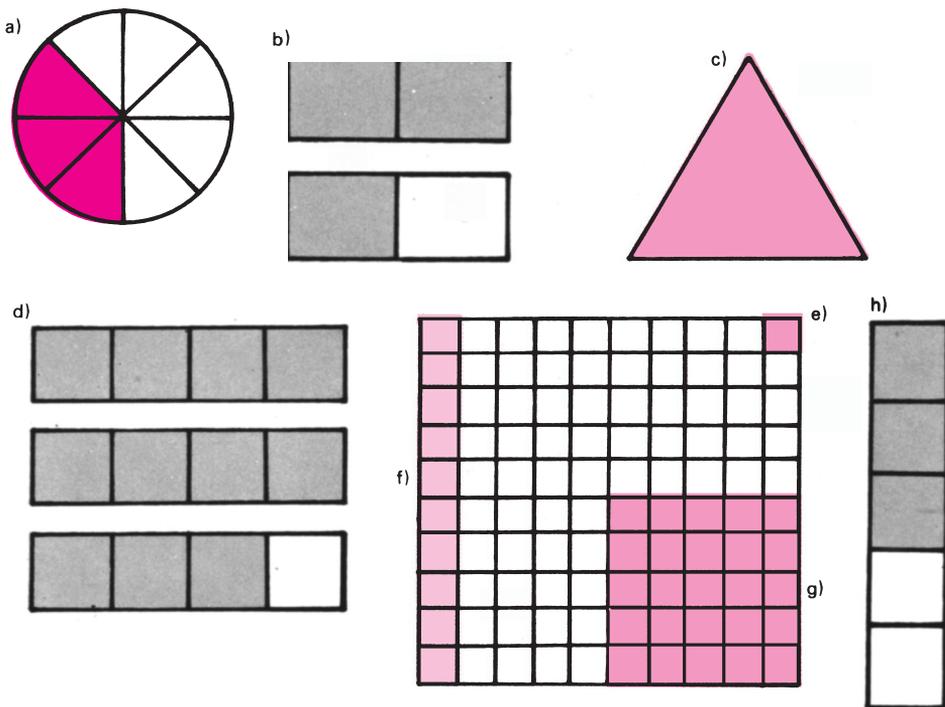


Fig. B 28

2. Halla gráficamente:

a) $\frac{3}{8}$ de 8 bolas.

b) $\frac{2}{3}$ de 9 triángulos.

c) $\frac{4}{5}$ de 10 círculos.

d) $\frac{4}{4}$ de 12 cuadraditos.

3. ¿Qué parte es 25 de 60?

4. ¿Qué parte es 85 de 50?

5. Calcula la longitud del campo del esquema de la figura B29.

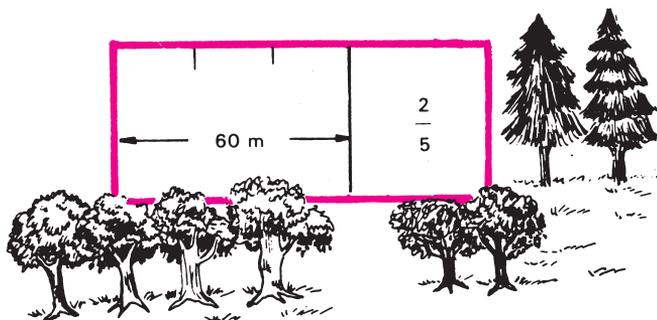


Fig. B 29

Compara los siguientes pares de fracciones. Fundamenta los resultados.

6. a) $\frac{7}{8}$ y 0,9 b) $\frac{3}{4}$ y $\frac{30}{40}$ 7. a) $\frac{7}{11}$ y $\frac{3}{8}$ b) 1,6 y $\frac{8}{16}$

c) $\frac{9}{10}$ y $\frac{10}{9}$ d) $\frac{3}{2}$ y 1,49 c) $1\frac{1}{6}$ y $\frac{6}{7}$ d) 0,54 y $\frac{11}{20}$

e) 0,48 y $\frac{12}{25}$ f) $\frac{5}{8}$ y 0,625 e) 0,08 y $\frac{4}{5}$ f) $\frac{10}{50}$ y 0,2

Coloca en cada cuadradito la fracción que convenga para que, sumando horizontal, vertical y diagonalmente, se obtenga 3.

8.

	$\frac{1}{3}$	
	1	
		$\frac{5}{21}$

9.

$\frac{3}{4}$		
		$\frac{3}{4}$
1		

10. Sigue el vuelo de la mariposa y halla el resultado (fig. B30).

a) $\frac{3}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{6} + 1\frac{1}{2} - \frac{5}{12}$  =

b) $1\frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{7}{20} + \frac{11}{20} - 0,25$  =

Fig. B 30

11 Halla la suma en las siguientes figuras (fig. B31).

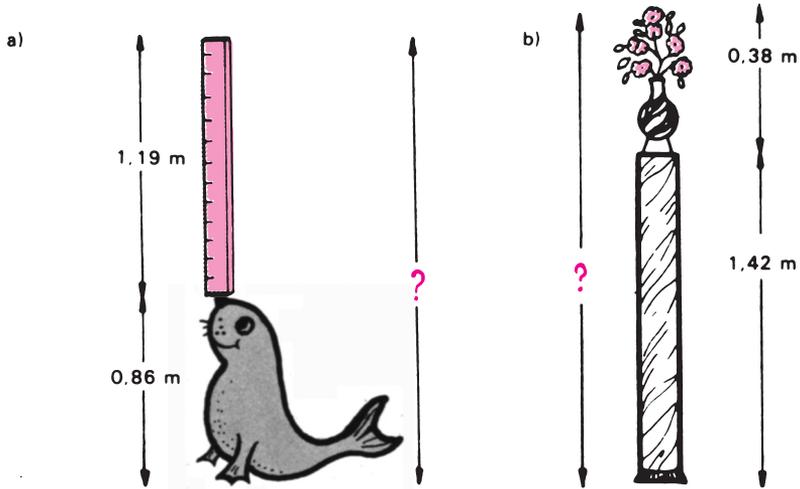


Fig. B 31

12. Calcula el sumando que falta (fig. B32).

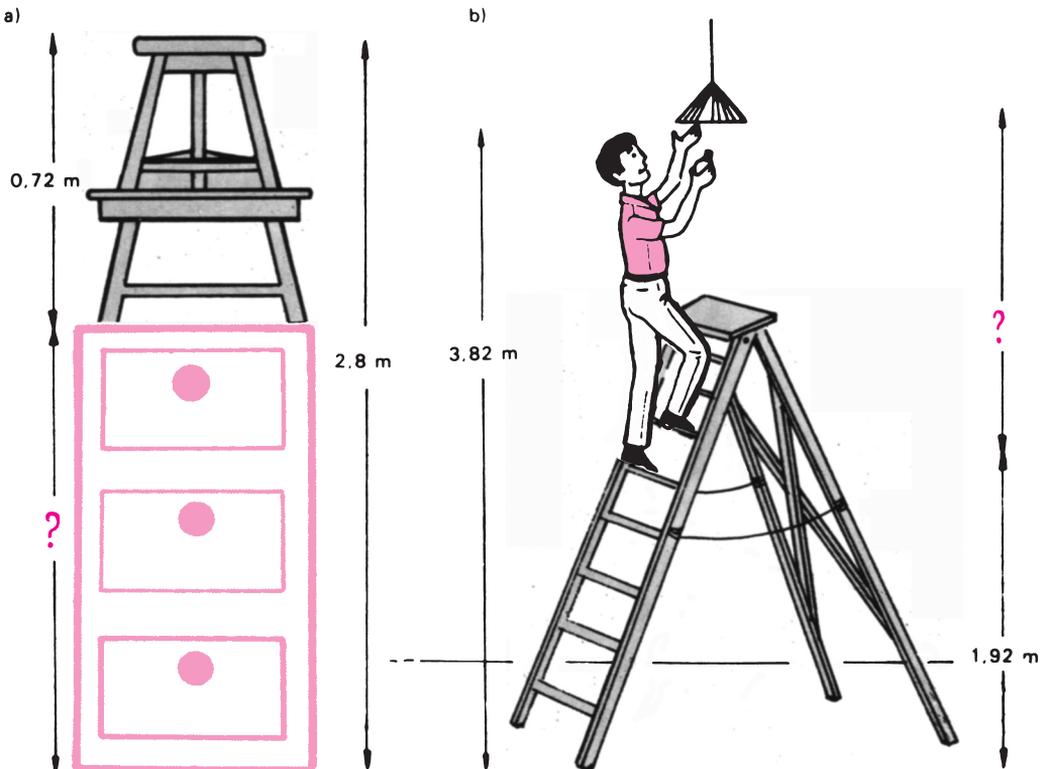


Fig. B 32

13. Calcula. El resultado final te dirá si has calculado bien (fig. B33).

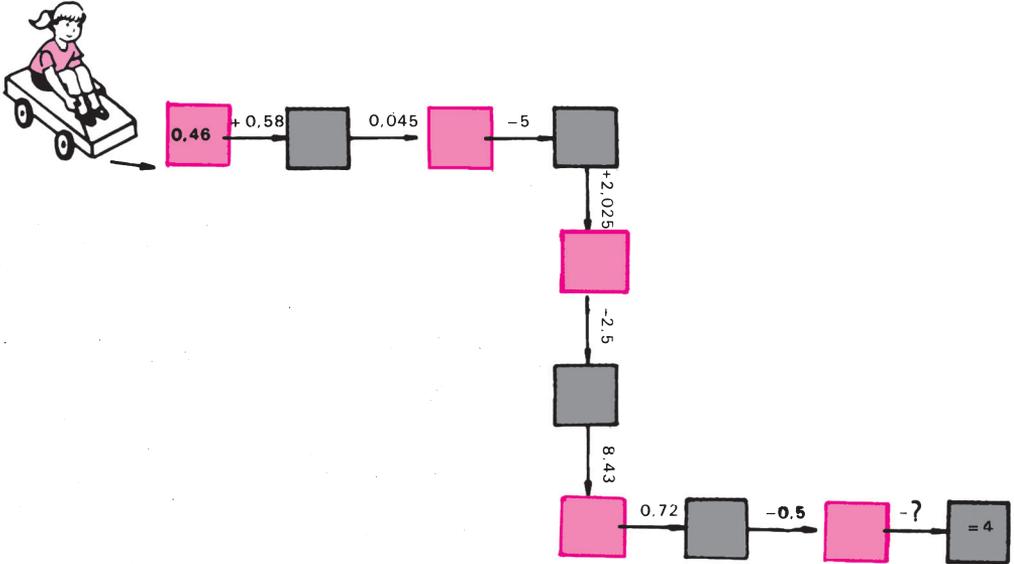


Fig. B 33

Calcula y simplifica tanto como sea posible.

14. a) $\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\right)$

b) $\frac{3}{13} \cdot \left(\frac{7}{4} + \frac{1}{5}\right)$

c) $\left(\frac{7}{4} - \frac{3}{8}\right) \cdot \frac{8}{11}$

d) $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + 2\frac{1}{5}$

e) $\left(\frac{15}{30} - \frac{4}{10}\right) : \frac{1}{3}$

15. a) $\frac{5}{13} \cdot \left(\frac{4}{20} - \frac{1}{10}\right)$

b) $\left(3 - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(2 - \frac{4}{8}\right)$

c) $\left(5 - 3\frac{3}{4} + \frac{1}{8}\right) \cdot 4$

d) $\left(\frac{9}{12} + \frac{3}{8}\right) \cdot \frac{1}{3}$

e) $\left(5\frac{4}{7} + 1\frac{3}{4}\right) : \frac{15}{14}$

Completa las siguientes tablas:

16.

x	$x : 1\frac{4}{5}$
$\frac{7}{8}$	
0,45	
3,708	

17.

x	$1,1 : x$
$2\frac{1}{5}$	
0,22	
$\frac{11}{10}$	

18. Si dividimos $\frac{4}{7}$ entre otra fracción, el cociente es $\frac{3}{14}$. ¿Cuál es el divisor?
19. El cociente de dos fracciones es $\frac{2}{3}$, el dividendo es $\frac{8}{15}$. ¿Cuál es el divisor?

Contesta:

20. a) ¿Qué parte de las 24 h del día son las 7 h que deben dormir los adultos?
- b) ¿Cuánto es $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{5}$ de 20?
- c) ¿Qué parte de \$1 son 40¢?
- d)* Los $\frac{4}{5}$ de un número son 40. ¿Cuánto serán los $\frac{3}{10}$ del número?
- e) $\frac{5}{6}$ de los $\frac{3}{5}$ del triplo de 40, ¿cuánto es?
21. a) Gasté $\frac{2}{5}$ de los 95¢ que tenía. ¿Cuánto gasté?
- b) ¿Cuánto es $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{9}$ de 36?
- c) Los $\frac{3}{4}$ de un número son 60, ¿cuál es el número?
- d)* Si $\frac{3}{5}$ de un número es 45, ¿cuánto serán $\frac{2}{3}$ de dicho número?
- e) ¿Qué fracción es $\frac{1}{4}$ de los $\frac{5}{6}$ de $\frac{1}{8}$ de 16?

22. Realiza las operaciones necesarias para completar este juego numérico (fig. B34).

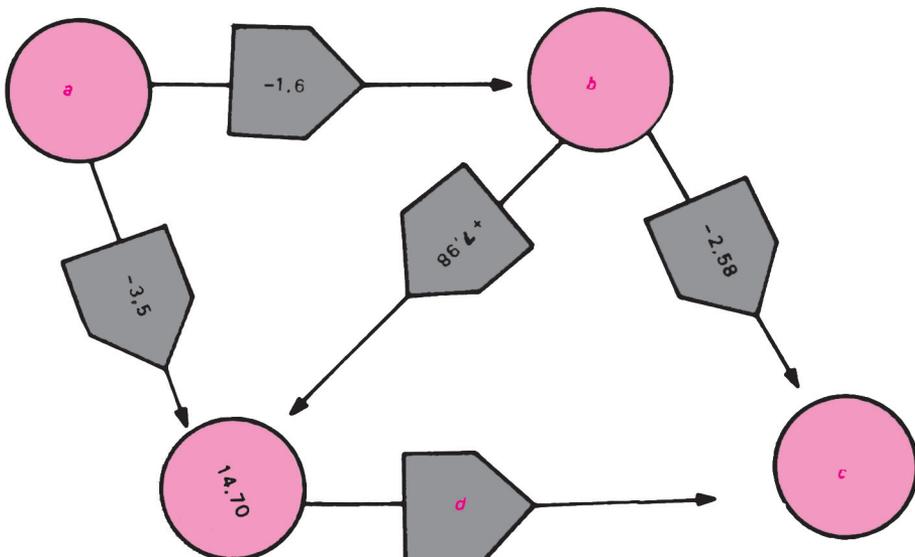


Fig. B 34

23. Tenía una expresión decimal. La dividí entre 4. La respuesta fue 0,121. ¿Cuál era la expresión decimal?
24. Tengo una fracción común. La multiplico por 3 y al producto le adiciono 0,8. La respuesta es 1,55. ¿Qué fracción tengo?
25. Pensé en una expresión decimal. La multipliqué por 3. Al producto le resté 0,8 y después adicioné 0,3 a la diferencia obtenida. Obtuve 1.
26. Pensé en un número natural. Le adicioné 0,5 y al resultado le sustraje 5,5. Al número obtenido le adicioné 2,5 y después de esa cantidad resté 2,5. La respuesta fue 10. ¿En qué número natural había pensado?
- a) ¿En qué expresión decimal pensé?
- b) ¿A qué fracción común equivale?

Halla el cociente y comprueba cada operación.

27. a) $0,052 : 26$
 b) $0,0875 : 35$
 c) $0,0956 : 956$
 d) $8976 : 0,88$
 e) $9,126 : 0,078$
28. a) $0,423 : 15$
 b) $0,056 : 0,4$
 c) $42,120 : 0,78$
 d) $693,6 : 0,34$
 e) $0,965 : 0,20$

Convierte en expresiones decimales. Clasifica las expresiones halladas.

29. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{12}$ c) $\frac{4}{9}$ 30. a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{5}{36}$ c) $\frac{15}{32}$
- d) $\frac{5}{7}$ e) $\frac{3}{40}$ f) $\frac{3}{50}$ d) $\frac{71}{80}$ e) $\frac{21}{22}$ f) $\frac{21}{25}$

31. Selecciona la expresión correcta para n :

- a) $n = 0,\overline{17}$ $0,17777\dots$; $0,17111\dots$; $0,1717\dots$
- b) $n = 0,\overline{254}$ $0,2545544\dots$; $0,254254\dots$; $0,25444\dots$

32. Escribe en forma abreviada las siguientes expresiones decimales:

- a) $0,333\dots$ b) $0,7777\dots$ c) $0,151515\dots$
- d) $0,324324\dots$ e) $0,565656\dots$ f) $0,507507\dots$
- g) $526,1444\dots$ h) $0,7272\dots$ i) $54,7575\dots$

Calcula. Redondea las periódicas a un lugar (a dos lugares) después de la coma.

33. a) $1,\overline{2} \cdot 4,5$ b) $1,\overline{3} \cdot 1,\overline{2}$ 34. a) $33,25\overline{7} : 1,\overline{8}$ b) $37,\overline{7} : 3,\overline{7}$
- c) $\frac{1}{3} \cdot 0,\overline{81}$ d) $\frac{5}{9} \cdot 6,\overline{6}$ c) $0,\overline{47} : 0,\overline{75}$ d) $0,\overline{81} : 0,\overline{3}$
- e) $\frac{2}{3} \cdot 0,\overline{5}$ f) $3,\overline{6} \cdot \frac{3}{8}$ e) $\frac{2}{3} : 0,\overline{2}$ f) $\frac{7}{9} : 0,\overline{2}$

35. Una piscina está llena hasta sus $\frac{3}{5}$ y otra exactamente igual, hasta sus $\frac{5}{7}$. ¿Cuál contiene mayor cantidad de agua?
36. Los alumnos de un destacamento de pioneros recogen en 4 días sucesivos $13\frac{1}{2}$ kg, $10\frac{3}{4}$ kg, $11\frac{1}{4}$ kg y $10\frac{1}{8}$ kg de materia prima. ¿Qué total de materia prima recogieron?
37. La mamá de Norka compró dos retazos de la misma tela. Uno tiene $\frac{7}{8}$ m más que el otro. Si el mayor mide $1\frac{3}{4}$ m,
- ¿cuánto mide el menor?,
 - ¿cuánto miden entre los dos?
38. Un ciclista recorre tres etapas: en la primera hace un recorrido de 28,32 km, en la segunda, 40,3 km y en la tercera, 9,25 km. ¿Cuál fue el recorrido total?
39. Una persona sale de un punto A siguiendo una calle rectilínea en dirección a B. Recorre 1,78 km, después sigue en la misma dirección 1,12 km y después en dirección contraria 2,26 km. ¿A qué distancia se encuentra del punto de partida?
40. Un vagón de ferrocarril conduce 5 bultos de mercancías. El primero pesa 72,675 kg; el segundo, 8 kg menos que el primero; el tercero, 6,104 kg más que los dos anteriores juntos y el cuarto tanto como los tres anteriores. ¿Cuál es el peso del quinto bulto si el peso total de las mercancías es 760,34 kg?
41. En la pala de una excavadora caben $\frac{4}{5}$ m³ de tierra como promedio. La excavadora ha realizado 45 excavaciones. ¿Cuántos metros cúbicos de tierra ha sacado?
42. Asela obtuvo 75 puntos en una prueba y Antonio obtuvo una nota equivalente a $\frac{14}{15}$ de la nota obtenida por Asela. ¿Aprobó Antonio? ¿Qué nota obtuvo?
43. Marcia estaba haciendo un flan y en la receta decía que debía poner $1\frac{3}{4}$ tazas de leche. Su hermana Marthica quiso después hacer un flan de la mitad del tamaño del que hizo Marcia. ¿Qué cantidad de leche necesitó?
44. Julio cortó una varilla de $4\frac{3}{4}$ dm. Después cortó otra que contenía $5\frac{1}{3}$ veces a la anterior. ¿Qué longitud tenía la última varilla cortada?
45. Si de una soga de 40 m de longitud se cortan tres partes iguales de $4\frac{1}{4}$ m cada una, ¿qué longitud tiene la soga restante?
46. El área de un rectángulo es $25\frac{1}{2}$ cm². Uno de sus lados mide $3\frac{1}{28}$ cm. ¿Cuánto mide el otro lado?

47. La pala de una excavadora ha sacado 36 m^3 de tierra. Si en la pala caben $\frac{4}{5} \text{ m}^3$ de tierra, ¿cuántas excavaciones ha realizado?
48. En la pala de una grúa caben como promedio $\frac{3}{4} \text{ t}$ de abono. Si se han cargado 18 t de abono, ¿cuántas veces se ha utilizado la grúa?
49. La edad de Luisa es $\frac{1}{2}$ de los $\frac{2}{3}$ de la de Alicia. Si esta tiene 27 años, ¿qué edad tiene Luisa?
50. De las 84 bolas que tenía Sergio, perdió $\frac{2}{7}$ y prestó a un amiguito $\frac{5}{14}$. ¿Con cuántas bolas se quedó?
51. El destacamento de Darío está formado por 45 alumnos. De ellos fueron $\frac{2}{3}$ al concurso de Matemática, pero sólo aprobaron $\frac{4}{5}$ de los que se presentaron. ¿Cuántos alumnos fueron al concurso? ¿Cuántos aprobaron?
52. Un estudiante distribuye las 24 h del día de la siguiente forma: $\frac{1}{3}$ del día para estudiar; $\frac{1}{6}$ para ayudar en la casa, $\frac{1}{12}$ para comida, $\frac{1}{3}$ para dormir y las horas restantes para descanso o actividades recreativas. ¿Cuántas horas dedica a cada actividad?
53. Juan tenía $\$60$ y gastó $\$18$. ¿Qué parte de su dinero gastó? ¿Qué parte le queda?
54. Un padre reparte $\$1$ entre sus tres hijos. A uno le da 50% , a otro 40% y al tercero el resto. ¿Qué parte del peso le ha dado a cada uno?
- 55* De los 80 lápices que había en el escaparate la maestra cogió 40 para repartirlos a los alumnos del Destacamento de sexto A, pero sólo estaban presentes 35 alumnos.
- ¿Qué parte del total de lápices pensaba repartir?
 - ¿Qué parte de los que pensaba repartir pudo entregar?
 - ¿Qué parte del total de lápices pudo entregar?
56. Compré un traje y un reloj. El traje me costó $\$70$ y esa cantidad es los $\frac{5}{9}$ del precio del reloj. ¿Cuánto costó este?
57. Un edificio tiene 28 m de altura y esa altura representa los $\frac{4}{7}$ de los $\frac{7}{8}$ de la altura de otro edificio. ¿Qué altura tiene el otro edificio?
58. Pedro tiene 18 años. Si la edad de Pedro es $\frac{3}{2}$ de la de su hermana Elenita, ¿qué edad tiene Elenita?

59. Los $\frac{2}{3}$ de la edad de Ulises son 24 años. La edad de Roberto es $\frac{4}{9}$ de la de Ulises. Halla ambas edades.
60. Se corta un pedazo de 36 cm de una varilla de metal. Ese pedazo cortado representa los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{4}{5}$ de la varilla. ¿Qué longitud tenía la varilla?
61. 55 kilowatt por hora cuestan \$4,95. ¿Cuánto cuestan 130 kilowatt por hora?
62. Para 800 libretas se necesitan 68,8 kg de papel. ¿Cuántos kilogramos de papel se utilizarán para fabricar 2 millones de libretas?
63. El salario de un técnico por 40,5 h de trabajo la pasada semana fue \$48,60. ¿Cuál es su salario por cada hora trabajada?

TANTO POR CIENTO

El término *per cent* se deriva del latín *per centum*, es decir, *por cada ciento*.

La evolución del símbolo para el tanto por ciento tiene una interesante historia, ya que aparece por primera vez anotado por algún lector anónimo en el manuscrito de la obra *Tratado del ábaco y de Astronomía* escrito por el astrólogo y matemático de la ciudad italiana de Florencia, Paulo Dagmari en 1339. La nota se supone que fue adicionada en algún tiempo entre 1400 y 1435.

El autor desconocido de la anotación en vez de escribir *per 100*, *p 100* o *p cent*, como se usaba hasta entonces, lo representó por $p \text{ } \frac{\text{c}}{100}$. La evolución posterior lleva a eliminar la *p* y deja solo el símbolo $\frac{\text{c}}{100}$ que en los libros de 1650 ya aparece impreso como $\frac{\text{c}}{100}$ y que conocemos actualmente por el símbolo %.

1. Significado del tanto por ciento. Tanto por ciento de un número

Probablemente has observado con mucha frecuencia que se da información acerca de algo en **tanto por ciento** y se usa el símbolo **%**.

El 60% de los alumnos del aula son varones.

El 20,9% de la troposfera es oxígeno.

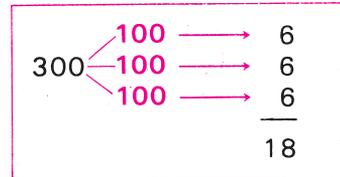
En el curso 85-86 el 58% de los alumnos de la escuela primaria en Cuba asistían a escuelas de doble sesión.

Por lo tanto es importante que tú aprendas a interpretar esa información que se da en **tanto por ciento** y que significa **tantos de cada 100**, es decir, **los elementos que se toman de cada conjunto de 100**.

Ejemplo 1

Halla el 6% de 300.

- 300 está formado por 3 grupos de 100.
- 6% significa que por cada 100 tomamos 6.
- Para hallar el 6% de 300 tomamos 3 veces 6.



$$3 \cdot 6 = 18$$

En el ejemplo 1 hemos utilizado un procedimiento que resulta muy largo cuando se trata de números grandes, por lo que es conveniente encontrar una manera de simplificarlo.

Ejemplo 2

Un joven ahorra el 8% de sus entradas anuales y estas ascienden a \$2 400. ¿Cuánto ahorra ese joven al año?

Para resolver el problema **tenemos que hallar el 8% de 2 400**. Observa que si **de cada conjunto de \$100 tomamos 8, la parte del conjunto** que hemos tomado es $\frac{8}{100}$, o sea 0,08.

Lo anterior significa que hallar el 8% de un número equivale a hallar $\frac{8}{100}$ del número, que se obtiene multiplicando la fracción por el número como aprendiste en el capítulo de fracciones.

$$\frac{8}{100} \cdot 2\,400 = 8 \cdot 24 = 192$$

o también, $0,08 \cdot 2\,400 = 192$

Respuesta: El joven ahorra **\$192** cada año.

Ejemplo 3

¿Cuánto es el 21,2% de 60?

Para resolver este problema se procede igual que en el ejemplo 2. En este caso **de cada 100 se toman 21,2**; luego la parte de 100 que representa el 21,2% la podemos representar como el cociente $\frac{21,2}{100}$. Entonces hallar el 21,2% de 60 equivale a hallar el $\frac{21,2}{100}$ de ese número.

En este caso:

$$\frac{21,2}{100} \cdot 60 = 2,12 \cdot 6 = 12,72$$

o también, $0,212 \cdot 60 = 12,72$

Luego el 21,2% de 60 es 12,72.

Como observas en el ejemplo 3, **el tanto por ciento puede ser un número fraccionario cualquiera**.

En resumen:

Para calcular el tanto por ciento de un número multiplicas el número por el tanto por ciento (expresado como una división de divisor 100 o en notación decimal corriendo la coma dos lugares a la izquierda).

Como habrás observado en los ejemplos 2 y 3, para calcular con tantos por cientos es necesario representarlos como una división con 100 como divisor o en notación decimal.

En muchas ocasiones es necesario hacer lo contrario, es decir, interpretar un cociente como un tanto por ciento.

Ejemplo 4

Escribe como tanto por ciento los siguientes números:

a) $\frac{25}{100}$ b) $\frac{3}{5}$ c) 0,5 d) 1,3

Como lo que se quiere saber es cuántos hay por cada 100 basta expresarlos como una división con divisor 100 y tomar las cifras del dividendo.

a) $\frac{25}{100}$ Como ya está expresado como una división con divisor 100, el dividendo es 25. Luego se expresa como tanto por ciento, 25%

b) $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{60}{100} \longrightarrow 60\%$

c) $0,5 = \frac{50}{100} \longrightarrow 50\%$. Observa que cuando está expresada la cantidad en notación decimal basta multiplicar por 100, que equivale a correr la coma dos lugares a la derecha.

d) $1,3 \longrightarrow 130\%$

En el inciso d) observas que has obtenido un tanto por ciento mayor que 100%. Esto sucede básicamente en situaciones en las que existe sobrecumplimiento.

Ejemplo 5

En una fábrica de televisores se ensambló en una semana el 130% de su plan que era de 600 televisores.

¿Cuántos televisores se ensamblaron?

En este problema hay que calcular el 130% de 600. Como ya sabemos, lo podemos calcular como se indica a continuación:

$$\frac{130}{100} \cdot 600 = 130 \cdot 6 = 780$$

En la semana se ensamblaron 780 televisores. Observa que hubo un sobrecumplimiento de 180 televisores, que representan el 30% del plan.

Ejercicios (epígrafe 1)

Calcula:

- | | | | |
|----------------------|---------------------|------------------|-----------------|
| 1. a) $43 \cdot 100$ | b) $118 \cdot 100$ | 2. a) $43 : 100$ | b) $118 : 100$ |
| c) $1,2 \cdot 100$ | d) $0,8 \cdot 100$ | c) $1,2 : 100$ | d) $0,8 : 100$ |
| e) $11,2 \cdot 100$ | f) $314 \cdot 100$ | e) $11,2 : 100$ | f) $314 : 100$ |
| g) $29,5 \cdot 100$ | h) $1,32 \cdot 100$ | g) $29,5 : 100$ | h) $1,32 : 100$ |

3. a) $8,5 \cdot 42$ b) $2,7 \cdot 125$ c) $4,5 \cdot 82$ d) $30,5 \cdot 212$
e) $25 \cdot 0,3$ f) $40 \cdot 1,2$ g) $45 \cdot 0,8$ h) $80 \cdot 1,1$

4. ¿Qué significa la expresión: Realicé el 100% del trabajo?

Escribe como tanto por ciento:

5. a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{7}{8}$ 6. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{9}{10}$ c) $\frac{1}{25}$
d) $\frac{3}{10}$ e) $\frac{39}{10}$ f) 0,71 d) 0,2 e) $\frac{68}{100}$ f) $\frac{5}{4}$
g) 3,6 h) 0,11 g) $\frac{115}{100}$ h) 2,3

7. Escribe como fracción decimal:

8. Expresa en notación decimal:

- a) 37% b) 5% c) 69% a) 74% b) 3% c) 59%
d) 115% e) 103% f) 122% d) 203% e) 3,4% f) 2,01%
g) 58% h) 7% i) 35% g) 0,05% h) 2,7% i) 3,9%

9. Si de una unidad se quita 0,85, ¿qué fracción queda? ¿Cómo se expresa esta en tanto por ciento?

10. Halla el:

- a) 3% de 200 b) 12% de 300 c) 20% de 70
d) 50% de 40 e) 64% de 1 100 f) 21% de 2 300
g) 4% de 25 h) 15% de 20 i) 24% de 75
j) 88% de 125 k) 175% de 57 l) 55% de 106

11. Cuánto es el:

- a) 14% de 38 b) 67% de 59 c) 28% de 115
d) 71% de 93 e) 69% de 21 f) 53% de 187

12. Calcula:

- a) 4,2% de 26 m b) 8,11% de 17 kg
c) 15,4% de 89 h d) 33,7% de 95 dm
e) 103,5% de 63 L f) 2,34% de 605 g
g) 6% de \$713 h) 48,52% de 109 t

13. En una escuela hay 350 pioneros. De ellos el 54% son varones. ¿Cuántos varones hay?

14. En un destacamento de 45 pioneros, el 80% está incorporado a equipos deportivos. ¿Cuántos pioneros se han incorporado a esos equipos?

15. Un equipo participó en 80 juegos. De ellos perdió el 15%. ¿Cuántos juegos perdió?

16. El tiempo planificado para la construcción de un círculo infantil era de 180 días. Si la microbrigada que ejecutó la obra sólo necesitó el 75% del tiempo planificado, ¿cuántos días demoró la construcción del círculo?
17. Una trabajadora ha acumulado en 3 meses 115 h de trabajo voluntario; el 40% de ellas han sido apoyando la construcción de una casa consultorio del médico de la familia y el resto en la agricultura.
 - a) ¿Cuántas horas trabajó en la construcción?
 - b) ¿Cuántas horas dedicó a la agricultura?
18. En saludo a la jornada Triunfo de la Revolución un chofer de taxis se comprometió a realizar 462 h en viajes prestándole servicios a la población después de su horario de trabajo. El compromiso fue cumplido en un 135%. ¿Cuántas horas voluntarias realizó?
19. A un taller de confecciones textiles se le entregaron 1 894 m de tela. El 63% se utilizará para hacer camisas de hombre y el resto para camisas de niño. ¿Cuántos metros de tela se utilizarán en la confección de camisas de hombre y cuántos en la de niños?
20. Una cooperativa de producción agropecuaria cosechó 2 153 q de viandas. El 41% de la cosecha es de malangas, el 27% de papas, el 11% de plátanos y el resto de boniatos. ¿Cuántos quintales de cada vianda se cosecharon?

2. Qué tanto por ciento es un número de otro

En muchas ocasiones es necesario saber **qué tanto por ciento es un número de otro**, es decir qué parte es un número de otro e interpretar ese cociente como un tanto por ciento.

Ejemplo 1

En un trabajo de control de matemática en un aula de sexto grado, de una matrícula de 41 alumnos aprobaron 38. ¿Qué tanto por ciento de aprobados se obtuvo?

Se desea saber qué tanto por ciento es 38 de 41. Debes analizar qué parte es 38 de 41 para lo cual se divide:

$$\begin{array}{r}
 380 \quad | \quad 41 \\
 369 \quad | \quad 0,926 \ 8 \\
 \hline
 110 \\
 92 \\
 \hline
 280 \\
 246 \\
 \hline
 340 \\
 328 \\
 \hline
 12
 \end{array}$$

Como debes expresar la respuesta como tanto por ciento debes **multiplicar por 100** el resultado:
 $0,926 \ 8 \cdot 100 \approx 92,7\%$

Respuesta: Se obtuvo el 92,7% de aprobados.

Otra vía de solución de este ejercicio es multiplicar primero por 100 el dividendo (en este caso 38) y luego dividir.

$$\begin{array}{r}
 3800 \quad \overline{) 41} \\
 \underline{369} \\
 110 \\
 \underline{92} \\
 280 \\
 \underline{246} \\
 340 \\
 \underline{328} \\
 12
 \end{array}$$

En estos casos vamos a convenir, si la división no es exacta, dar la respuesta redondeada a un lugar después de la coma.

En resumen:

Para hallar qué tanto por ciento es un número de otro divides el primero por el segundo y expresas el cociente como tanto por ciento.

Ejercicios (epígrafe 2)

1. Calcula y si es necesario redondea el resultado a un lugar después de la coma.

a) $24:32$	b) $58:101$	c) $123:148$
d) $3,8:43$	e) $524:322$	f) $821:43$
g) $92,1:21$	h) $582:483$	i) $12,8:21$

2. Calcula qué tanto por ciento es:

a) 10 de 200	b) 24 de 48	c) 3 de 400
d) 32 de 160	e) 5 de 40	f) 7 de 84
g) 8 de 72	h) 15 de 20	i) 25 de 20

3. Calcula el tanto por ciento:

a) 730 de 730	b) 30 de 60	c) 45 de 600
d) 24 de 120	e) 0,2 de 8	f) 10,5 de 23
g) 8,1 de 150	h) 2 de 24,6	i) 60 de 45

4. Calcula el tanto por ciento:

- a) 11 cm de 26 cm
- c) 13 mm de 2,6 mm
- e) \$0,40 de \$23,80

- b) 51 h de 170 h
- d) 5,4 q de 620 q
- f) 3 L de 0,4 L

g) $\frac{1}{2}$ t de 10 t

h) 0,08 kg de 6 kg

i) $\frac{3}{5}$ m de 7 m

j) \$4 de \$2

5. Un equipo de pelota gana 12 de los 15 juegos efectuados.

- a) ¿Qué tanto por ciento de los juegos ganó?
- b) ¿Qué tanto por ciento perdió?

6. Unas gallinas han puesto hoy 35 huevos de los cuales se han roto 7.

- a) ¿Qué tanto por ciento se ha roto?
- b) ¿Qué tanto por ciento quedó sano?

7. De los 154 trabajadores de una empresa, 148 participaron en el Domingo Rojo en saludo a la Gran Revolución de Octubre. ¿Qué tanto por ciento de participación en el Domingo Rojo tuvo la empresa?

8. De los 978 electores de una circunscripción del Poder Popular, 596 son mujeres.

- a) ¿Qué tanto por ciento de mujeres hay en la circunscripción?
- b) ¿Cuántos hombres hay?

9. De un período de 50 días de clases, Pedro asistió 48 días, María 45 días y Martha, por estar enferma, solo asistió 35 días. ¿Qué tanto por ciento del período asistió cada alumno?

10. Para ir a la escuela debo recorrer una distancia de 850 m. Si he recorrido ya 210 m, ¿qué tanto por ciento de la distancia he recorrido? ¿Qué tanto por ciento de la distancia me queda por recorrer?

11. Rogelio se ha propuesto la meta de cortar 200 @ de caña diariamente durante la presente zafra.

El comportamiento durante los tres primeros días de corte fue el siguiente:

lunes: 150 @

martes: 200 @

miércoles: 210 @

¿Qué tanto por ciento de la meta alcanzó cada día?

12. En un establecimiento del Ministerio de la Industria Alimenticia hay 164 trabajadores en total. De ellos 15 son graduados universitarios; 118 técnicos medios, 22 obreros calificados y el resto son graduados de noveno grado. ¿Qué tanto por ciento representa cada una de estas calificaciones?

13. El tiempo planificado para la construcción de un consultorio del médico de la familia era de 148 días, pero gracias al esfuerzo conjunto de los microbrigadistas y vecinos del lugar sólo se necesitaron 119 días. ¿Qué tanto por ciento del tiempo planificado se empleó?

14. En un taller de reparaciones un técnico se propuso arreglar 289 televisores como saludo a la Asamblea Provincial del Partido. Si logró reparar 315 equipos, ¿qué tanto por ciento del compromiso logró?

3. Hallar el número, conocido un tanto por ciento de él

Seguramente recuerdas que para hallar el tanto por ciento de un número, se multiplicaba el tanto por ciento por el número. Ahora **vamos a encontrar el número cuando conocemos el tanto por ciento y su resultado**, que equivale a buscar el número cuando se conoce una **parte fraccionaria** de él.

Ejemplo 1

¿De qué número es 18 el 15%?

Observa que **el número es desconocido** y lo que conocemos es 18 que es el 15% de él, es decir se busca el número cuando se conoce una parte fraccionaria de él.

Para ello aprendiste en el capítulo de fracciones que puedes encontrar el número dividiendo 18 (que es la parte fraccionaria) entre la fracción

(que es $\frac{15}{100}$):

$$18 : \frac{15}{100}$$

$$= \overset{6}{\cancel{18}} \cdot \frac{100}{\cancel{15}_5}$$

$$= 120$$

Respuesta: El número es 120.

Observa que es el **problema inverso** a calcular el tanto por ciento de un número, por ello si en aquel caso **multiplicabas**, ahora debes **dividir**

En resumen:

Para hallar un número, dado un tanto por ciento y el resultado del mismo, divides el resultado por el tanto por ciento (expresado como un cociente con divisor 100).

Ejercicios (epígrafe 3)

1. Calcula el número del cual:

a) 15 es el 2%

b) 18 es el 3%

c) 20 es el 15%

d) 34 es el 20%

e) 240 es el 4%

f) 86 es el 12%

- | | |
|---------------------|--------------------|
| g) 140 es el 70% | h) 57 es el 95% |
| i) 86,8 es el 140% | j) 3,20 es el 4% |
| k) 2,40 es el 3% | l) 94,50 es el 78% |
| m) 104,76 es el 72% | n) 45,9 es el 150% |

2. De qué cantidad es:

a) 38 m el 50%	b) 15,2 kg el 32%
c) 54 h el 75%	d) 2,5 L el 4%
e) 13,4 t el 80%	f) 68 q el 136%
g) \$15,80 el 79%	h) 5,46 mm el 13%
3. Manolito gastó \$10 en libros, lo que representa el 20% del dinero que tenía. ¿Cuánto dinero tenía Manolito?
4. Se está imprimiendo un libro de texto de Matemática. Se han terminado de imprimir 112 páginas lo que representa el 80% del total. ¿Cuántas páginas tendrá el libro?
5. Un obrero textil ha producido 1 959 m de tela que es el 75% del compromiso a cumplir en trabajo voluntario en saludo a la Jornada Camilo - Che. ¿Cuántos metros de tela habrá producido al cumplir el compromiso?
6. El examen de Matemática lo aprobaron 36 alumnos del destacamento de Armando. Estos representan el 80% de los examinados. ¿Cuántos alumnos se examinaron?
7. El núcleo del PCC de una fábrica está formado por 24 militantes que representan el 25% del total de obreros. ¿Cuántos obreros trabajan en la fábrica?
8. En un CDR, 20 de sus miembros son estudiantes, lo que representa el 16% del total de cederistas. ¿Cuántos miembros tiene ese CDR?
9. El bronce está formado por cobre y estaño. ¿Cuántos kilogramos de bronce pueden producirse con 425 kg de cobre si debe contener el 85% de cobre? ¿Cuántos kilogramos de estaño se necesitan?
10. En una empresa se producen, como promedio, 52,08 piezas diarias debido a una rotura. Si esta cantidad representa el 62% de las posibilidades de producción de la fábrica, ¿cuánto puede producirse diariamente de no existir dificultades?

4. El tanto por ciento y las gráficas

En las revistas y en los periódicos en muchas ocasiones aparecen gráficas que expresan tantos por cientos; por ello es conveniente que aprendas a interpretarlas. Las gráficas que más se utilizan en la práctica son las gráficas circulares y las gráficas rectangulares o de barras.

Por ejemplo, en el Censo de Población y Viviendas realizado en Cuba en 1981 se recogieron datos sobre la población comprendida entre 0 y 14 años, 15 y 64 años y más de 64. Esos datos aparecen representados gráficamente en las figuras C1 y C2.

Gráfica circular:

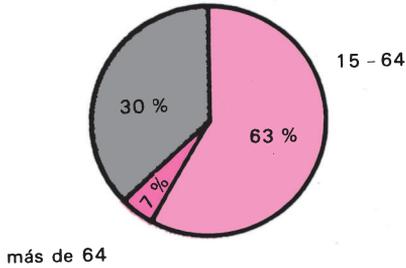


Fig. C 1

El centro del círculo es el vértice de un ángulo de 360°. Cada ángulo en el círculo representa el % correspondiente de 360°. Por ejemplo el 63% de 360° es aproximadamente 223°, los que se pueden representar con el semicírculo graduado.

Gráfica de barras:

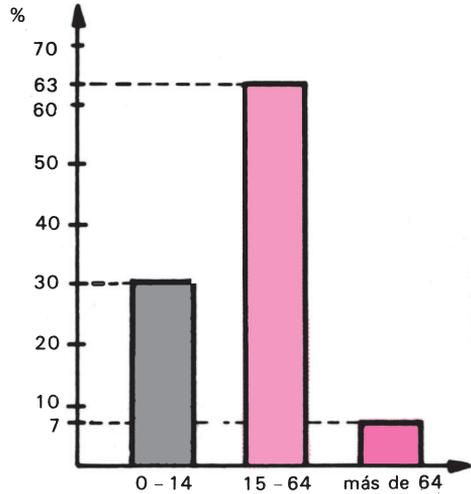


Fig. C 2

Cada milímetro de barra en esta gráfica, representa el 1%.

Observa que en cualquiera de las dos representaciones es fácil reconocer que la mayor población se encuentra entre las edades de 15 a 64 años y que la menor es la de más de 64 años.

Es importante también que te des cuenta, en este caso, de que **el total de la población representa al 100%**, por eso los tantos por ciento suman 100.

Las gráficas de barras también se usan para representar datos en tanto por ciento que no corresponden a un mismo total. Así tenemos por ejemplo que el tanto por ciento de alumnos promovidos en el nivel primario (de preescolar a sexto grado) en los cursos 70-71, 80-81 y 84-85 aparecen representados en el diagrama de barras de la figura C3.

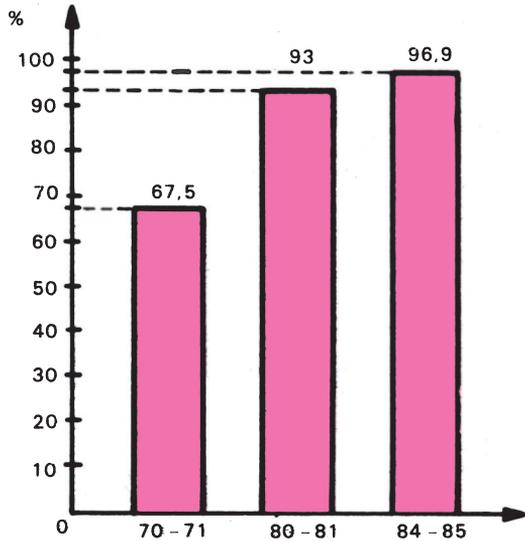


Fig. C 3

Aquí, de nuevo, cada milímetro representa al 1%.

Observa que es fácil reconocer cómo han ido mejorando los resultados de promoción en el nivel primario.

En este caso como los tantos por ciento no están referidos a un mismo valor, pues la matrícula total en cada uno de esos años es diferente, la suma de los tantos por ciento no es 100%.

Las gráficas circulares no sirven para representar situaciones como esta última, sólo sirven para representar datos referidos a una misma cantidad.

Ejercicios (epígrafe 4)

Representa en una gráfica de barras los datos que se dan en los ejercicios 1 y 2 y responde las preguntas.

- Promoción de 3 destacamentos de sexto grado en el curso 1986-1987:
- Asistencia de 4 equipos deportivos al entrenamiento durante un mes:

6. A	6. B	6. C
92 %	89 %	97,2 %

Pelota	98,1 %
Boxeo	100 %
Gimnasia	95,8 %
Natación	98 %

- ¿Cuál obtuvo mejores resultados?
- ¿Cuál es la matrícula del grupo A si en total promovieron 23 alumnos?
- ¿Qué diferencia (en %) hubo entre los resultados del A y del C?

- ¿Cuántos deportistas integran el equipo de boxeo si asistieron 21 cada vez?
- ¿Cuántos asistieron como promedio, en natación, si el equipo es de 50 deportistas?

- La gráfica de la figura C4 muestra la cosecha lograda por una cooperativa de producción agropecuaria el pasado año.

- ¿Qué tanto por ciento de la cosecha corresponde a papas?
- Si la cosecha total fue de 2 103 q de viandas, ¿cuántos quintales de plátanos se cosecharon?

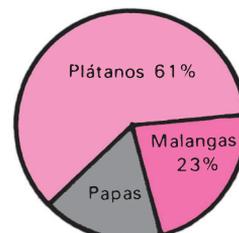


Fig. C 4

4. La gráfica de la figura C5 muestra los resultados obtenidos por un destacamento de pioneros en un control parcial.

- a) ¿Qué tanto por ciento de desaprobados hubo?
- b) Si el destacamento tiene una matrícula de 48 pioneros, ¿cuántos obtuvieron la calificación de excelente?

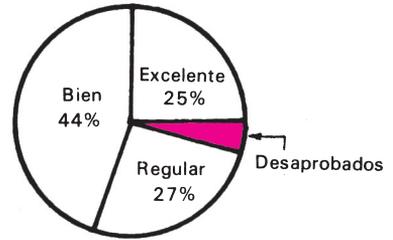


Fig. C 5

RESUMEN

Significado del tanto por ciento	
<p>Hallar el 8% de 400.</p> $ \begin{array}{r} 400 \begin{cases} \xrightarrow{100} 8 \\ \xrightarrow{100} 8 \\ \xrightarrow{100} 8 \\ \xrightarrow{100} 8 \end{cases} \\ \hline 32 \end{array} $	<p>Tanto por ciento significa tantos de cada 100, es decir, los elementos que se toman de cada conjunto de 100.</p>
Problemas fundamentales del tanto por ciento	
<p>Hallar el 15% de 4 500.</p> $ \frac{15}{100} \cdot 4\,500 = 15 \cdot 45 = 675 $ <p>o también:</p> $0,15 \cdot 4\,500 = 675$	<p>Hallar el tanto por ciento de un número.</p> <p>Se multiplica el número por el tanto por ciento (expresado como una división de divisor 100).</p>
<p>Hallar qué tanto por ciento es 28 de 80.</p> $ \frac{28}{80} = \frac{7}{20} $ $ \begin{array}{r} 70 \overline{) 20} \\ \underline{60} \\ 100 \\ \underline{100} \\ 0 \end{array} $ <p>0,35 → 35%</p>	<p>¿Qué tanto por ciento es un número de otro?</p> <p>Se divide el primero por el segundo y se expresa el cociente como tanto por ciento.</p>

¿De qué número es 25 el 20%?

$$25: \frac{20}{100} = \frac{25 \cdot 100}{20}$$
$$= 125$$

Hallar el número conocido un tanto por ciento de él.

Se divide el número conocido, entre el tanto por ciento, expresado como un cociente con divisor 100.

El tanto por ciento y las gráficas

Las gráficas que más se utilizan para expresar tantos por ciento son las gráficas circulares y las gráficas de barras.

Ejercitación variada

1. ¿Cuánto es 30% de 106?
2. ¿Qué tanto por ciento es 68 de 85?
3. ¿De qué número es 24 el 12%?
4. Halla el 17% de 80.
5. 38 es el 19% de qué número. Hállalo.
6. Halla el tanto por ciento que representa 30,6 de 51.
7. Calcula el 98% de 215.
8. Halla el número del cuál 59,4 es el 132%.
9. Halla el 2%, el 19% y el 86% de 340.
10. ¿De qué número es 25 el 5%, el 40% y el 150%?
11. Los gastos que el Estado Cubano planificó para 1988 se representan en el diagrama circular de la figura C6.

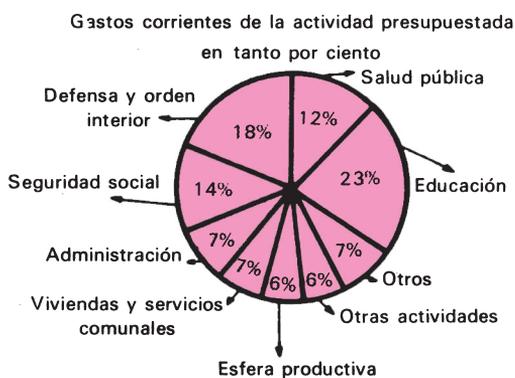


Fig. C 6

- a) ¿Cuál es el sector que ha previsto el mayor presupuesto?
- b) ¿Qué tanto por ciento se dedicará a la educación, la salud y la seguridad social juntas?

12. En 1987 se produjeron en nuestro país 55 523 televisores de los cuales 5 000 fueron televisores en colores. ¿Cuál fue el tanto por ciento de televisores en colores, con respecto al total?
13. En 1987 se previó construir 50 círculos infantiles en Ciudad de La Habana y por el esfuerzo de los microbrigadistas se terminaron 54.
 - a) ¿Qué tanto por ciento de cumplimiento se logró?
 - b) ¿Qué tanto por ciento de círculos inauguró personalmente el Comandante en jefe Fidel Castro si participó en 26 de esos actos?
14. Para saludar el XXX aniversario del Triunfo de la Revolución, los cederistas pinareños se propusieron en el año 1988, hacer 22 000 donaciones de sangre.
Si al realizar un análisis de las donaciones hechas estas ascendían ya a 21 000 donaciones, ¿qué tanto por ciento representaban las donaciones efectuadas de las planificadas?
15. Del plan asignado a la provincia de Pinar del Río para la zafra cañera de 1989, hasta el día 9 de diciembre de 1988 se encontraban sembradas 116,4 cab que representaban el 68% del plan.
¿A cuántas caballerías ascendía el plan asignado a la provincia?
16. Hasta el 30 de septiembre de 1988, en un parqueo de reparaciones agrícolas en la provincia de Camagüey de un plan de 8 876 equipos se había reparado aproximadamente el 89%. ¿Cuántos equipos se habían reparado hasta esa fecha?
17. En el año 1986 hasta el mes de septiembre, Cuba exportó mercancías por un valor de 3 933, 5 millones de pesos. Esta cantidad representó el 87% del plan de exportación del año. ¿Cuánto debió exportar Cuba en ese año? (En pesos.)
18. En 6 centrales guantanameras se han sembrado 216 cab de caña. Esta cifra representa el 29% del plan. ¿Cuántas caballerías deben sembrarse en total?
19. En el primer trabajo de control parcial del curso 88-89 en la zona de inspección No. 3 del Municipio San Cristóbal en Pinar del Río, de una matrícula de 943 alumnos, aprobaron 825. ¿Qué tanto por ciento de aprobados representó esa cifra?
- 20* Marzo de 1989, resultó el mes más lluvioso del primer trimestre de dicho año, al registrarse en el territorio nacional un total de 53 mm de agua caída, lo que representa el 118% de lo que históricamente debe precipitar en sus 31 días.
Donde más llovió en ese mes fue en Santiago de Cuba (235%) y donde menos, en el municipio especial Isla de la Juventud (43%).
 - a) ¿Cuántos milímetros de lluvia caída se registraron en Santiago de Cuba?
 - b) ¿Cuál fue el promedio de precipitaciones en Isla de la Juventud en ese mes?
 - c) ¿Cuál es el promedio histórico de precipitaciones para el mes de marzo en nuestro país?
21. Para atender la actividad de farmacias y ópticas, la provincia de Pinar del Río contaba en diciembre de 1988 con 488 trabajadores, técnicos medio,

licenciados y doctores en farmacia. Aproximadamente, el 42 % de ellos habían sido formados por la Revolución. ¿Cuántos técnicos habían sido formados por la Revolución?

22. En 1987 se plantaron 29 326 caballerías de caña que representó el 101 % de lo que debía sembrarse.
- a) ¿Cuál fue el plan inicial?
 - b) ¿En cuántas caballerías se sobrecumplió?
- 23*. En 1988 el servicio eléctrico en nuestro país llegó a 117 000 viviendas. En las provincias orientales se electrificaron 62 000 viviendas que representan un incremento del 40% aproximadamente con respecto a 1987. ¿Cuántas viviendas se electrificaron en 1987 en las provincias orientales?

EL ARTE DE PLANTEAR ECUACIONES

El idioma del trabajo con variables son las ecuaciones. Muchos son los problemas que se resuelven mediante el planteo de una ecuación. Acerca de esto, la historia ha conservado un ejercicio matemático sobre el célebre matemático de la antigüedad, Diofanto de Alejandría, que figura en una dedicatoria en su tumba, y que da informaciones interesantes acerca de su vida.

A continuación reproducimos esa inscripción en el lenguaje de la época y lo traducimos al idioma de las variables:

¡Caminante! Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto, y los números pueden mostrar ¡oh, milagro! cuán larga fue su vida	x
cuya sexta parte constituyó su hermosa infancia.	$\frac{x}{6}$
Había transcurrido, además, una duodécima parte de su vida cuando de vellos cubrióse su barbilla	$\frac{x}{12}$
y la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.	$\frac{x}{7}$
Pasó un quinquenio y lo hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito,	5
que entregó su cuerpo, su hermosa existencia a la tierra, que duró tan solo la mitad de la de su padre.	$\frac{x}{2}$
y con profunda pena descendió a la sepultura, habiendo sobrevivido cuatro años al deceso de su hijo.	4

¿Cuántos años había vivido Diofanto cuando le llegó la muerte?
El problema te conduce al planteo de la ecuación:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$$

Cuando hayas desarrollado habilidades en la solución de ecuaciones podrás saber que Diofanto vivió 84 años, que se casó a los 21, fue padre a los 38, perdió a su hijo a los 80 y murió a los 84.

¡Si no puedes resolverlo solo, pide ayuda a tu maestro!

1. Concepto ecuación

Al efectuar ejercicios de cálculo conociste expresiones como las siguientes:

$$14 + x = 22; \quad 3 \cdot 7 = 21; \quad \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

En cada caso la operación indicada está relacionada con el resultado mediante el signo **igual a (=)** por eso la conoces con el nombre de **igualdad**.

Las igualdades $3 \cdot 7 = 21$ y $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$ son **igualdades sin variables**.

En la igualdad $14 + x = 22$ aparece una variable, o sea, es una **igualdad con variable**.

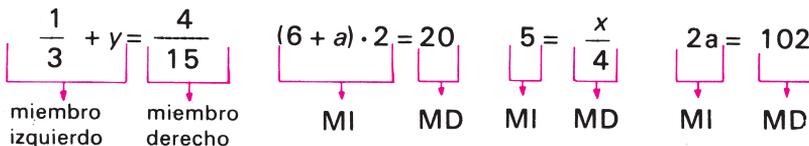
Definición 1

Una igualdad en la que aparece al menos una variable se denomina **ecuación**.

Son ejemplos de ecuaciones también, por ejemplo $\frac{1}{3} + y = \frac{4}{15}$; $5 = \frac{x}{4}$; $(6 + a) \cdot 2 = 20$; $2a = 102$.

Las desigualdades con variables se denominan **inecuaciones** y para ellas se cumple lo mismo que se estudiará en este epígrafe para las ecuaciones.

Si tomamos una ecuación y separamos las expresiones que se relacionan mediante el signo =, quedaría una expresión a la izquierda y otra a la derecha. A estas partes podemos llamarlas **miembros** de una ecuación.



En cada miembro de la ecuación puede haber uno o varios **términos**.

Son ejemplos de términos: 3; a; 375 ; $\frac{7}{8}$; 2,7; $\frac{x}{10}$; 28x

$$\frac{1}{3} + y = \frac{4}{15}$$

↑ término
↑ término
↑ término

$$5 = \frac{x}{4}$$

↑ término
↘ término

Las igualdades en las que no aparece ninguna variable son proposiciones, pues son afirmaciones en las que se puede decidir si son verdaderas o falsas.

Ejemplo 1

Analiza si las igualdades siguientes son proposiciones verdaderas o falsas. Justifica en caso necesario.

a) $15 + 7 = 22$

b) $\frac{5}{6} \cdot 8 = \frac{20}{3}$

c) $5 \cdot 2 = 17$

d) $0,5 = \frac{1}{4}$

a) $15 + 7 = 22$

verdadera.

b) $\frac{5}{6} \cdot 8 = \frac{20}{3}$

verdadera $\left(\frac{5}{\cancel{6}} \cdot \frac{8}{\cancel{3}} = \frac{20}{3} \right)$.

c) $5 \cdot 2 = 17$

falsa, porque $5 \cdot 2 = 10$ y $10 \neq 17$.

d) $0,5 = \frac{1}{4}$

falsa, porque $0,5 = \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{4}$.

Las ecuaciones no son proposiciones porque en ellas hay al menos un **valor desconocido**, o sea, **una variable** y no se puede decidir si son verdaderas o falsas; sin embargo si escribimos números en lugar de las variables, entonces obtenemos proposiciones, pues se puede decidir si son verdaderas o falsas.

Ejemplo 2

Sustituye las variables en las ecuaciones siguientes por los números 0; $\frac{1}{2}$; 1,5; 7. Analiza si las proposiciones que se obtienen son verdaderas o falsas.

a) $4 + x = 5,5$

b) $3x = 21$

a) $4 + x = 5,5$
 $4 + 0 = 5,5$ falsa

$4 + \frac{1}{2} = 5,5$ falsa

$4 + 1,5 = 5,5$ verdadera

$4 + 7 = 5,5$ falsa

b) $3x = 21$
 $3 \cdot 0 = 21$ falsa

$3 \cdot \frac{1}{2} = 21$ falsa

$3 \cdot 1,5 = 21$ falsa

$3 \cdot 7 = 21$ verdadera

Si al sustituir las variables por números en la ecuación se obtiene una **proposición verdadera**, decimos que estos números **satisfacen** la ecuación, así **1,5** **satisface la ecuación** $4 + x = 5,5$ y el número **7** **satisface la ecuación** $3x = 21$.

Definición 2

Los números que satisfacen una ecuación, o sea, que la convierten en una proposición verdadera, se llaman **soluciones** de la ecuación.

Ejemplo 3

¿Qué números fraccionarios satisfacen las ecuaciones siguientes?

a) $2x = 7$ b) $\frac{1}{2}x = 5$ c) $2x + 1 = 5$ d) $9x = 6$

a) $2x = 7$

$x = \frac{7}{2}$

b) $\frac{1}{2}x = 5$

$x = 5 \cdot \frac{2}{1}$

$x = 10$

c) $2x + 1 = 5$
 $2x = 5 - 1$
 $2x = 4$

$x = \frac{4}{2}$
 $x = 2$

$x = 2$

d) $9x = 6$

$x = \frac{6}{9}$

$x = \frac{2}{3}$

Los resultados obtenidos $\left(\frac{7}{2}; 10; 2; \frac{2}{3}\right)$ son números fraccionarios, por eso podemos escribir, por ejemplo: $\frac{7}{2} \in \mathbb{Q}_+; 10 \in \mathbb{Q}_+; 2 \in \mathbb{Q}_+; \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}_+$. Esos números son soluciones respectivas de las ecuaciones dadas.

Existen ecuaciones que no se satisfacen para ningún número, otras que se satisfacen solamente para un número y otras para varios números.

Ejemplo 4

¿Qué números son soluciones de las ecuaciones siguientes?

a) $0 \cdot x = 5$ b) $5x = 0$ c) $0,5x = 4$ d) $\frac{1}{2}x = 0,5x$

a) $0 \cdot x = 5$ No existe ningún número tal que $0 \cdot x = 5$. Luego esta ecuación **no tiene solución**.

b) $5x = 0$ Esta ecuación solo se satisface para $x = 0$ pues sólo $5 \cdot 0 = 0$. Luego **tiene una única solución**.

c) $0,5x = 4$
 $x = 4 : 0,5$
 $x = 8$ Esta ecuación tiene una única solución que es 8.

d) $\frac{1}{2}x = 0,5x$ Puedes comprobar que si sustituyes la variable por un número fraccionario cualquiera, se convierte en una proposición verdadera. Luego **tiene infinitas soluciones**.

Por ejemplo:

para $x = 0$

$$\frac{1}{2} \cdot 0 = 0,5 \cdot 0$$

$$0 = 0$$

para $x = 5$

$$\frac{1}{2} \cdot 5 = 0,5 \cdot 5$$

$$\frac{5}{2} = 2,5$$

$$2,5 = 2,5$$

Para hallar los números que satisfacen una ecuación es necesario, por lo general, **resolver la ecuación**, es decir, encontrar sus soluciones.

El conjunto de todas las soluciones de una ecuación se denomina **conjunto solución**. En el ejemplo anterior, el conjunto solución de la ecuación $0,5x = 4$ se escribe:

$S = \{8\}$, se lee: El conjunto solución es ocho.

Si quieres determinar las soluciones de una ecuación tienes que saber **de qué dominio** podemos tomar números para sustituir por las variables, o sea, tenemos que precisar el **dominio de la variable**.

En este grado, el dominio de la variable puede ser **el conjunto de los números naturales (\mathbb{N}) o el conjunto de los números fraccionarios (\mathbb{Q}_+)** que ya conoces. Recuerda que \mathbb{N} es un subconjunto de \mathbb{Q}_+ ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}_+$).

Ejemplo 5

¿Qué números naturales son solución de las ecuaciones siguientes?

a) $1,5x = 3$

b) $3x = 4$

a) $1,5x = 3$
 $x = 2$

$$\frac{1,5 \cdot 2}{3,0}$$

b) $3x = 4$

No existe ningún número natural que multiplicado por 3 dé como resultado 4. La ecuación no tiene solución en el dominio de los números naturales; sin embargo en el dominio de los números fraccionarios sí tiene una solución

$$x = \frac{4}{3}$$

$$3x = 4$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$\cancel{3} \cdot \frac{4}{\cancel{3}} = 4$$

Como ves en el ejemplo 5 el número de soluciones de una ecuación puede ser diferente si se consideran **dominios distintos**.

Ejemplo 6

Escribe el conjunto solución de las ecuaciones siguientes. Ten en cuenta el dominio de la variable indicado en cada caso.

a) $5 \cdot x = 19$ ($x \in \mathbb{Q}_+$)

b) $5 \cdot x = 19$ ($x \in \mathbb{N}$)

a) $5 \cdot x = 19$

$$x = \frac{19}{5} \quad S = \left\{ \frac{19}{5} \right\}$$

b) $5 \cdot x = 19$

$$x = \frac{19}{5}$$

$$\frac{19}{5} \notin \mathbb{N}$$

El conjunto solución en este caso no tiene elementos. Se escribe: $S = \emptyset$. A este conjunto del inciso b que no tiene elemento alguno se denomina **conjunto nulo o vacío** y se denota por \emptyset .

Cuando en este libro no se precise el dominio de la variable es que se está considerando el **conjunto de los números fraccionarios**.

Ejercicios (epígrafe 1)

1. Dados los números $a = \frac{2}{5}$; $b = 6$; $c = 3$; $d = 1,5$; calcula:

a) $b + a \cdot c$ b) $a \cdot d$ c) $\frac{d}{a}$

2. Completa las tablas siguientes:

a)

a	b	$a+b$	$a \cdot b$
$\frac{5}{6}$		$\frac{9}{6}$	
0,25			0,325
	$\frac{2}{4}$	$\frac{17}{6}$	
$3 \frac{3}{4}$			1,125
	$\frac{7}{3}$		$\frac{21}{10}$
$\frac{6}{7}$			$\frac{10}{7}$
8,87		22,32	

b)

x	y	$x+y$	$x:y$
15,4		7,7	
$\frac{2}{9}$			10
	0,05		12
	$8 \frac{2}{3}$	1	
	2631	5 262	
	50 100	885	
13,2			33

3. Analiza si las igualdades siguientes son proposiciones verdaderas o falsas. Justifica en caso necesario.

a) $15 + 4 = 29$

c) $\frac{5}{2} + \frac{2}{3} = \frac{38}{12}$

e) $2 \frac{7}{5} - 1 \frac{3}{8} = \frac{36}{7} - \frac{16}{5}$

g) $2 \frac{3}{4} - 1 \frac{1}{3} = \frac{5}{6} + \frac{7}{12}$

b) $\frac{3}{2} + \frac{4}{3} = \frac{17}{6}$

d) $14 + 23 = 47$

f) $2,38 + 0,4 = 1,71 + 1,07$

h) $1,83 + 0,5 = 1,14 + 1,07$

4. Sustituye la variable en cada caso por los números $2; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 4; 7; \frac{4}{6}; 1,2; 0,4$. Analiza si las proposiciones que se obtienen son verdaderas o falsas.

a) $3x = 12$

b) $5,1 + x = 6,3$

c) $4,9 + x = 6,1$

d) $\frac{3}{2}x = 0,6$

e) $4x = 8$

f) $\frac{1}{4}x = 1$

g) $\frac{1}{2}x = 2$

h) $\frac{3}{4}x = 0,3$

i) $\frac{2}{3}x < \frac{3}{5}$

j) $a - \frac{4}{9} > 3$

k) $3\frac{1}{4} + x < 6$

l) $3b - b > 8$

2. Procedimiento para la solución de ecuaciones

A veces cuando resuelves ecuaciones analizas el contenido y por simple inspección puedes determinar la solución; también para solucionar algunas ecuaciones, aprendiste en quinto grado, que un término de una ecuación pasa de un miembro a otro realizando la operación inversa.

Ejemplo 1

Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $4x - 2 = 10$ b) $72 - x = 8$ c) $25 : x = 5$ d) $3x - 4 = 8 + x$

a) $4x - 2 = 10$

$4x = 10 + 2$ Como el 2 está restando pasa sumando.

$4x = 12$

$x = 12 : 4$ Como el 4 está multiplicando pasa dividiendo.

$x = 3$

b) $72 - x = 8$

Cuando la variable está restando (o dividiendo) es conveniente primero pasarla a otro miembro realizando la operación contraria.

$72 = 8 + x$

$72 - 8 = x$

$64 = x$

$x = 64$

c) $25 : x = 5$

$25 = 5 \cdot x$

$x = 25 : 5$

$x = 5$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } 3x - 4 &= 8 + x \\
 3x - x &= 8 + 4 \\
 2x &= 12 \\
 x &= \frac{12}{2} \\
 x &= 6
 \end{aligned}$$

Se unen en un solo miembro los términos con variables y en otro los números.

Se calcula en cada miembro. Los términos con variables se calculan como si fueran números.

En la práctica:

- Agrupas en un miembro los términos con variables y en el otro miembro los términos que no tienen variables.
- Al pasar un término de un miembro a otro se pasa realizando la **operación inversa**.
- Se despeja la variable, o sea, se deja sola y se resuelven las operaciones indicadas.

Antes de plantear el conjunto solución es conveniente **comprobar** si el valor encontrado **satisface** la ecuación.

Ejemplo 2

Resuelve y comprueba. Escribe el conjunto solución.

a) $4x - 2 = 10$ b) $2x + 8 = 23 - x$ c) $3x - x = 16$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } 4x - 2 &= 10 \\
 4x &= 10 + 2 \\
 4x &= 12 \\
 x &= 12 : 4 \\
 x &= 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{Comprobación:} \\
 &\text{MI } 4 \cdot 3 = 12 - 2 = 10 \\
 &\text{MD } = 10 \\
 &\text{Comparación} \\
 &10 = 10 \qquad \qquad \qquad S = \{3\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } 2x + 8 &= 23 - x \\
 2x + x &= 23 - 8 \\
 3x &= 15 \\
 x &= \frac{15}{3} \\
 x &= 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{Comprobación:} \\
 &\text{MI } 2 \cdot 5 + 8 = 10 + 8 = 18 \\
 &\text{MD } 23 - 5 = 18 \\
 &\text{Comparación} \\
 &18 = 18 \qquad \qquad \qquad S = \{3\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } 3x - x &= 16 \\
 2x &= 16 \\
 x &= \frac{16}{2} \\
 x &= 8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{Comprobación:} \\
 &\text{MI } 3 \cdot 8 - 8 = 24 - 8 = 16 \\
 &\text{MD } = 16 \\
 &\text{Comparación} \\
 &16 = 16 \qquad \qquad \qquad S = \{8\}
 \end{aligned}$$

En la comprobación:

Sustituyes el valor de x en la ecuación comenzando por el miembro izquierdo.

Calculas el miembro izquierdo.

Calculas el miembro derecho.

Compara los resultados (si se forma una proposición verdadera entonces el resultado obtenido es solución de la ecuación).

Se escribe el conjunto solución.

En la práctica, para resolver y comprobar ecuaciones puedes proceder de una manera más simple a la ilustrada en los ejemplos 1 y 2, pues hay muchas operaciones que puedes realizar mentalmente. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}4x - 2 &= 10 \\4x &= 12 \\x &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Comprobación:} \\4 \cdot 3 - 2 &= 12 - 2 = 10\end{aligned}$$

Ejercicios (epígrafe 2)

1. Resuelve y comprueba:

a) $x - 15 = 4$

b) $x - 7 = 8$

c) $75 - c = 19$

d) $a + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$

e) $c + \frac{3}{8} = \frac{13}{20}$

f) $\frac{12}{25} - x = \frac{1}{2}$

g) $x - \frac{5}{2} = \frac{11}{4}$

h) $x - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

i) $\frac{14}{57} - x = \frac{1}{4}$

j) $x - \frac{7}{3} = \frac{3}{5}$

k) $2\frac{3}{5} + x = 7\frac{4}{15}$

l) $x - \frac{3}{4} = 0,01$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $4x = 12$

b) $7a = \frac{49}{2}$

c) $0,25z = 24$

d) $2,7x = 21,6$

e) $0,5w = 48$

f) $0,3x = 9$

g) $\frac{x}{4} = 7$

h) $\frac{x}{2} = 38$

i) $\frac{x}{6,3} = 0,05$

j) $x: \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} \right) = \frac{2}{3}$

k) $7a + 5 = 54$

l) $4b - 11 = 5$

m) $3x + 8 = 23$

n) $\frac{2}{3}a - 16 = 2$

ñ) $0,05x - 3,5 = 8$

o) $5x + 11 = 156$

p) $4\frac{1}{2}c - 38 = 6\frac{1}{4}$

q) $74 = 104 - 5x$

r) $2x = 9 - x$

s) $7x = 4x + 6$

t) $0,2x - 1,2 = 1,3$

u) $0,3x + 1,42 = 2,42$

3. ¿Qué números fraccionarios satisfacen las ecuaciones siguientes?

- a) $3x = 7$ b) $2x = 9$ c) $\frac{3}{5}x = \frac{2}{3}$ d) $\frac{2}{3}x = \frac{3}{5}$
 e) $x - \frac{3}{5} = \frac{7}{3}$ f) $\frac{6}{7}b = 18$ g) $5x = 3,6$ h) $\frac{3}{5}x = 3$
 i) $0,6x = 7,2$ j) $5x - 2x = 48$ k) $4x + 2x + x = 49$

4. Escribe el conjunto solución de las ecuaciones siguientes. Ten en cuenta el dominio de la variable indicado en cada caso.

- a) $9b = \frac{63}{2}$ ($b \in \mathbb{Q}_+$) b) $\frac{4}{x} = 2$ ($x \in \mathbb{Q}_+$)
 c) $\frac{6}{x} = 3$ ($x \in \mathbb{N}$) d) $\frac{0,4}{x} = 1,2$ ($x \in \mathbb{Q}_+$)
 e) $\frac{0,5}{x} = 1,5$ ($x \in \mathbb{N}$) f) $\frac{4}{3} : x = \frac{3}{2}$ ($x \in \mathbb{Q}_+$)
 g) $0,26x - 1,3 = 1,04$ ($x \in \mathbb{N}$) h) $z + 6\frac{2}{3} = 7$ ($z \in \mathbb{Q}_+$)
 i) $(3,5 + 2,8) \cdot 4x = 12,6$ ($x \in \mathbb{Q}_+$) j) $5x - x = \frac{12}{5}$ ($x \in \mathbb{Q}_+$)
 k) $4b + 2b = 8,7$ ($x \in \mathbb{Q}_+$) l) $3y + 0,5y = 10,5$ ($y \in \mathbb{Q}_+$)
 m) $\frac{2}{3} : x = \frac{3}{4}$ ($x \in \mathbb{N}$) n) $0,72 = 0,28 : x$ ($x \in \mathbb{Q}_+$)
 ñ) $0,54 = 0,21 : x$ ($x \in \mathbb{Q}_+$) o) $\frac{x}{0,25} = 8$ ($x \in \mathbb{N}$)
 p) $\frac{x}{35} = \frac{3}{21}$ ($x \in \mathbb{Q}_+$) q) $\frac{3}{x} = \frac{5,2}{2,6}$ ($x \in \mathbb{Q}_+$)
 r) $\frac{3}{x} = \frac{1}{2}$ ($x \in \mathbb{N}$)

5. Resuelve las siguientes inecuaciones. Proceda igual que en las ecuaciones y como se ilustra en el inciso a.

- a) $2x - 8 < 5$ b) $0,9x < 2$ c) $x + \frac{5}{2} < 3$
 $2x < 13$ d) $11 + 2a < 21$ e) $5x + 3 < 19$
 $x < \frac{13}{2}$ f) $13 + 2b < 23$ g) $5x - 2x < 4$
 h) $3x + 2 > 5$ i) $3x + \frac{1}{2} < \frac{1}{4}$
 j) $0,4x > 1,36$

3. Solución de problemas mediante ecuaciones

En ocasiones es necesario escribir textos y problemas en forma de ecuaciones.

Ejemplo 1

Escribe la ecuación que corresponde a los ejercicios con texto siguientes:

- El triplo de un número aumentado en 8 es 23. ¿Cuál es el número?
- La mitad de la edad de Jorge disminuida en 3 años es 6 años. ¿Qué edad tiene Jorge?
- El cuádruplo del área de un terreno aumentada en su duplo es 96 m^2 . Calcula el área del terreno.

Cada una de las palabras que se han subrayado tienen un significado matemático que puede ser expresado mediante signos y números.

- Sea a el número desconocido: $3a + 8 = 23$
- Sea x la edad de Jorge: $\frac{x}{2} - 3 = 6$ ó $\frac{1}{2}x - 3 = 6$
- Sea y el área del terreno: $4y + 2y = 96$

Observa que en cada caso **se debe decir qué significa la variable.**

Las soluciones de las ecuaciones que se obtienen se hallan como ya conoces.

Las ecuaciones también pueden ser expresadas como ejercicios con texto y problemas sencillos, o sea, en el **lenguaje común.**

Ejemplo 2

Expresa las ecuaciones siguientes en el lenguaje común.

- $2x = 16$
- $3x + 6 = 24$
- $\frac{x}{6} = 6$

Puede ser por ejemplo:

- El duplo de la longitud de un segmento es 16 cm.
- El triplo del peso de un producto aumentado en 6 kg es 24 kg.
- La sexta parte de los alumnos de un aula es 6:

Los textos pueden ser formulados también como adivinanzas utilizando palabras que tengan sentido matemático. Algunas de estas palabras y su designación matemática se relacionan en la tabla siguiente:

Texto	Se designa
Un número desconocido	$x; a; b;$ cualquier variable
Un número aumentado en 6	$x + 6$
Un número disminuido en 8	$x - 8$
El duplo de un número	$2 \cdot x$ o $2x$
El triplo de un número	$3z$
El cuádruplo de un número	$4x$
El décuplo de un número	$10 \cdot y$ o $10y$
La quinta parte de a	$\frac{1}{5} a; \frac{a}{5}$ o $a:5$
La mitad de n	$\frac{1}{2} n; \frac{n}{2}$ o $n:2$
La tercera parte de z	$\frac{1}{3} z; \frac{z}{3}$ o $z:3$
El cuadrado de un número	x^2

Ejemplo 3

Isabel y su hermana Elena tienen juntas 96 sellos. Isabel tiene cinco veces el número de sellos que tiene Elena. ¿Cuántos sellos tiene cada una?

Sea x el número de sellos que tiene Elena, entonces Isabel tiene $5x$. Podemos formar la ecuación siguiente:

$$5x + x = 96$$

$$6x = 96$$

$$x = \frac{96}{6}$$

$$x = 16$$

$$5x = 5 \cdot 16$$

$$5x = 80$$

Para la **comprobación del problema** pueden ver que los números obtenidos **satisfacen los requisitos del problema**: Isabel tiene cinco veces el número de sellos que Elena: $5 \cdot 16 = 80$ las dos tienen 96 en total: $80 + 16 = 96$.

Respuesta: Isabel tiene 80 sellos y Elena tiene 16.

Observa que se obtiene la misma respuesta si analizas el problema en la forma que sigue:

Sea x la cantidad de sellos que tiene Isabel, entonces Elena tiene la quinta parte de los sellos que tiene Isabel, o sea, $\frac{x}{5}$ ó $\frac{1}{5}x$

Formamos entonces la ecuación $x + \frac{1}{5}x = 96$ y la resolvemos. Ten en cuenta que $x + \frac{1}{5}x = \frac{6}{5}x$; luego hay que resolver la ecuación $\frac{6}{5}x = 96$ por lo que se obtiene $x = 80$. Entonces Isabel tiene 80 sellos y Elena tiene $\frac{80}{5}$, es decir, 16 sellos.

Para resolver problemas como estos puedes actuar de la forma siguiente:

- Analizas el texto.
- Escribes qué va a representar la variable.
- Planteas la ecuación correspondiente.
- Solucionas la ecuación.
- Compruebas si la solución satisface los requisitos del problema (puede ser mentalmente).
- Planteas la respuesta atendiendo a la pregunta formulada.

Ejercicios (epígrafe 3)

1. Designa mediante variables.
 - a) Un número.
 - b) El antecesor de n .
 - c) El sucesor de n .
 - d) La mitad de los alumnos de un aula.
 - e) La suma de las longitudes de los lados de un cuadrado.
 - f) La quinta parte de una cantidad de dinero.
 - g) La suma de las longitudes de los lados de un triángulo equilátero.
 - h) El décuplo de una cantidad de hojas.
 - i) El precio de un artículo disminuido en \$12.
 - j) Una cantidad de piezas aumentada en 60.
 - k) El cuadrado de a .
 - l) Un número par.
 - m) Un número impar.
 - n) La tercera parte del dinero recaudado.
 - ñ) Un cuarto de los cultivos cosechados.
 - o) La diferencia de la producción obtenida en un mes con respecto a otro.

2. Expresa en el lenguaje común.

a) $x - 1$

b) $2n$

c) m^2

d) $\frac{x}{2}$

e) $(a + b) \cdot 2$

f) $3x - 11$

g) $\frac{1}{3} a$

h) $\frac{3z}{2}$

i) $\frac{x}{10} + 5$

j) $n + 1$

k) $\frac{m}{6}$

l) $a \cdot b \cdot c$

m) $24 - x$

n) $x : 2$

ñ) $x + 2x$

3. Busca el número que:

a) Multiplicado por 112 es 24 080.

b) Multiplicado por 85 es 9 605.

c) Dividido por 87 es 513.

d) Dividido entre $\frac{2}{5}$ es $\frac{9}{20}$.

e) Sumado con 0,587 es 7,34.

f) Aumentado en 586 es 17 345.

g) Disminuido en 649 es 85.

4. Duplico un número. Primero le adiciono 13 a este producto y después 25. Si la suma es 52, ¿cuál es el número?

5. El producto de un número y 465 es 17 205. ¿Cuál es el número?

6. El triple de un número se disminuye primero en 24 y después en 47. Si la diferencia es 46, ¿cuál es el número?

7. Calcula las longitudes de los lados de un triángulo equilátero cuyo perímetro es de 633 m. ¿Cuánto mide cada lado?

8. Un terreno rectangular tiene 5 m más de largo que de ancho, si su perímetro es de 634 m, ¿cuánto mide cada lado?

9. Todas las balanzas de la figura D1 están en equilibrio. Halla el peso desconocido en kilogramos.

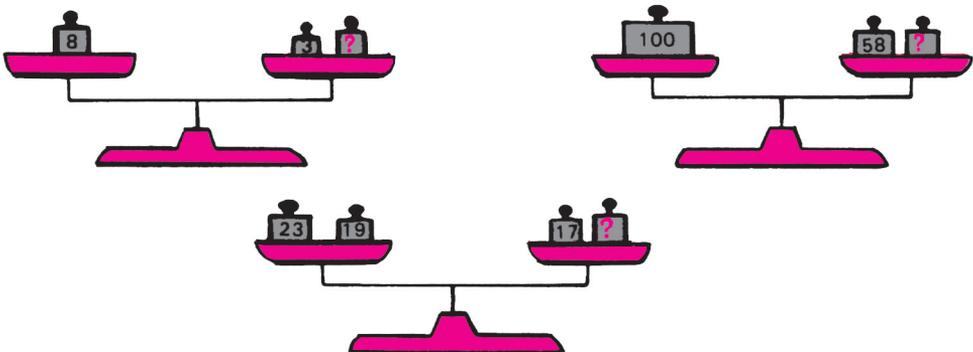


Fig. D 1

10. Halla el peso de una lata de las figuras a y b. Ten en cuenta que las balanzas están equilibradas (fig. D 2).

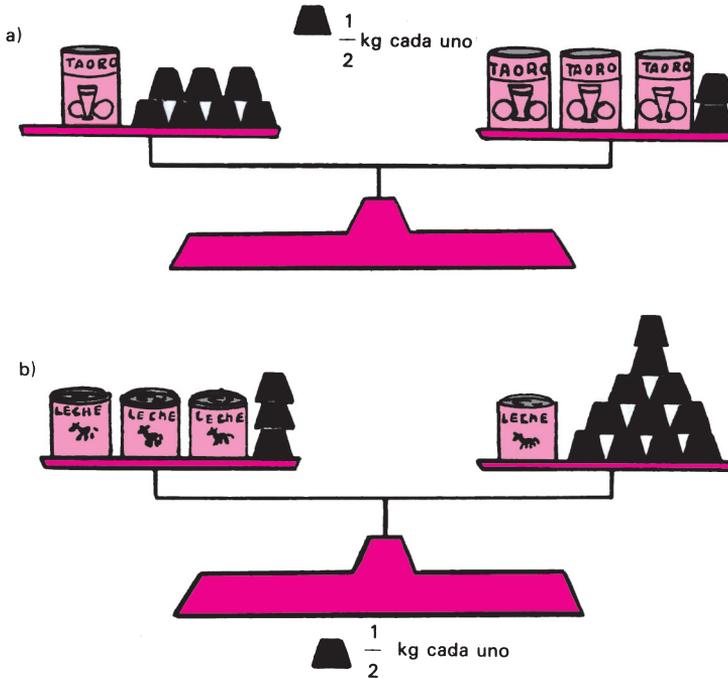


Fig. D 2

RESUMEN

Ecuaciones	
<p>Ejemplos de ecuaciones:</p> $\frac{2}{5} + x = 0,9$ $3x - 18 = 6$ $5a + a = 72$	<p>Las igualdades que tienen al menos una variable se denominan ecuaciones.</p>
<p>término término</p> <p>término término</p> $4x + 0,5 = x + 17$ <p>miembro izquierdo miembro derecho</p>	<p>En una ecuación hay dos miembros. En cada miembro hay uno o más términos.</p>

RESUMEN

<p>Ejemplo de inecuación:</p> $3x - 7 < 20$ <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 5px;"> <div style="text-align: center;"> $\underbrace{3x - 7}$ miembro izquierdo </div> <div style="text-align: center;"> $\underbrace{20}$ miembro derecho </div> </div>	<p>Una desigualdad con al menos una variable se denomina inecuación.</p>
Procedimiento para solucionar ecuaciones	
$2x + 18 = 36$ $2x = 36 - 18$ $2x = 18$ $x = \frac{18}{2}$ $x = 9$	<p>Agrupas en un miembro los términos con variables y en el otro los números. Al pasar un término de un miembro a otro se pasa realizando la operación inversa.</p> <p>Se despeja la variable, o sea, se deja sola y se resuelven las operaciones indicadas.</p>
<p style="text-align: center;">$S = \{9\}$</p> <p>El conjunto solución es 9. 9 \in \mathbb{N}</p>	<p>El número que al sustituirlo por la variable convierte la ecuación en una proposición verdadera es solución de la ecuación.</p> <p>Para solucionar una ecuación debes tener en cuenta el dominio de la variable.</p>
Las ecuaciones son muy útiles para resolver problemas	

Ejercitación variada

1. Resuelve:

a) $x - 1,3 = 2,7$

b) $2,7 + a = 18$

c) $1,5 - z = 1,2$

d) $4,2 = 1,2 - x$

e) $4,6 = c - 9,9$

f) $\frac{27}{2} + b = 42$

g) $4x - 3 = 9$

h) $7x + 6 = 20$

i) $3x + 0,6 = 2,4$

j) $6a + 1,2 = 2,4$

k) $\frac{1}{2}y + \frac{3}{4} = \frac{1}{5}$

l) $\frac{3,4}{x} - 6 = 0,8$

m) $5a + 7 = 22$

n) $4z - 2,1 = 5,1$

ñ) $15,2 = 6,8 + 3b$

o) $3,2y + 6,6 = 9,4$

p) $\frac{3}{8}b - \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$

q) $\frac{3}{7} = \frac{1}{2}a$

r) $6x - 2,9 = 4,9$

s) $\frac{0,12}{x} = 0,3$

t) $\frac{2}{3}u + \frac{4}{15} = \frac{3}{5}$

u) $25,8 - e = 6,49$ v) $2,92 = 3,2y + 2,2$ w) $12x - 15 = 15x + 9$
 x) $20 - 3y = 7y$ y) $\frac{3,9}{m} = 1,3$ z) $(x - 3) \cdot 2 = 4$

- Alberto y su hermano Jorge tienen ahorrado \$351. Alberto ha reunido $\frac{1}{2}$ de la cantidad de dinero ahorrado por Jorge. ¿Cuánto dinero ha podido ahorrar cada uno?
- Vania compró un par de zapatos y un búcaro, por ambas cosas pagó un total de \$27,20. Si por los zapatos pagó el triplo que por el búcaro, ¿cuánto costaron los zapatos y cuánto el búcaro?
- La suma de las distancias recorridas por dos autos es de 324 km. Uno de ellos después de haber recorrido una determinada distancia no pudo continuar por desperfectos técnicos y el otro pudo recorrer el duplo de la distancia alcanzada por el primero. ¿Cuántos kilómetros recorrió cada uno?
- Un camión de acopio transporta lechugas y coles, en total 102 cajas. Hay 12 cajas más de lechuga que de col. ¿Cuántas cajas de lechuga y cuántas de col lleva el camión?
- Felipe y Beatriz realizaron entre los dos un total de 219 h de trabajo voluntario. Beatriz realizó la mitad de la cantidad de horas acumuladas por Felipe. ¿Cuántas horas acumuló cada uno?
- Calcula los ángulos que se indican en la figura D3 a y b. Ten en cuenta que $\sphericalangle AOC$ es llano:

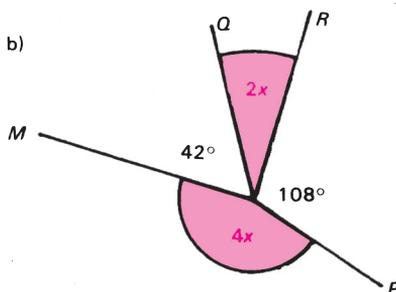
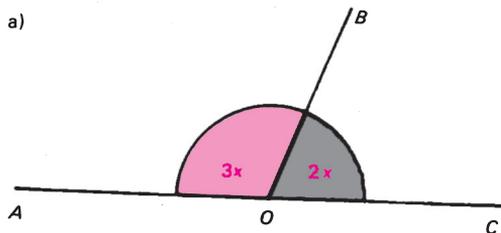


Fig. D 3

- Si dos ángulos α y β son adyacentes y α es el triplo de β , calcula los valores de α y β .
- Sean $\sphericalangle 1$ y $\sphericalangle 2$ dos ángulos adyacentes tales que $\sphericalangle 1 = 3x + 8^\circ$ y $\sphericalangle 2 = 2x - 13^\circ$. Calcula el valor de x y las amplitudes de $\sphericalangle 1$ y $\sphericalangle 2$.
- Los ángulos ABC y PBR son opuestos por el vértice tales que tienen un ángulo adyacente común que es el duplo de ellos. Calcula la amplitud de los ángulos dados.
- Dos ángulos opuestos por el vértice α y β cumplen la condición que: $\alpha = 5x - 8^\circ$ y $\beta = 2x + 22^\circ$. Calcula el valor de x y las amplitudes de α y β .

LAS PROPORCIONES

La teoría de las proporciones fue desarrollada por el gran matemático griego Eudoxio, que nació en la ciudad de Cnido en el Asia Menor en el año 408 a.n.e.

Su obra original sobre la teoría de las proporciones no llegó hasta los tiempos actuales, pero gracias a uno de sus más ilustres sucesores, Euclides de Alejandría, ya conocido por ti, se pudo conocer dicha teoría, pues la recogió en su libro V de los *Elementos*.

En el mencionado libro, Euclides explica que Eudoxio realiza una excelente aclaración de la idea de la razón, excluye al cero y establece que las razones solamente tienen sentido cuando se refieren a magnitudes del mismo tipo, es decir, ambas son longitudes, áreas, etc. En el libro de Euclides aparece la definición de Proporción, formulada por Eudoxio:

Se dice que magnitudes están en igual razón la primera a la segunda y la tercera a la cuarta, cuando tomados equimúltiplos cualesquiera de la segunda y la cuarta, entonces los primeros equimúltiplos exceden, son iguales, o son menores que los segundos, tomados en el orden correspondiente.

En este capítulo aprenderás una definición de proporción expresada de una forma más simple que como la formuló Eudoxio y verás que útil te será este conocimiento para resolver distintos ejercicios y problemas interesantes.

1. Razones y proporciones

Si quieres comparar dos números, un modo de hacerlo es hallando la diferencia entre ellos. También puedes calcular cuántas veces uno contiene al otro, **hallando el cociente**.

En el ejemplo siguiente se ha utilizado la división como vía para la comparación de números.

Observa la figura E 1:

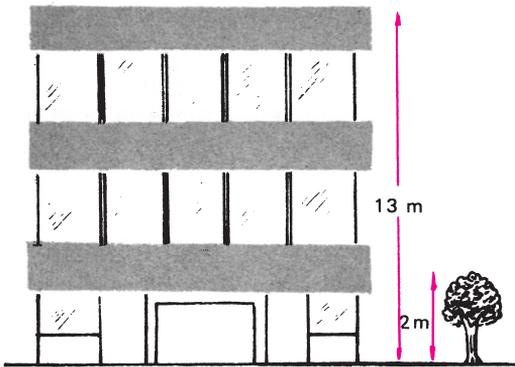


Fig. E 1

La relación entre la altura del edificio y el árbol podemos expresarla mediante el cociente de sus longitudes.

Calculamos: $\frac{13}{2} = 6,5$

La altura del edificio es 6,5 veces la del árbol.

La división indicada $\frac{13}{2}$ o 13:2 recibe el nombre de razón.

Se lee: **13 es a 2**

En general, la razón de dos números *a* y *b* es la fracción $\frac{a}{b}$ y se lee *a es a b*. Esta razón también puede escribirse *a:b*.

Como ves la **razón** de dos cantidades no es más que una **división indicada** o **fracción** por eso las propiedades de las razones son las mismas propiedades de la división o de las fracciones.

Ejemplo 1

La figura E2 muestra un conjunto de círculos, de ellos 15 son blancos y 3 negros. Halla la razón entre:

- El número de círculos blancos y el de círculos negros.
- El número de círculos negros y el de círculos blancos.

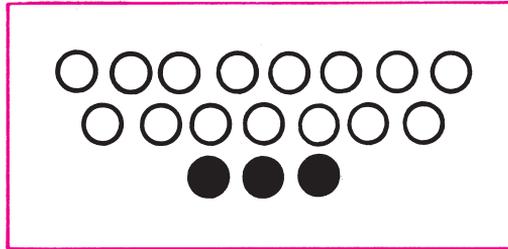


Fig. E 2

- a) Hallemos la razón entre el número de círculos blancos y el de círculos negros, ya sabes que una razón no es más que una división indicada; luego lo que tenemos que hacer es formar el cociente entre las cantidades dadas. Para ello **tomamos al 15 como dividendo y al 3 como divisor**. Podemos plantear, entonces, que estas cantidades están en la razón $\frac{15}{3}$ (o también **15:3**).

Observa lo que sucede si distribuimos por igual los círculos blancos entre los negros (fig. E3):

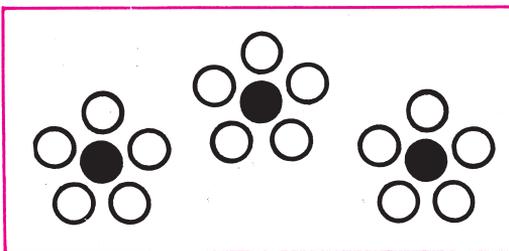


Fig. E 3

Hay 5 círculos blancos por cada 1 negro.

Esta relación podemos expresarla mediante el cociente $\frac{5}{1}$

Como recordarás $\frac{5}{1}$ es una forma más simple de expresar la fracción $\frac{15}{3}$, pues son fracciones equivalentes. **Resulta conveniente que al calcular razones las simplifiques tanto como sea posible.**

Respuesta: La razón es $\frac{5}{1}$ (o 5:1).

- b) Para hallar la razón entre el número de círculos negros y el de círculos blancos, **el dividendo es 3 y el divisor es 15.**

La razón es $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

Respuesta: $\frac{1}{5}$ (o 1:5).

Para hallar la razón de dos números, formas el cociente entre ellos y lo puedes simplificar tanto como sea posible.

Ejemplo 2

Busca tres pares de números que estén en la razón:

a) $\frac{2}{5}$ b) 16 es a 2

- a) Lo que hay que hallar son pares de números cuyo cociente indicado sea igual a $\frac{2}{5}$. Para ello **buscas fracciones equivalentes a la dada:**

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{20}{50}$$

Los pares formados por el numerador y el denominador de estas fracciones son los buscados.

Respuesta: 4 y 10; 6 y 15; 20 y 50.

b) 16 es a 2 significa $\frac{16}{2}$

$$\frac{16}{2} = \frac{8}{1} = \frac{40}{5} = \frac{800}{100}$$

Respuesta: 8 y 1; 40 y 5; 800 y 100.

Recuerda que mediante la ampliación y simplificación puedes obtener infinitas fracciones equivalentes a una dada. Por eso siempre **es posible hallar infinitos pares de números que estén en una misma razón.**

En el ejemplo 2 se han obtenido razones iguales a una dada mediante la ampliación o la simplificación.

La igualdad entre dos razones recibe el nombre de proporción.

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} \text{ es una proporción.}$$

También puede escribirse: $2:5 = 4:10$.

En ambos casos se lee: **2 es a 5 como 4 es a 10.**

$\frac{8}{1}$ y $\frac{17}{2}$ no forman una proporción pues $\frac{8}{1} \neq \frac{17}{2}$.

En una proporción los términos reciben nombres especiales.



Recordarás que en la igualdad de fracciones se cumple que **los productos cruzados de sus términos son iguales**. Esta propiedad también se cumple en las proporciones y se conoce como la **propiedad fundamental de las proporciones**; se expresa así:

En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Por ejemplo:

$$\frac{3}{5} \text{ y } \frac{4,2}{7} \text{ forman la proporción } \frac{3}{5} = \frac{4,2}{7}$$

porque: $3 \cdot 7 = 4,2 \cdot 5$
 $21 = 21$

$$\frac{8}{2} \text{ y } \frac{9}{6} \text{ no forman una proporción porque: } 8 \cdot 6 \neq 9 \cdot 2$$

$$48 \neq 18$$

Esta propiedad nos será muy útil al calcular un término conocidos los tres restantes.

Ejemplo 3

Halla el valor de x en las proporciones siguientes y comprueba:

a) $\frac{x}{6} = \frac{20}{12}$ b) $\frac{2}{x} = \frac{28}{7}$

$$a) \frac{x}{6} = \frac{20}{12}$$

$$12 \cdot x = 6 \cdot 20 \quad \text{Aplicando la propiedad fundamental de las proporciones.}$$

$$x = \frac{120}{12} \quad \text{Resolviendo la ecuación.}$$

$$x = 10$$

Comprobación:

Sustituimos x por el valor obtenido y verificamos si la expresión

$$\frac{10}{6} = \frac{20}{12} \quad \text{es una proporción: } 10 \cdot 12 = 6 \cdot 20$$

$$120 = 120$$

Comprobación:

$$b) \frac{2}{x} = \frac{28}{7}$$

$$28 \cdot x = 14$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{\frac{1}{2}} = \frac{28}{7}$$

$$2 \cdot 7 = \frac{1}{2} \cdot 28$$

$$14 = 14$$

También puedes realizar la comprobación como aprendiste en el capítulo D al resolver ecuaciones, calculando cada miembro y comparando los resultados obtenidos.

Ejemplo 4

En un centro de trabajo hay 24 hombres. Si la razón del número de hombres al de mujeres es $\frac{2}{3}$, ¿cuántas mujeres laboran en ese centro?

Si representamos por x al número de mujeres, la razón entre el número de hombres y el de mujeres podemos expresarla como $\frac{24}{x}$ y sabemos que esta razón es igual a $\frac{2}{3}$, por lo que podemos plantear y resolver la proporción:

$$\frac{24}{x} = \frac{2}{3}$$

$$2x = 72$$

$$x = 36$$

Comprobación:

$$\frac{24}{x} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

Respuesta: En el centro laboran 36 mujeres.

Ejemplo 5

Dada la proporción: $\frac{26}{13} = \frac{4}{2}$. Comprueba que al:

- a) intercambiar los medios,
- b) intercambiar los extremos,
- c) invertir ambas razones,
se obtiene de nuevo una proporción.

a) $\frac{26}{4} = \frac{13}{2}$ es una proporción porque $26 \cdot 2 = 13 \cdot 4$.

b) $\frac{2}{13} = \frac{4}{26}$ es una proporción porque $2 \cdot 26 = 4 \cdot 13$.

c) $\frac{13}{26} = \frac{2}{4}$ es una proporción porque $13 \cdot 4 = 2 \cdot 26$.

En general, se cumple que:

En una proporción al **intercambiar los medios**, al **intercambiar los extremos** y al **invertir ambas razones** se obtiene de nuevo, en cada caso, una proporción.

Ejercicios (epígrafe 1)

1. Halla la razón entre:

a) 30 y 5

b) 8 y 64

c) 15 y 6

d) 4 y 10

e) 84 y 3

f) 7,8 y 0,2

g) 108 y 12

h) 0,25 y 0,75

i) $\frac{1}{2}$ y 4

j) 8 y $\frac{2}{7}$

k) $\frac{1}{5}$ y 3

l) 0,9 y $\frac{1}{4}$

2. Halla la razón entre el número de círculos blancos y el de círculos negros (fig. E4):

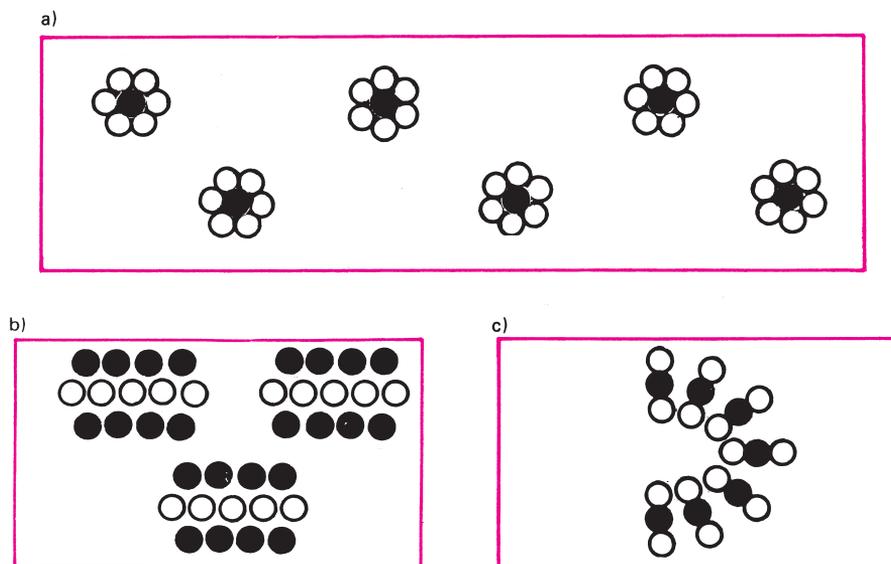


Fig. E 4

3. En qué razón se encuentran:

- Las edades de dos niños de 10 y 14 años respectivamente.
- Las longitudes de dos segmentos $\overline{AB} = 49$ cm y $\overline{CD} = 28$ cm.
- Las horas de viaje de La Habana a Santa Clara si aproximadamente en tren son 6 horas y en ómnibus 4 horas.
- Las áreas de dos rectángulos que miden 16 dm^2 y 64 dm^2 .
- Las amplitudes de dos ángulos M y N que miden 72° y 27° respectivamente.

4. Halla tres pares de números que estén en la razón:

a) $\frac{10}{1}$

b) $\frac{5}{4}$

c) 11 : 5

d) $\frac{4}{9}$

e) 3 : 7

f) $\frac{1}{0,2}$

g) 1,4 : 3

h) 19 : 2,5

5. Investiga cuáles de los pares de números siguientes están en la razón 7 es a 1:

a) 15 y 4

b) 6 y 42

c) 56 y 8

d) 70 y 10

e) 32 y 6

f) 1,4 y 0,2

6. Dados los segmentos siguientes (fig. E5):

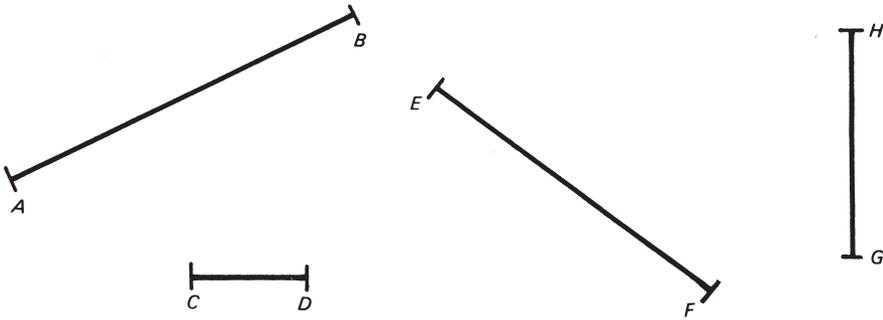


Fig. E 5

Halla su longitud y calcula las razones que se indican a continuación:

- a) $\frac{\overline{GH}}{\overline{AB}}$ b) $\frac{\overline{EF}}{\overline{CD}}$ c) $\overline{CD} : \overline{GH}$ d) $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$

7. Asocia cada elemento del conjunto M con un elemento del conjunto N de modo que estén en la razón $\frac{1}{3}$ (fig. E6):

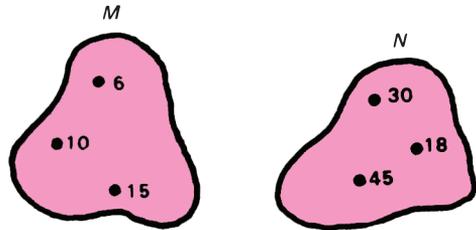


Fig. E 6

8. Investiga cuáles de los pares de razones siguientes forman una proporción:

- a) $\frac{6}{20}$ y $\frac{3}{10}$ b) $\frac{32}{16}$ y $\frac{4}{2}$
 c) $100:25$ y $4:1$ d) $0,2:1,6$ y $0,5:4$
 e) $\frac{5}{9}$ y $\frac{4}{68}$ f) $\frac{15}{17}$ y $\frac{0,4}{1,2}$

9. Copia en tu libreta y en cada cuadradito escribe el signo $>$, $<$ ó $=$ según corresponda. Di en cada caso si es una proporción y argumenta.

a) $3:3$ $2:3$

b) $\frac{1}{2}$ $\frac{50}{20}$

c) $\frac{11}{12}$ $\frac{6}{5}$

d) $15:9$ $20:12$

e) $76:100$ $3:4$

f) $\frac{6}{5}$ $\frac{1}{1}$

- 20* Juan Carlos tiene 64 monedas entre medios y pesetas. Si por cada 8 monedas hay 3 medios,
- ¿cuántos medios tiene?
 - ¿cuántas de las monedas son pesetas?
 - ¿qué cantidad de dinero tiene Juan Carlos en total? (Ten en cuenta que todas las pesetas son de 20¢)

2. Proporcionalidad

Muchas veces en la práctica se nos presentan situaciones en las que el valor o cantidad de una magnitud depende del valor de otra.

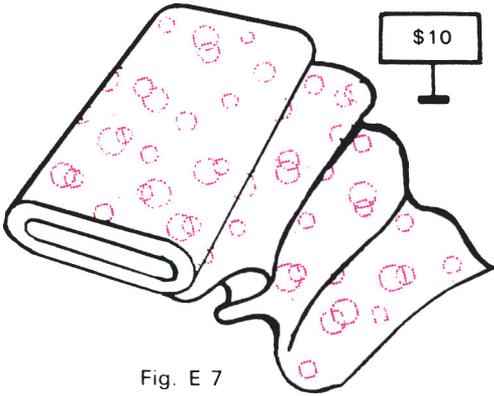


Fig. E 7

Por ejemplo, si un metro de tela tiene un precio de \$10 (fig. E7), el costo de un corte de tela depende del número de metros que tenga de largo. A mayor número de metros de tela corresponde un mayor costo. Esta relación puedes apreciarla mejor al analizar la tabla siguiente:

Largo de la tela (en metros)	1	2	2,5	3	$4\frac{1}{4}$	6	7	10
Costo (en peso)	10	20	25	30	42,5	60	70	100

Observa que:

$$10 = 10 \cdot 1; \quad 20 = 10 \cdot 2; \quad 25 = 10 \cdot 2,5; \quad \dots; \quad 100 = 10 \cdot 10.$$

Proporcionalidad directa

En el ejemplo de los metros de tela, el costo del corte de tela (en pesos) se obtiene multiplicando la longitud del corte (en metros) por el precio de un metro que es \$10.

Cuando dos magnitudes están relacionadas de modo que los valores de una de ellas se obtienen multiplicando por un mismo número los valores correspondientes en la otra, se dice que son **directamente proporcionales**.

Podemos decir entonces que el costo de una tela es **directamente proporcional** a la longitud del corte. El número por el que se multiplica se llama **factor de proporcionalidad**. En este caso es **10** ese factor, que es el precio de 1 m de tela.

En la tabla siguiente se ilustra una correspondencia que es una proporcionalidad directa:

Número de panes	1	2	3	...	10	11	12
Costo (en centavos)	5	10	15	...	50	55	60

Observa que cuando **aumenta** el número de panes, **aumenta** el costo, y que **las razones entre dos cantidades y sus correspondientes siempre son iguales**. Por ejemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} \quad \frac{10}{11} = \frac{50}{55} \quad \frac{3}{12} = \frac{15}{60}$$

En cada caso se forma una **proporción**.

En general:

En una proporcionalidad directa dos cantidades cualesquiera de una magnitud y sus correspondientes en la otra forman una proporción.

En este ejemplo el factor de proporcionalidad es 5, pues **es el número por el cual se multiplica** cada cantidad de panes para obtener su costo. Observa que el factor de proporcionalidad **es el valor correspondiente al 1** y lo puedes obtener **dividiendo cualquier cantidad de la segunda magnitud entre la cantidad a la cual corresponde en la primera**.

Por ejemplo: $\frac{5}{1} = 5$; $\frac{10}{2} = 5$; $\frac{55}{11} = 5$.

Si representas esta correspondencia en un sistema de coordenadas, puedes comprobar que los puntos que se obtienen al representar cada par de valores correspondientes **están sobre una misma recta** (fig. E8).

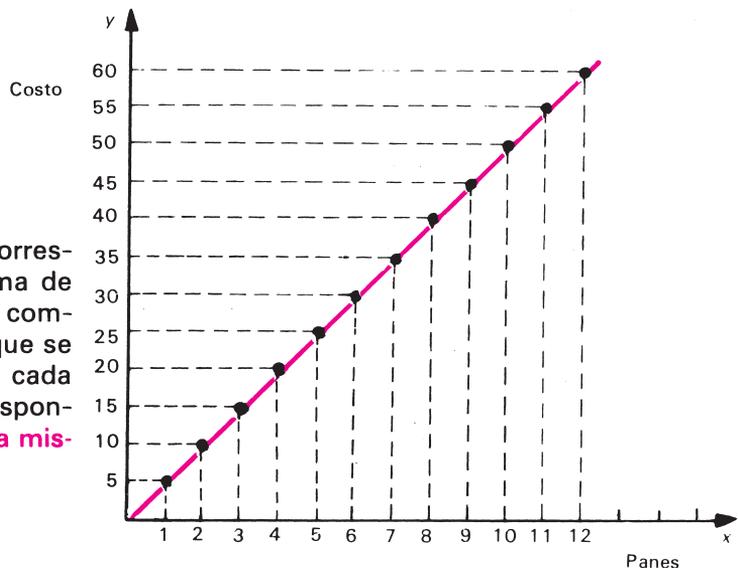


Fig. E 8

Existen muchos ejemplos que conoces de la práctica, que son magnitudes directamente proporcionales:

El costo y la cantidad de artículos, si se paga por unidad.

El costo y el peso de artículos, si se paga por peso.

El espacio recorrido y el tiempo de demora, si la velocidad es constante.

El tiempo de trabajo y la obra producida, si el número de obreros es constante.

El número de obreros y la obra producida, si el tiempo de trabajo es constante.

El conocer estos ejemplos te permitirá resolver con mucha facilidad problemas que se te pueden presentar con frecuencia.

Ejemplo 1

En la tabla se muestra una relación entre los árboles derribados en 1 día y el número total de árboles derribados en 8 días de trabajo. Completa la tabla sabiendo que esa relación es una proporcionalidad directa. Di cuál es el factor de proporcionalidad.

Número de días de trabajo	Número de árboles derribados en un día	Número total de árboles derribados
a) 8	2	16
b) 8	4	32
c) 8	5	?
d) 8	6	?
e) 8	10	?
f) 8	12	?

En las dos primeras filas de la tabla se observa que el número total de árboles derribados se obtiene multiplicando siempre por **8** el número de árboles derribados en un día.

Entonces:

$$c) 8 \cdot 5 = 40$$

$$d) 8 \cdot 6 = 48$$

$$e) 8 \cdot 10 = 80$$

$$f) 8 \cdot 12 = 96$$

El factor de proporcionalidad es **8** que es el número total de días trabajados.

Ejemplo 2

Si un kilogramo de arroz cuesta \$3,30, ¿cuánto cuestan 6 kg?

Conocemos el factor de proporcionalidad que es \$3,30 (precio de 1 kg de arroz). Entonces lo que hay que hacer es multiplicar el número de kilogramos por el precio de 1kg.

$$6 \cdot 3,30 = 19,80$$

Respuesta: 6 kg de arroz cuestan \$19,80.

Ejemplo 3

Una brigada de obreros construye 12 m de un muro en 2 días de trabajo.
¿Cuántos metros construirán en $3\frac{1}{2}$ días?

Debemos buscar el factor de proporcionalidad, para ello calculamos el número de metros que construyen en un día. Sabemos que hacen 12 m en dos días y como $12:2=6$, en 1 día hacen 6 m.

$$\text{Luego en } 3\frac{1}{2} \text{ días hacen: } 6 \cdot 3\frac{1}{2} = 6 \cdot \frac{7}{2} = 21$$

Respuesta: En $3\frac{1}{2}$ días construyen 21 m.

El método que hemos utilizado se llama **reducción a la unidad**, pues se halla la cantidad de una magnitud que corresponde a una **unidad** de la otra, observa que este consiste en **buscar el factor de proporcionalidad** y multiplicarlo por el valor que conocemos para hallar el valor correspondiente de la otra magnitud.

Las proporciones también son útiles para resolver problemas de proporcionalidad directa. En el ejemplo siguiente se utiliza el método de las proporciones.

Ejemplo 4

Un auto recorre 206,85 km en 3,5 h con una velocidad constante. ¿Qué distancia recorre en 5 h?

Vamos a denotar por x la distancia que recorre el auto en 5 h. Podemos representar en una tabla los datos del problema:

Espacio	206,85	x
Horas	3,5	5

Como dos valores de una magnitud y sus correspondientes en la otra forman una proporción, podemos plantear la siguiente proporción y calcular el término desconocido.

$$\frac{206,85}{x} = \frac{3,5}{5}$$

$$3,5 x = 206,85 \cdot 5$$

$$x = \frac{1\ 034,25}{3,5}$$

$$x = 295,5$$

Respuesta: En 5 h recorre 295,5 km.

Proporcionalidad inversa

Existen otras formas de relaciones entre magnitudes en las que el comportamiento es diferente al de los ejemplos dados de proporcionalidad directa, en estos casos, si los valores de una **umentan**, los valores correspondientes en la otra **disminuyen**.

Por ejemplo, si un automóvil se desplaza con una cierta velocidad y la **umenta**, el tiempo que demora en llegar a su destino **disminuye**. Si **duplica** su velocidad, el tiempo **se reduce a la mitad** (fig. E9).

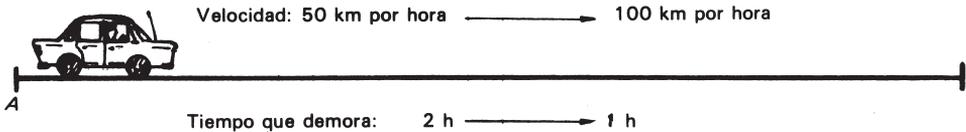


Fig. E 9

Situaciones como la anterior también se presentan, por ejemplo, en la relación que existe entre el largo y el ancho de los rectángulos que tienen la misma área.

Digamos que se trata de un área de 36 cm^2 . Recuerda que el área del rectángulo es el producto del largo por el ancho.

En una tabla podemos ver, con algunos valores, que:

Largo (en cm)	1	2	3	4	6	9
Ancho (en cm)	36	18	12	9	6	4

Observa que:

$$36 = 1 \cdot \underline{36}$$

$$18 = \frac{1}{2} \cdot \underline{36}$$

$$12 = \frac{1}{3} \cdot \underline{36}$$

$$9 = \frac{1}{4} \cdot \underline{36}$$

$$6 = \frac{1}{6} \cdot \underline{36}$$

$$4 = \frac{1}{9} \cdot \underline{36}$$

Los valores del ancho se obtienen multiplicando 36 por los **recíprocos** de los valores respectivos del largo. Aquí se aprecia de nuevo que cuando el largo aumenta, el ancho disminuye.

Cuando dos magnitudes están relacionadas de modo que los valores de una de ellas se obtienen multiplicando por un mismo número los recíprocos de los valores correspondientes de la otra magnitud, se dice que son **inversamente proporcionales**.

Así tenemos, por ejemplo, que la velocidad y el tiempo son **inversamente proporcionales** cuando la distancia a recorrer es la misma. Igual sucede con el largo y el ancho de los rectángulos de igual área.

El número por el que se multiplica cada recíproco se llama **factor de proporcionalidad inversa**. En el ejemplo de los rectángulos el factor es **36**.

Observa que para calcularlo basta **multiplicar dos valores correspondientes cualesquiera**, y por ello es **el valor que corresponde a 1**.

De la tabla anterior puedes obtener que **la razón entre dos valores de una magnitud y el recíproco de la razón de sus correspondientes, forman una proporción**. Por ejemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{18}{36}; \quad \frac{3}{4} = \frac{9}{12}; \quad \frac{2}{9} = \frac{4}{18}.$$

También podemos representar gráficamente la relación entre dos magnitudes inversamente proporcionales. Con los datos del ejemplo del largo y el ancho del rectángulo realizaremos la gráfica (fig. E10).

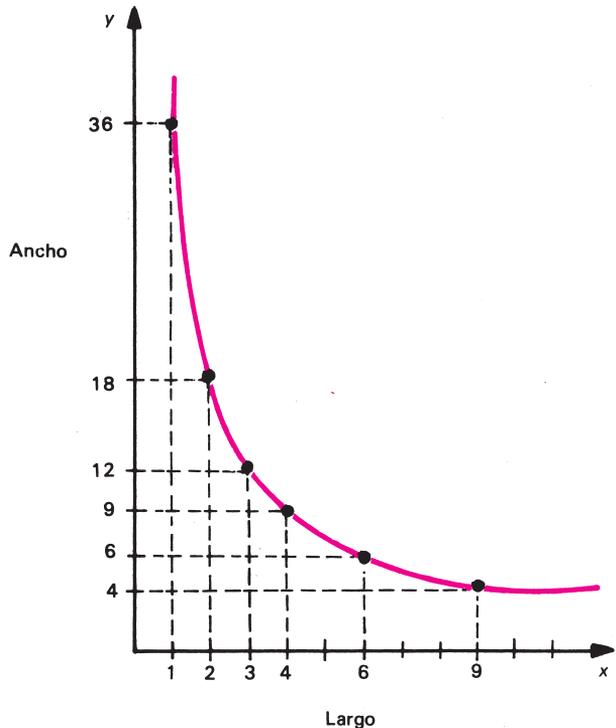


Fig. E 10

En la gráfica se aprecia que a diferencia de lo que sucede en la proporcionalidad directa, **los puntos obtenidos no están todos en una misma recta**.

Otros ejemplos de magnitudes inversamente proporcionales que seguro conoces de la práctica son:

El número de litros que recibe un tanque por minuto y el tiempo necesario para llenarlo, si su capacidad permanece constante.

El número de obreros y el número de días empleados para hacer una obra, si se trata de la misma obra.

El sueldo diario de un obrero y el número de días que ha trabajado, si lo ganado en total permanece constante.

Lo que gana un obrero por día y el número de días que necesita para realizar un trabajo, si lo que se paga por ese trabajo es constante.

Ejemplo 5

En la tabla se representa la relación entre el número de árboles derribados en un día y el número de días de trabajo empleados, suponiendo que en total se derribaron 96 árboles. Completa la tabla sabiendo que esa relación es una proporcionalidad inversa. Indica cuál es el factor de proporcionalidad inversa.

Número total de árboles	Número de árboles derribados en 1 día	Número de días de trabajo
a) 96	4	24
b) 96	6	?
c) 96	8	?
d) 96	16	?
e) 96	24	?
f) 96	32	?

Observa en el inciso a) que el número de días de trabajo se obtiene multiplicando 96 por el recíproco de 4 (equivale a dividir por 4). Entonces:

$$b) 96 \cdot \frac{1}{6} = 96 : 6 = 16$$

$$c) 96 \cdot \frac{1}{8} = 96 : 8 = 12$$

$$d) 96 \cdot \frac{1}{16} = 96 : 16 = 6$$

$$e) 96 \cdot \frac{1}{24} = 96 : 24 = 4$$

$$f) 96 \cdot \frac{1}{32} = 96 : 32 = 3$$

El factor de proporcionalidad inversa es 96.

Al resolver problemas de proporcionalidad inversa también podemos utilizar el método de reducción a la unidad y el de las proporciones que ya vimos en la proporcionalidad directa.

Ejemplo 6

Si un alumno necesita 12 días para escardar un campo de tomates, ¿cuántos días necesitarán 4 alumnos para realizar la misma labor?

Una vía es hallar el valor que corresponde a 1, es decir, el factor de proporcionalidad que en este ejemplo es:

$1 \cdot 12 = 12$ y después multiplicarlo por el recíproco del valor que conocemos (4 alumnos).

$$12 \cdot \frac{1}{4} = 3$$

Respuesta: 4 alumnos necesitarán 3 días para realizar la labor.

Otra vía consiste en formar una proporción y calcular x .

En ese caso x representa la cantidad de días que necesitan 4 alumnos para realizar la labor.

Representando los datos en una tabla:

Alumnos	1	4
Días	12	x

Formamos la proporción igualando la razón entre los valores de una magnitud con el recíproco de la razón entre sus valores correspondientes como indican las flechas.

$$\frac{1}{4} = \frac{x}{12}$$

$$4x = 12$$

$$x = \frac{12}{4}$$

$$x = 3$$

Respuesta: 4 alumnos necesitarán 3 días para realizar la labor.

Existen casos de magnitudes que están relacionadas entre sí de modo que el valor de una depende del valor de otra y sin embargo no existe proporcionalidad entre ellas.

Por ejemplo, la estatura de un hombre va aumentando con la edad, pero no se crece lo mismo por cada año que pasa. Si un niño mide 1 m a los 3 años de edad, eso no significa que a los 6 mida 2 m como se muestra en la figura E11, luego no todas las relaciones representan proporcionalidades.

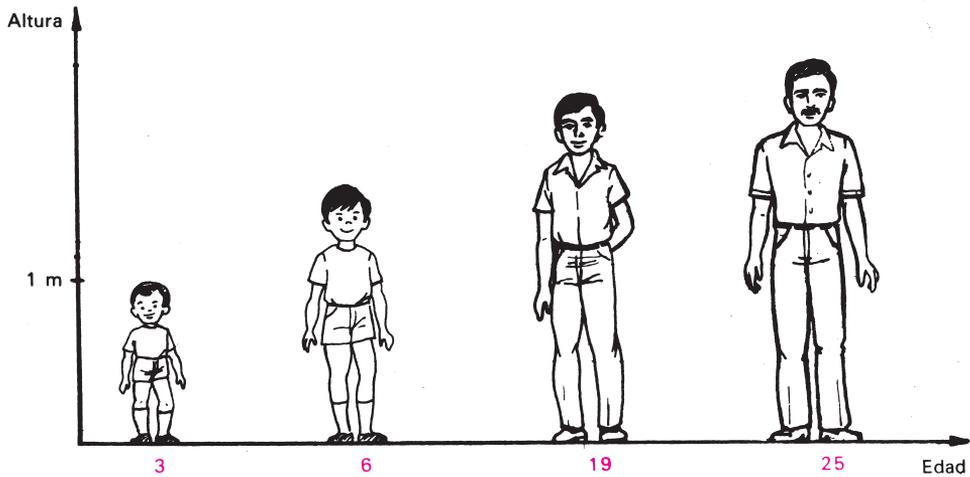


Fig. E 11

Ejercicios (epígrafe 2)

1. Los datos representados en las tablas siguientes corresponden a magnitudes directamente proporcionales. Halla en cada caso el factor de proporcionalidad y calcula los valores que faltan.

a)

Libras de mandarina	3	5	
Costo (en pesos)	0,75		2,25

b)

Distancia recorrida por un auto (en km)	50	100	120
Costo (en pesos)		8,5	

c)

Número de piezas que produce una máquina		170	306
Tiempo que demora (en horas)	$1\frac{1}{2}$	5	

2. Los datos representados en las tablas siguientes corresponden a magnitudes inversamente proporcionales. Halla en cada caso el factor de proporcionalidad y calcula los valores que faltan.

a)

Litros de agua que recibe un tanque por minuto		25	50
Tiempo necesario para llenarse	20	10	

b)

Litros de agua que recibe un tanque por minuto		60	90
Tiempo de demora del viaje (en horas)	9		1,5

- Si 13 m de poplín cuestan \$78, ¿cuánto cuestan 4 m?
- Un ciclista recorre 54 km en 3 h. ¿Cuántas horas necesitará para recorrer 126 km?
- Una máquina automática elabora 162 piezas en 2 h.
 - ¿Cuántas piezas elabora en 9 horas?
 - ¿Cuántas horas necesita para elaborar 972 piezas?
- 52 m de un tipo de alambre cuestan \$6,50.
 - ¿Cuántos metros de alambre compró David si gastó \$13?
 - Dariel quiere comprar 106 m de ese alambre. ¿Cuánto le costarán?
- De 150 q de remolacha se obtienen 25 q de azúcar.
 - ¿Cuántos quintales de azúcar se obtienen de 60 q de remolacha?
 - ¿De cuántos quintales de remolacha se obtienen 15 q de azúcar?
- El salario de un técnico es \$1,25 por hora.
 - ¿Cuál es su salario por 40 horas de trabajo?
 - ¿Cuánto tiempo, en horas, ha trabajado si cobra \$215?
- Una brigada de 9 mecánicos realizó un trabajo en 46 h.
 - ¿En qué tiempo pueden realizar este trabajo 15 mecánicos?
 - ¿Qué tiempo necesitarán 6 mecánicos con el mismo rendimiento promedio?
- Con 12 tornos del mismo tipo se pueden elaborar una serie de pequeñas piezas de maquinaria en 25 h.
 - ¿Cuántas horas se necesitan para elaborar las piezas, si dos tornos no se pueden utilizar por estar en reparación?
 - ¿Cuántas horas se atrasa la elaboración?
- 5 alumnos remueven en 12 horas un área del huerto escolar. ¿En qué tiempo realizan el mismo trabajo?
 - 6 alumnos?,
 - 10 alumnos?,
 - 4 alumnos?

Puedes apreciar en el cuadro que cuando decimos que **3** es el **12%** de **25**, es lo mismo que decir que la razón de **3** a **25** es igual a la de **12** a **100**.

Luego podemos calcular qué tanto por ciento es 3 de 25 resolviendo la proporción:

$$\frac{3}{25} = \frac{x}{100}, \text{ donde } x \text{ es el } \textbf{tanto por ciento}.$$

$$\text{En este caso: } x = \frac{3 \cdot 100}{25}$$

$$x = 12 \%$$

Ejemplo 1

Escribe cada uno de los siguientes enunciados como una proporción:

a) 1 es el 50% de 2

b) 4 es el 25% de 16

c) 25% de 80 es 20

d) 200 es el 250% de 80

a) $\frac{1}{2} = \frac{50}{100}$ planteamos la proporción recordando que 50% equivale a la razón $\frac{50}{100}$.

b) $\frac{4}{16} = \frac{25}{100}$

c) $\frac{20}{80} = \frac{25}{100}$ d) $\frac{200}{80} = \frac{250}{100}$

En todos los casos puedes comprobar que los productos cruzados son iguales.

Ejemplo 2

Resuelve las siguientes situaciones utilizando proporciones.

a) ¿Qué por ciento es 1 de 4?

b) El 30% de 400 alumnos son deportistas. ¿Cuántos deportistas hay?

c) ¿De qué número es 25 el 40%?

a) $\frac{1}{4} = \frac{x}{100}$, donde x es el tanto por ciento.

$$x = \frac{100}{4}$$

$$x = 25\% \quad \text{Respuesta: } 25\%.$$

b) $\frac{30}{100} = \frac{x}{400}$, donde x es el número de deportistas.

$$x = \frac{30 \cdot 400}{100}$$

$x = 120$ *Respuesta:* 120 alumnos son deportistas.

c) $\frac{40}{100} = \frac{25}{x}$, donde x es el número buscado.

$$x = \frac{25 \cdot 100}{40}$$

$$x = \frac{125}{2}$$

$x = 62,5$ *Respuesta:* El número es 62,5.

Observa que en todos los casos planteaste una **proporción en la que una razón es el tanto por ciento expresado como una fracción de denominador 100 y la otra es la que expresa qué parte es una cantidad de otra**. Así, tienes otra vía para resolver problemas de **tanto por ciento** utilizando **proporciones**.

Ejercicios (epígrafe 3)

1. Escribe cada uno de los siguientes enunciados como una proporción:

- | | |
|----------------------------|-------------------------|
| a) 5 es el 1% de 500. | b) 5% de 40 es 2. |
| c) 100 es el 10% de 1 000. | d) 60 es el 30% de 200. |
| e) 15% de 60 es 9. | f) 99 es el 33% de 300. |

2. Escribe cada uno de los enunciados siguientes como una proporción. Calcula el valor de n para cada inciso.

- | | |
|-------------------------|----------------------------|
| a) 4 es el 40% de n . | b) 1 es el n % de 4. |
| c) el 60% de n es 3. | d) 300 es el n % de 200. |
| e) 28 es el 7% de n . | f) n es el 6% de 50. |

3. Resuelve utilizando proporciones.

- ¿Qué tanto por ciento es 12 de 487?
- ¿Cuánto es el 20% de 340?
- ¿De qué número es 48 el 75%?
- ¿Cuánto es el 15% de 80?
- ¿De qué número es 22 el 20%?
- ¿Qué tanto por ciento es 5 de 8?

4. Completa la tabla siguiente:

Fracción común	Fracción decimal (denominador 100)	Notación decimal	Por ciento
$\frac{1}{2}$	$\frac{50}{100}$	0,50	50%
$\frac{1}{4}$			
$\frac{2}{5}$			
	$\frac{80}{100}$		
		0,60	
			75%
		1,40	
			3%

5. Observa la figura E12 y responde:



Fig. E 12

- ¿Qué tanto por ciento de ella está coloreado?
- ¿Qué tanto por ciento de ella está sin colorear?
- ¿Cuál es la suma de estos porcentajes?

6. Completa la siguiente tabla (fig. E13):

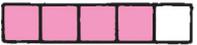
Figuras geométricas	Partes coloreadas	Total de partes	Razón	Denominador 100	Notación decimal	Por ciento
a) 						
b) 						
c) 						

Fig. E 13

- Si para hacer 5 tazas de ponche se utiliza una taza de jugo de frutas, ¿qué tanto por ciento del ponche es de jugo de frutas?
- De cada 10 árboles de una finca, 4 son de mangos, 3 de tamarindo y el resto de naranjos.
 - ¿Qué tanto por ciento de mangos hay en la finca?
 - ¿Qué tanto por ciento de tamarindos hay en la finca?
 - ¿Qué tanto por ciento de naranjos hay en la finca?
- En una población de 1 200 habitantes, el 6% de los mismos estudia idiomas.
 - De cada 100 personas, ¿cuántas estudian idiomas?
 - ¿Cuántas personas del total estudian idiomas?
- Laura salió de compras y gastó el 40% del dinero que tenía y aún le quedaron \$9. ¿Cuántos pesos tenía Laura originalmente?

RESUMEN

Proporciones	
$\frac{1}{2}$; 3 : 4 ; 8 es a 5	La comparación de dos cantidades mediante la división es la razón entre ellas.
La igualdad de dos razones es una proporción	
$\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$	$\frac{2,5}{4} = \frac{10}{16}$
Se cumple que el producto de los extremos es igual al producto de los medios.	

RESUMEN

Proporcionalidad

Proporcionalidad directa

Ejemplo:

Dulces	1	2	3	4...
Costo (en centavos)	5	10	15	20...

En la medida que los valores de una magnitud **umentan** los correspondientes en la otra también **umentan**. El costo se obtiene multiplicando **5** (factor de proporcionalidad) por la cantidad de dulces:

$$10 = 5 \cdot 2$$

Todas las razones de los valores de una misma magnitud forman una proporción con las razones de los valores correspondientes de la otra magnitud:

$$\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$$

Representación gráfica (fig. E14)

Todos estos puntos están situados en una misma recta.

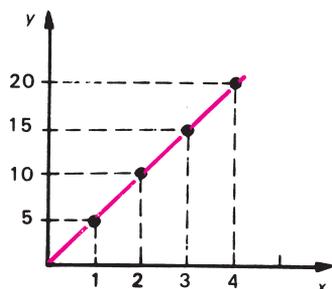


Fig. E 14

Proporcionalidad inversa

Ejemplo:

Obreros	1	2	3	4...
Tiempo en que hacen una obra	8	4	$\frac{8}{3}$	2...

En la medida que los valores de una magnitud **umentan** los correspondientes en la otra **disminuyen**. El tiempo que demoran se obtiene multiplicando **8** (factor de proporcionalidad) por el recíproco de la cantidad de obreros:

$$4 = 8 \cdot \frac{1}{2}$$

Todas las razones de los valores de una misma magnitud forman una proporción con los recíprocos de las razones de los valores correspondientes de la otra magnitud:

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$$

Representación gráfica (fig. E15)

Los puntos no están situados en la misma recta.

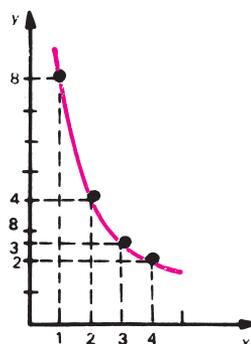


Fig. E 15

RESUMEN

Razones, fracciones, tanto por ciento

En un aula de sexto grado 2 de cada 5 alumnos pertenecen al club de campismo. Podemos decir que:

Razón	Fracción decimal	Centésimas	Por ciento
2:5	$\frac{40}{100}$	0,40	40 %

La razón 2:5 es igual a la razón

$$\frac{40}{100} (0,40).$$

2 es el 40 % de 5.

$$\frac{2}{5} = \frac{40}{100}$$

Existen relaciones entre las razones, fracciones, tanto por ciento y proporciones.

El lenguaje del tanto por ciento es una forma especial del lenguaje de las razones.

Podemos calcular el tanto por ciento usando las proporciones.

Ejercitación variada

1. Halla la razón entre:

a) 16 y 8

b) 30 y 10

c) 20 y 15

d) $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{2}$

e) 9,2 y 2,3

f) $2\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{6}$

g) $3\frac{2}{5}$ y 0,3

2. Halla la razón entre el número de cuadraditos negros y el de cuadraditos blancos (fig. E16):

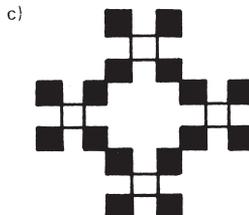
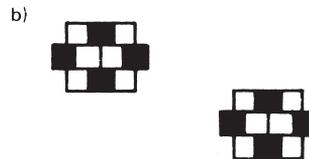
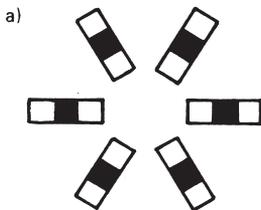


Fig. E 16

3. Escribe el conjunto B formado por 5 razones iguales a $\frac{5}{3}$.

4. Sea el conjunto:

$$M = \left\{ \frac{1}{6} ; \frac{21}{27} ; 30:110 ; \frac{9}{33} ; 0,8:4 ; \frac{77}{99} ; 1,5:5,5 ; \frac{1,4}{1,8} \right\}$$

a) ¿Cuáles de las razones del conjunto M son iguales a $\frac{7}{9}$?

b)* Escribe el conjunto P formado por los elementos del conjunto M que sean iguales a $3:11$. ¿Qué relación existe entre los conjuntos M y P ?

5. Sustituye las variables de modo que obtengas razones iguales a $8:3$ (fig. E17).

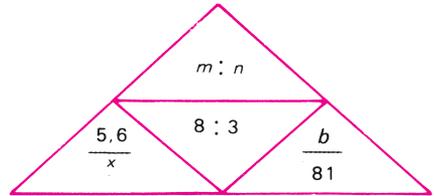


Fig. E 17

6. Halla el valor de c en las siguientes proporciones:

a) $\frac{c}{15} = \frac{7}{3}$

b) $2:3 = 5:c$

c) $\frac{c}{4} = \frac{1}{5}$

d) $\frac{c}{12} = \frac{5}{15}$

e) $\frac{2,4}{c} = \frac{2,1}{1,4}$

f) $4:2\frac{1}{2} = c:\frac{3}{4}$

7. Investiga cuáles de los siguientes pares de razones forman proporciones:

a) $\frac{67}{9}$ y $\frac{16}{8}$

b) $\frac{3}{4}:1$ y $1\frac{1}{2}:2$

c) $\frac{2}{3}:\frac{3}{2}$ y $\frac{1}{5}:\frac{3}{10}$

d) $\frac{10}{1,2}$ y $\frac{25}{3}$

8. Forma dos proporciones con los valores que se dan en cada inciso:

a) 1 ; 2 ; 3 ; 6

b) 8 ; 22 ; 11 ; 16

c) 7 ; 21 ; 33 ; 11

d) 34 ; 17 ; 2 ; 4

9. Dados los ángulos siguientes (fig. E18):

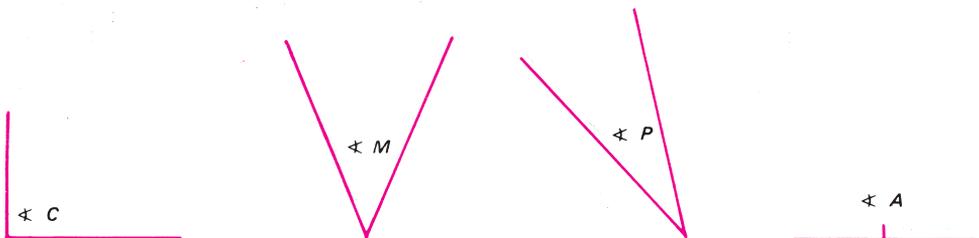


Fig. E 18

Determina su amplitud y calcula las razones que se indican a continuación:

a) $\frac{\sphericalangle C}{\sphericalangle M}$ b) $\sphericalangle M : \sphericalangle P$ c) $\sphericalangle A : \sphericalangle M$ d) $\frac{\sphericalangle C}{\sphericalangle P}$

10. Busca cinco pares de valores para a y b de manera que:

$$\frac{16}{a} = \frac{b}{3}$$

11*. Halla valores para m y n de modo que $\frac{m}{5} = \frac{n}{3}$ sea una proporción. Indica 3 posibilidades.

12. Determina el valor de x en las proporciones siguientes:

a) $\frac{50}{x} = \frac{x}{2}$ b) $x : 4 = 16 : x$ c) $\frac{x}{3} = \frac{12}{x}$

13. Busca en cada inciso tres pares de valores para a y b :

a) $\frac{a}{6} = \frac{6}{b}$ b) $a : 9 = 9 : b$

c) $a : 8 = 8 : b$ d) $\frac{a}{12} = \frac{12}{b}$

14. Celia está haciendo un collar colocando las cuentecitas en la forma que se indica en la figura E19.



Fig. E 19

Si tiene 18 cuentecitas negras, ¿cuántas blancas necesita?

15. Un automóvil recorre 10 km en 7 min. ¿Cuántos kilómetros recorrerá en 21 min?
16. Si 6 obreros pueden hacer la reparación de un equipo en 42 días, ¿cuántos días necesitan para hacerla 18 obreros?
17. Si una llave vierte 354 litros en un cuarto de hora, ¿cuántos litros vierte en 5 min?
18. El costo de 5 libretas es 60¢. ¿Cuánto cuestan 3 docenas de libretas?
19. Un tanque puede llenarse en 18 minutos por una llave que vierte 15 litros por minuto. ¿Cuánto tardará en llenarse por otra llave que vierte 10 litros por minuto?

20. Cuando Rosa cumplió 9 años su abuela le dijo: "Tienes 1 por cada 7 de los años que yo tengo ahora". ¿Qué edad tiene la abuela?
- 21* En una de las aulas de una escuela deportiva 3 de cada 8 alumnos practican baloncesto, 2 de cada 5 practican natación y el resto pertenece al equipo de esgrima. Si la matrícula del aula es de 40 alumnos,
- ¿cuántos alumnos practican baloncesto?,
 - ¿qué tanto por ciento de los alumnos practican natación?,
 - ¿cuántos alumnos pertenecen al equipo de esgrima?
22. Observa la figura E20:

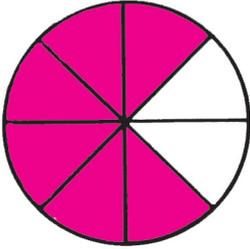


Fig. E 20

- ¿Qué tanto por ciento del círculo está coloreado?
- ¿Qué tanto por ciento del círculo está sin colorear?
- ¿Cuál es la suma de estos porcentajes?

23. En la figura E21:

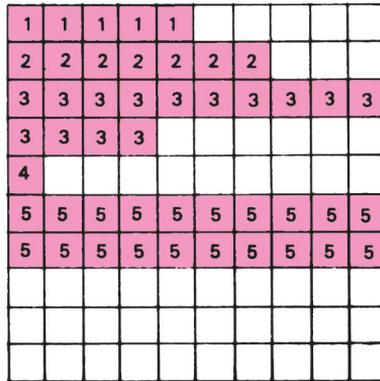


Fig E 21

- ¿Qué tanto por ciento de los cuadraditos está marcado con 1, con 2, con 3, con 4, con 5?
 - ¿Cuál es la razón de los cuadrados coloreados al total de cuadrados? ¿Qué tanto por ciento está coloreado?
 - ¿Cuál es la razón de los cuadrados en blanco al total de cuadrados? ¿Qué tanto por ciento está en blanco?
24. En un grupo de 500 personas, 35 son mayores de 70 años.
- ¿Cuál es la razón del número de personas mayores de 70 años al total del grupo?
 - De cada 100 personas, ¿cuántas son mayores de 70 años?
 - ¿Qué tanto por ciento de personas son mayores de 70 años?

- 25* En casa de Maylén, el consumo de electricidad del mes de febrero fue de 145 kilowatt por hora. En el mes de marzo esta cifra se redujo en un 20%. ¿Cuántos kilowatt por hora se consumieron en el mes de marzo?
- 26* En 4 días de trabajo, 6 tractores araron 144 ha. ¿Cuántas hectáreas pueden arar 4 tractores en 8 días con el mismo ritmo de trabajo?
27. En una granja por cada 15 pollos hay 7 patos y 3 gansos. En total hay 3 000 gansos. ¿Cuántas aves hay en total? ¿Qué tanto por ciento del total representa cada uno?
28. Dos niños corren al encuentro uno del otro (al mismo tiempo). Uno avanza 360 m cada 3 min, y el otro 450 m cada 4 min. Se encuentran a los 12 min. ¿Qué distancia recorrió cada niño?
- 29* ¿Cuántas horas durará un suero de 900 mL a 15 gotas por minuto, si cada mililitro equivale a 20 gotas de suero?
- 30* ¿Cuántos kilogramos de pan se pueden producir con 300 kg de trigo? (De 5 kg de trigo se obtienen 4 kg de harina y de cada 2 kg de harina 3 kg de pan.)
- 31* En una arboleda hay 360 naranjos, mangos y mameyes. Los mangos constituyen la quinta parte de la arboleda y por cada 3 árboles de mamey hay 5 naranjos. ¿Cuántos hay de cada tipo? ¿Qué tanto por ciento representan del total?

LA GEOMETRÍA

La geometría que estudiamos proviene, casi sin alteraciones, de una de las obras más famosas de todos los tiempos, los *Elementos* y a la que ya hicimos referencia con anterioridad.

La obra está compuesta por trece libros cuyo original en griego fue escrito por el gran matemático Euclides de Alejandría.

Los *Elementos* data del siglo IV a.n.e, fueron copiados en múltiples manuscritos y traducidos a numerosos idiomas antes de la invención de la imprenta. A partir de 1482, cuando apareció su primera edición impresa, ha sido reeditada más de 1 000 veces y publicada en casi todos los idiomas. Su contenido ha dominado universalmente la enseñanza de la geometría durante más de dos milenios.

Desde las primeras páginas de los *Elementos*, Euclides, presenta como cimientos del edificio geométrico que quiere construir, las cinco propiedades siguientes, algunas de las cuales conoces desde los primeros grados:

Se puede trazar una línea recta que pase por dos puntos.

Se puede prolongar una recta indefinidamente a partir de una recta finita (segmento).

Se puede trazar una circunferencia con centro y radio dados.

Todos los ángulos rectos son iguales.

Por un punto exterior a una recta puede trazarse una sola paralela a ella.

Esta última propiedad, Euclides no la formuló de esa forma pero es como más universalmente se conoce.

A partir de estas propiedades, se pueden enunciar otras y demostrar teoremas muy útiles de la geometría, algunos de los cuales vas a estudiar en este grado y otros, en la secundaria básica.

1. Repaso y profundización sobre figuras y cuerpos

Figuras planas y cuerpos

En la figura F1 aparecen representadas algunas figuras y cuerpos ya conocidos por ti.

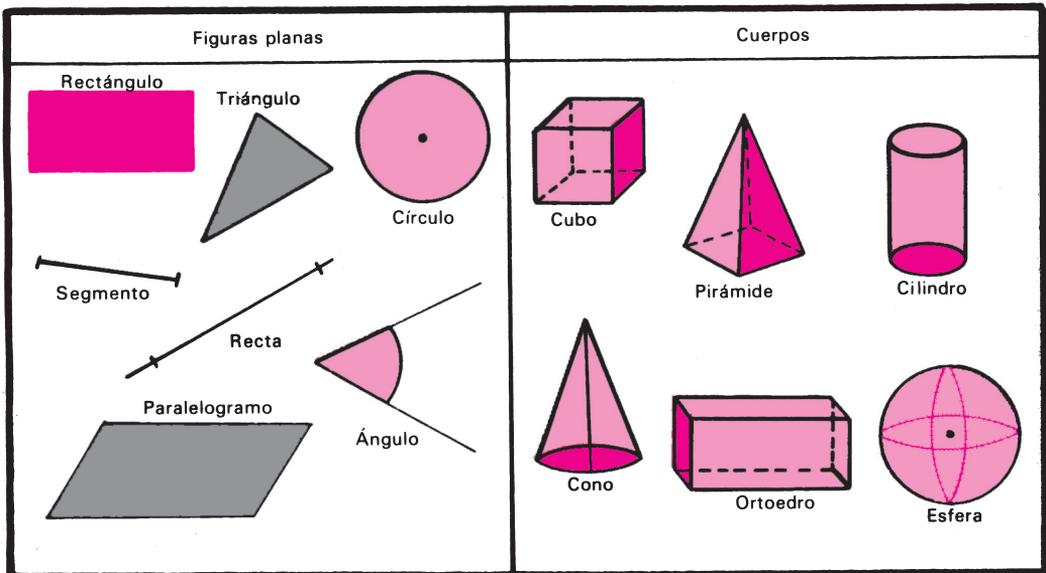


Fig. F 1

Las figuras y los cuerpos se diferencian en que en las primeras todos sus puntos están contenidos en un mismo plano y en los cuerpos no. Observa los cuerpos de la figura F1 y verás que no es posible lograr que todos sus puntos estén contenidos en un mismo plano.

La parte de la geometría que se dedica al estudio de las figuras planas se llama *geometría plana o planimetría* y la que se dedica al estudio de los cuerpos se denomina *geometría del espacio*.

En este grado estudiaremos fundamentalmente las figuras planas, aunque también en los ejemplos y la ejercitación se incluirán algunos cuerpos. En particular estudiaremos el **volumen del ortoedro**.

Algunas propiedades fundamentales de la planimetría

De la recta sabes que:

Por un punto pasan infinitas rectas pero que **por dos puntos pasa una y solo una recta** (fig. F2).

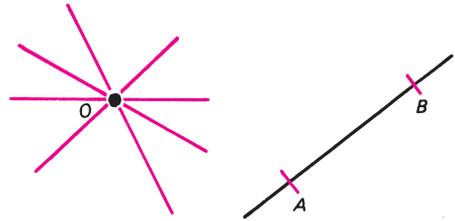


Fig. F 2

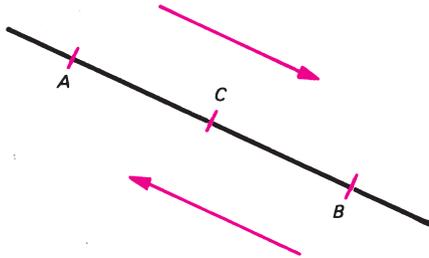


Fig. F 3

Entre dos puntos A y B de una recta existen muchos más puntos. Por eso se dice que **la recta tiene infinitos puntos** (fig. F3).

Pero, además, la recta **no tiene ni primer ni último punto**. Por eso **la recta es una figura ilimitada**. Además, siempre **se puede recorrer en dos sentidos** (fig. F3).

En el plano se cumple que:

Tres puntos no alineados **determinan un único plano** (fig. F4).

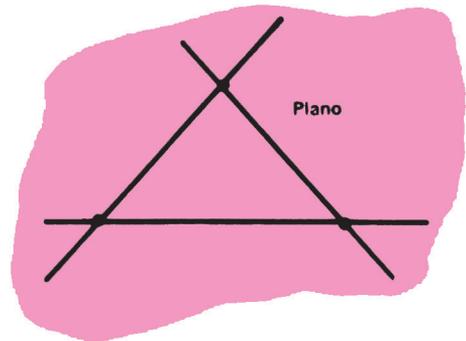


Fig. F 4

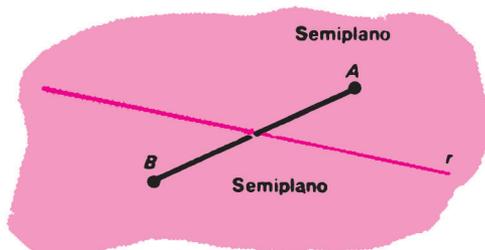


Fig. F 5

Cada recta en un plano **determina dos semiplanos** (fig. F5). Observa que **dos puntos situados en semiplanos opuestos determinan un segmento que corta la recta que es su borde**. En la figura F5, \overline{AB} corta a r .

En el cuadro de la figura F6 aparecen representadas las relaciones que pueden existir entre dos rectas en el plano.

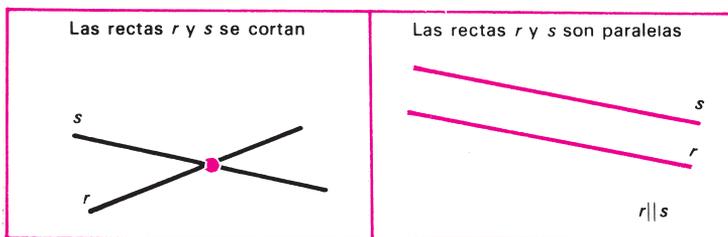


Fig. F 6

Cuando se cortan, **el punto de intersección es único.**

En la figura F7 puedes ver representadas otras propiedades de las rectas que te serán muy útiles en este grado y en los restantes.

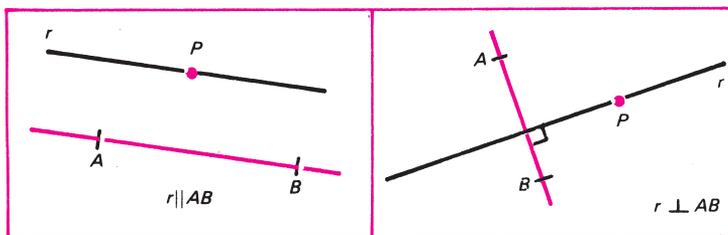


Fig. F 7

Observa que:

Por un punto exterior a una recta se puede trazar una y solo una paralela (perpendicular) a ella.

Ejercicios (epígrafe 1)

1. Traza tres puntos P , Q y R .
 - a) ¿Cuántas rectas podrías trazar que pasen por P ? ¿Por qué?
 - b) ¿Cuántas rectas podrías trazar que pasen por P y Q ? ¿Por qué?
 - c)* ¿Cuántas rectas quedan determinadas por P , Q y R ? ¿Por qué?
 - d) ¿Cuántos planos pasan por P , Q y R si no están alineadas? ¿Por qué?
2. Traza una recta AB . Determina dos puntos C y D que estén en semiplanos opuestos de los determinados por la recta AB .
 - a) ¿El segmento CD corta a la recta AB ?
 - b) ¿En qué posición habría que situar esos puntos C y D para que no corten a AB ?

3. Traza una recta MN y un punto Q que no pertenezca a MN . ¿Cuántas paralelas a MN pasan por Q ? ¿Cuántas perpendiculares?
En ambos casos explica tu respuesta.

4. En un sistema de coordenadas traza los puntos:

$A(4;1)$; $B(8;2)$; $C(7;4)$

- Traza las rectas determinadas por cada dos de esos puntos.
- Traza por A , B y C las paralelas a las rectas BC , AC y AB respectivamente.
- Fundamenta por qué en la construcción del inciso b) queda determinado un único triángulo por los puntos de intersección de las paralelas trazadas.

5. Traza un rectángulo $ABCD$ y sus diagonales \overline{AC} y \overline{BD} . Traza por cada vértice del rectángulo una paralela a la diagonal respectiva. ¿Qué nueva figura se forma?

6. Traza en un sistema de coordenadas el triángulo ABC en el que $A(4;1)$; $B(6;5)$ y $C(3;7)$.

- Complétalo de modo que se forme el paralelogramo $ABCD$.
- ¿Cuáles son las coordenadas del punto D ?

7. Dados los puntos $A(2;2)$; $B(10;4)$ y $C(11;8)$:

- Determina las coordenadas de un punto D de modo que $ABCD$ sea un paralelogramo en el cual \overline{AC} es una diagonal. Traza dicho paralelogramo.
- Fundamenta por qué es único el paralelogramo así construido.

8* Traza una recta r . Determina cuatro puntos A , B , C y D de modo que formen un cuadrilátero $ABCD$ en el cual:

- ninguna diagonal corte a la recta,
- una sola diagonal corte a la recta,
- las dos diagonales corten a la recta.

En cada caso fundamenta tu respuesta.

9. En la figura F8 aparece representado un cubo de lado $a = 4$ cm y que ha sido cortado por un plano paralelo a la base, a la mitad de su altura.

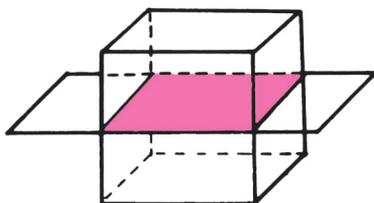


Fig. F 8

- ¿Qué figura plana se determina en el cuerpo debido al corte? ¿Cuáles son sus dimensiones?
- ¿En cuáles cuerpos queda dividido el cubo? ¿Cuáles son sus dimensiones?

2. Repaso y profundización de la igualdad geométrica y de los movimientos

Realización sucesiva de movimientos (composición)

Como un procedimiento geométrico para obtener figuras iguales (superpuestas coinciden) estudiaste en quinto grado **los movimientos del plano**.

En la figura F9 aparecen representadas en cada inciso, una figura y su imagen por un determinado movimiento.

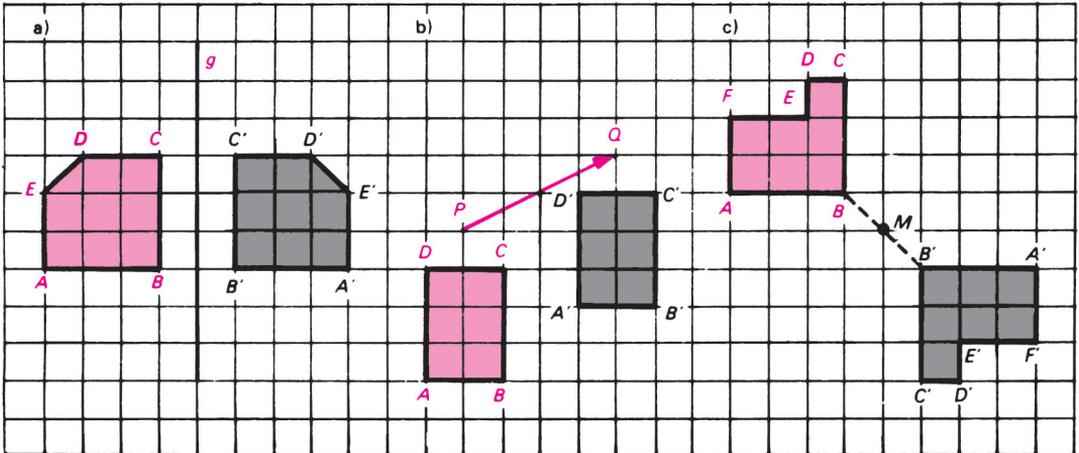


Fig. F 9

Como ejemplos de movimientos del plano estudiaste:

La reflexión.

La traslación.

La simetría central o rotación de 180° .

En la figura F9a se ha representado una **reflexión de eje g** .

En la figura F9b una **traslación de vector PQ** que indica en qué **dirección, sentido y longitud** se ha realizado el desplazamiento.

En la figura F9c se ha realizado una **simetría central de centro M** .

En todos los casos se han representado **correspondencias entre los puntos del plano en las cuales una figura y su imagen son iguales**.

La forma en que se establece la correspondencia entre los puntos del plano en cada uno de estos movimientos puedes estudiarla al final de este libro en los **Contenidos para recordar**.

En resumen puedes afirmar que:

En un movimiento, una figura y su imagen son iguales.

Es importante además que conozcas que los movimientos **se pueden realizar sucesivamente**, es decir, mover una misma figura sucesivamente según varios movimientos. A esto también se le llama **componer** dos o más movimientos.

Ejemplo 1

En la figura F 10 realiza sucesivamente la reflexión de eje s y después la traslación de vector QR .

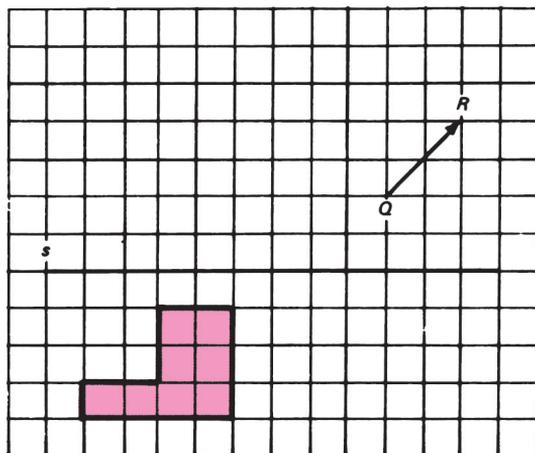


Fig. F 10

Observa en la figura F 11 cómo los movimientos se pueden realizar sucesivamente. Resulta de nuevo que se puede establecer una correspondencia entre los puntos del plano mediante la cual la última figura es **igual** a la primera.

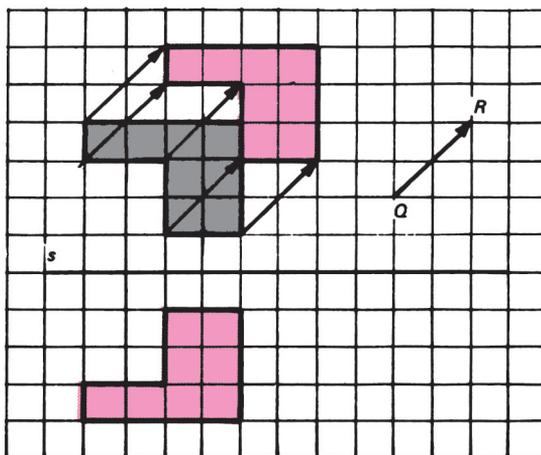


Fig. F 11

Puedes concluir entonces que:

La realización sucesiva de dos o más movimientos del plano es también un movimiento del plano.

Ejemplo 2

En la figura F 12 se han representado dos figuras iguales. Encuentra el movimiento (o los movimientos) mediante el cual se pueden superponer.

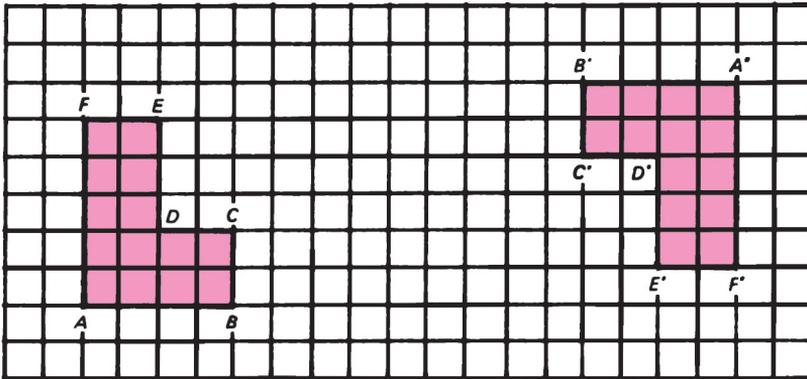


Fig. F 12

Observa en la figura F 13 que mediante la realización sucesiva de una traslación de vector $\overrightarrow{BB'}$ y una simetría central de centro en B' las figuras se pueden superponer. Luego **existe un movimiento** (la composición de la traslación y la simetría central) **mediante el cual las figuras se pueden superponer.**

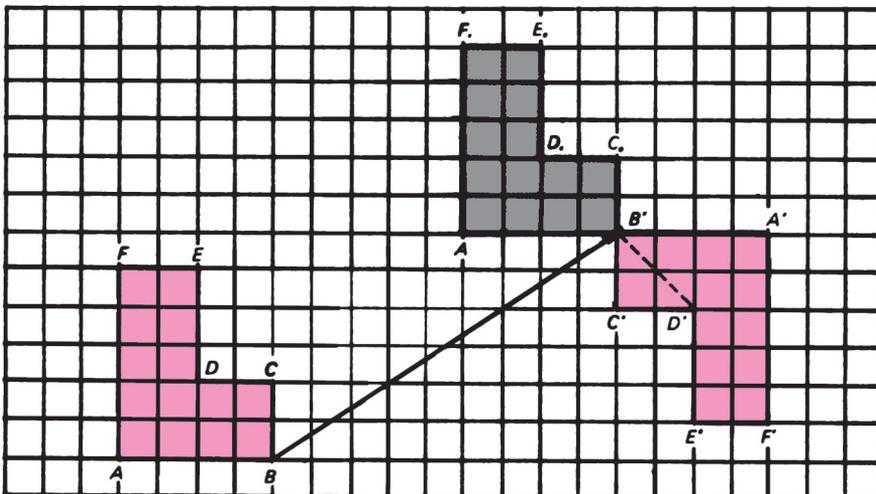


Fig. F 13

En general se puede afirmar que:

- Por un movimiento una figura y su imagen son iguales.
- Si dos figuras son iguales siempre existe un movimiento que lleva a una sobre la otra.

Propiedades especiales de la reflexión, la traslación y la simetría central

En los movimientos estudiados existen algunas propiedades especiales, relacionadas todas **con una recta y su imagen**, que es importante que las conozcas para tus estudios posteriores en este grado y que se resumen a continuación.

En una **reflexión** (fig. F14):

Una recta **paralela al eje** se transforma en otra recta que también es **paralela al eje**.

Una recta **perpendicular al eje** se transforma **en ella misma**.

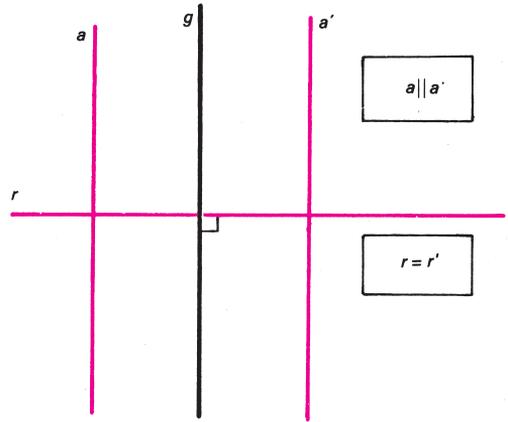


Fig. F 14

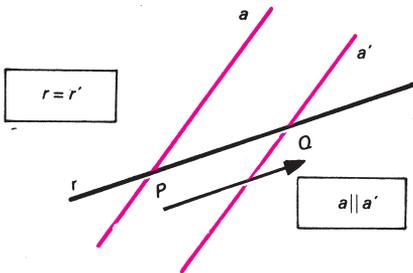


Fig. F 15

En una **traslación** (fig. F15):

Una recta **no paralela al vector** se transforma en una recta **paralela a ella**.

Una recta **paralela al vector** se transforma **en ella misma**.

En una **simetría central** (fig. F16):

Una recta que **no pasa por el centro** se transforma en una **paralela a ella**.

Una recta que **pasa por el centro** se transforma **en ella misma**.

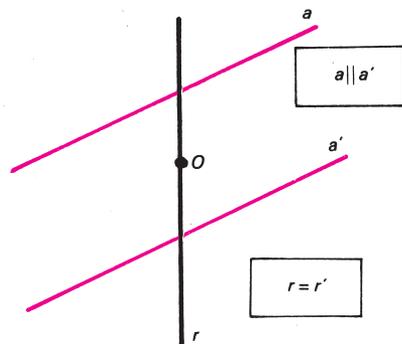


Fig. F 16

Ejemplo 3

En la figura F 17 aparecen representadas las rectas paralelas a , b y c que son a su vez perpendiculares a la recta s .

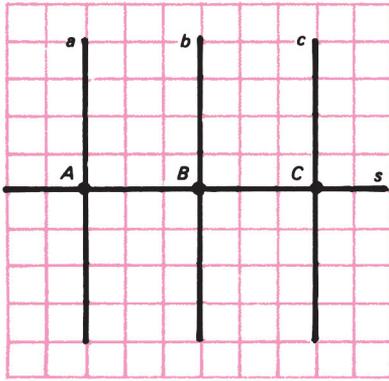


Fig. F 17

Determina:

- Todas las imágenes de las rectas de la figura, por una reflexión de eje b .
- Las imágenes de a , b y s por una traslación de vector \vec{AB} .
- Las imágenes de todas las rectas de la figura por una simetría de centro B .

- $a \rightarrow c$; $c \rightarrow a$; $b \rightarrow b$; $s \rightarrow s$
- $a \rightarrow b$; $b \rightarrow c$; $s \rightarrow s$
- $a \rightarrow c$; $c \rightarrow a$; $b \rightarrow b$; $s \rightarrow s$

Ejemplo 4

En la figura F 18, las rectas a y b son paralelas. Argumenta por qué a es la imagen de b por la traslación \vec{PQ} .

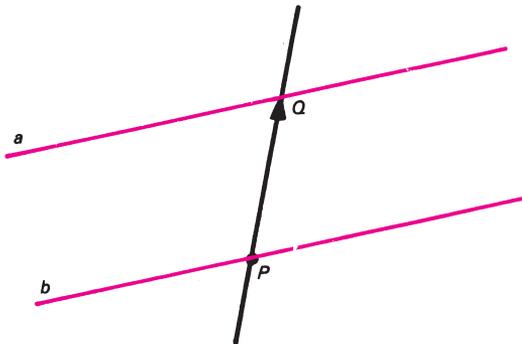


Fig. F 18

Para argumentar lo anterior hay que utilizar propiedades conocidas:

La imagen de b es una paralela a ella que tiene que pasar por Q , pues P se transforma en Q , luego necesariamente tiene que ser la recta a , pues **por Q solo puede pasar una y solo una paralela a b .**

Ejercicios (epígrafe 2)

1. Dibuja en tu libreta los polígonos de la figura F19 y halla su imagen por los movimientos que se indican en cada caso. Di cuáles son las coordenadas de los vértices de los polígonos y las de sus imágenes.

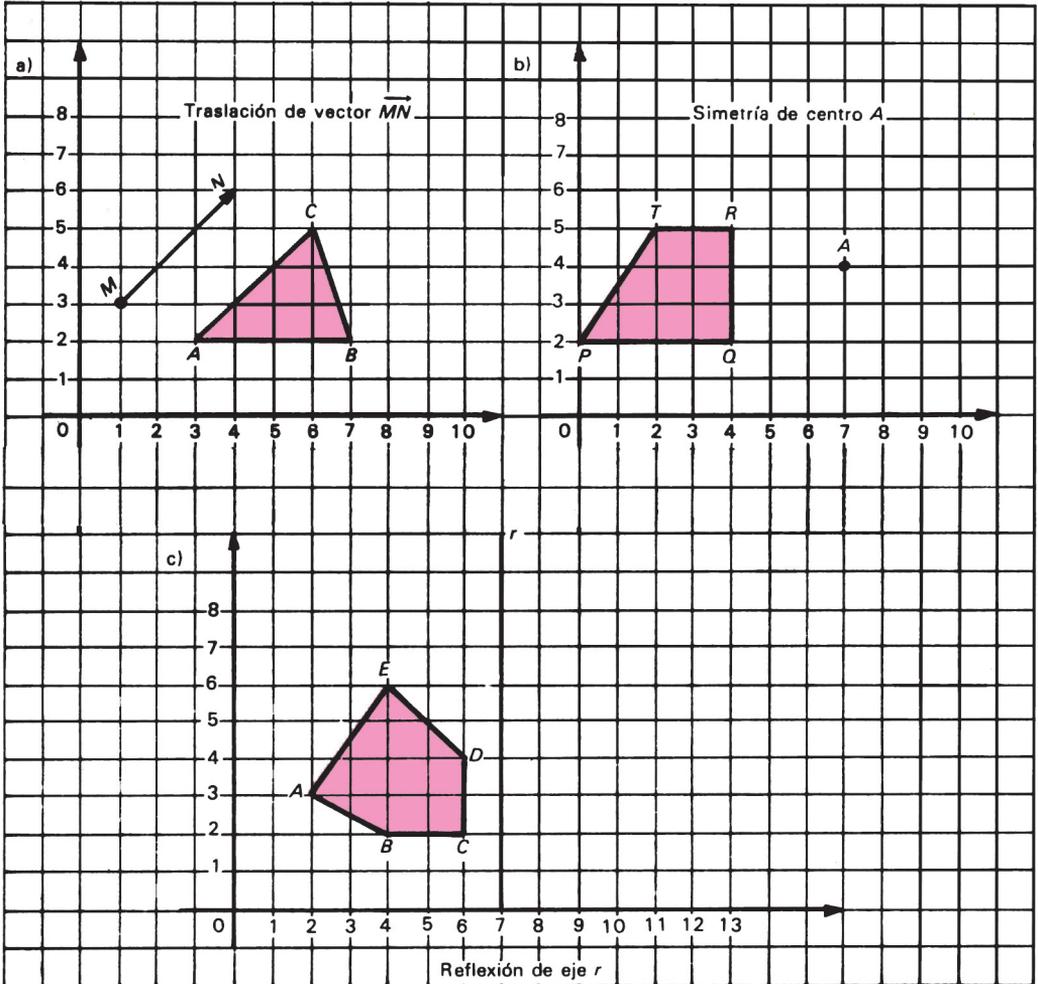


Fig. F 19

2. En la figura F20 se ha representado un cuadrado $ABCD$ y las imágenes de sus vértices por los movimientos estudiados. En cada inciso describe el movimiento realizado.

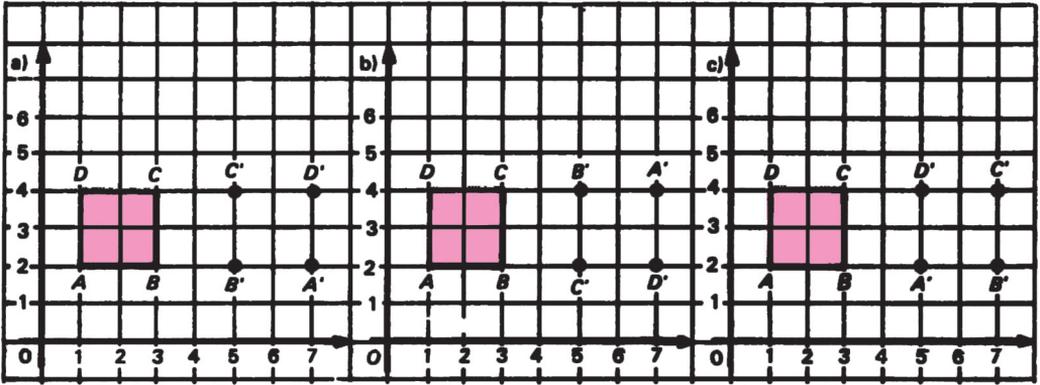


Fig. F 20

3. Traza en un sistema de coordenadas los puntos $A (1;1)$, $B (3;1)$, $C (1;4)$, $D (3;3)$, $E (5;1)$ y $F (5;6)$.

Halla la imagen del triángulo ABC por la realización sucesiva de los movimientos:

a) Traslación \vec{AD} y reflexión de eje \vec{EF} .

b) Reflexión de eje EF y traslación \vec{AD} .

c) Reflexión de eje EF y simetría de centro F .

En cada caso di cuáles son las coordenadas de los vértices de la última imagen del triángulo ABC .

4. En la figura F21 aparecen representadas las imágenes del triángulo ABC por reflexiones sucesivas en los ejes k , l y m ($k \parallel l$; $k \perp m$; $l \perp m$)

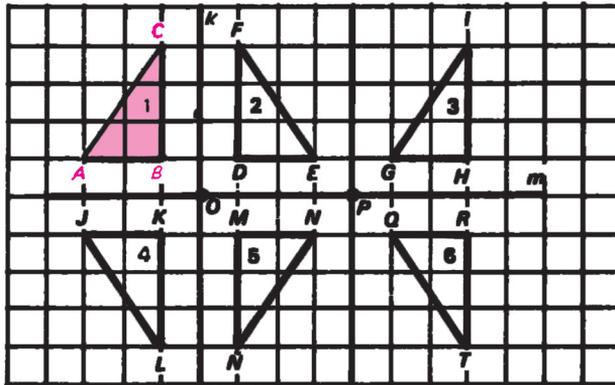


Fig. F 21

a) Di cuál es el eje (o los ejes) de la reflexión (o las reflexiones) que transforman a:

1 \longrightarrow 2 ; 1 \longrightarrow 3 ; 1 \longrightarrow 4 ; 1 \longrightarrow 5 ; 1 \longrightarrow 6

b) Qué movimientos transforman directamente:

1 \longrightarrow 3 ; 1 \longrightarrow 5

5. Copia en tu libreta la figura F22 y realiza sucesivamente la reflexión de eje s y después la traslación \vec{JK} . ¿Son iguales la figura original y la segunda imagen? ¿Por qué?

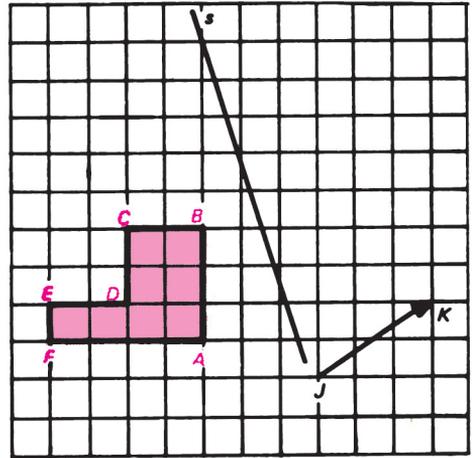


Fig. F 22

6*. ¿Qué movimientos transforman las siguientes figuras en ellas mismas (fig. F23)?

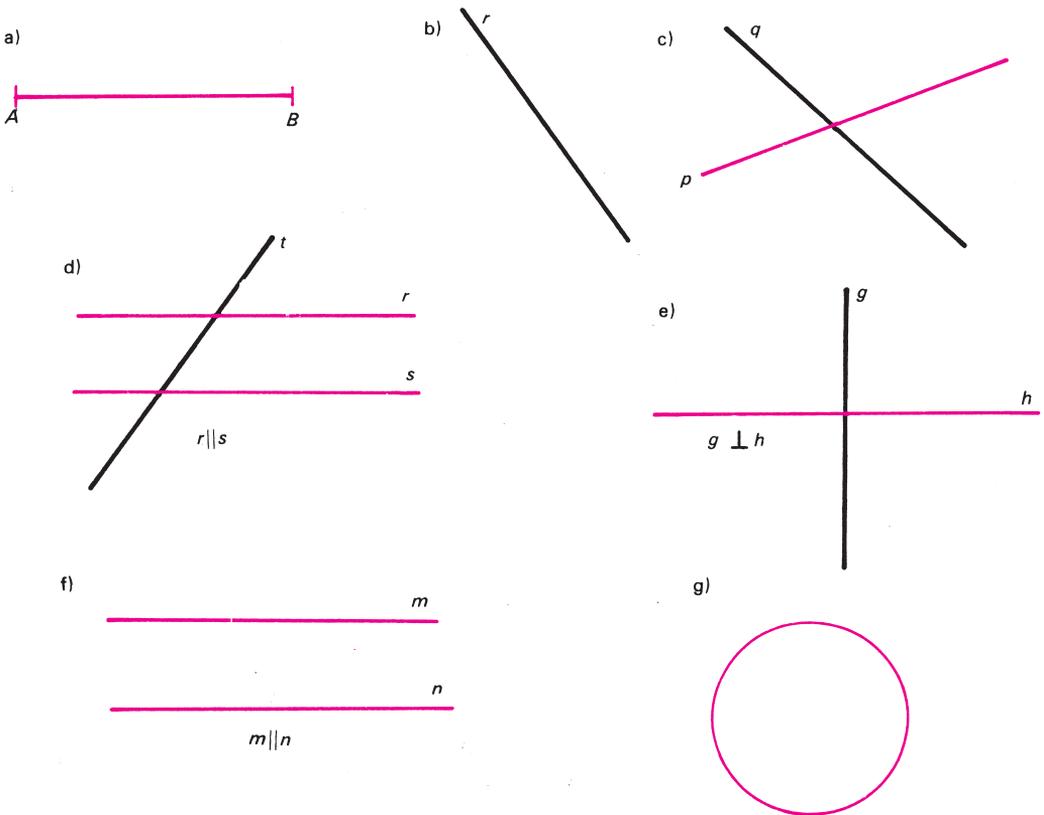


Fig. F 23

7. Traza en tu libreta de papel cuadrulado la figura F24. Determina en cada caso la imagen de la recta dada por el movimiento que se indica.

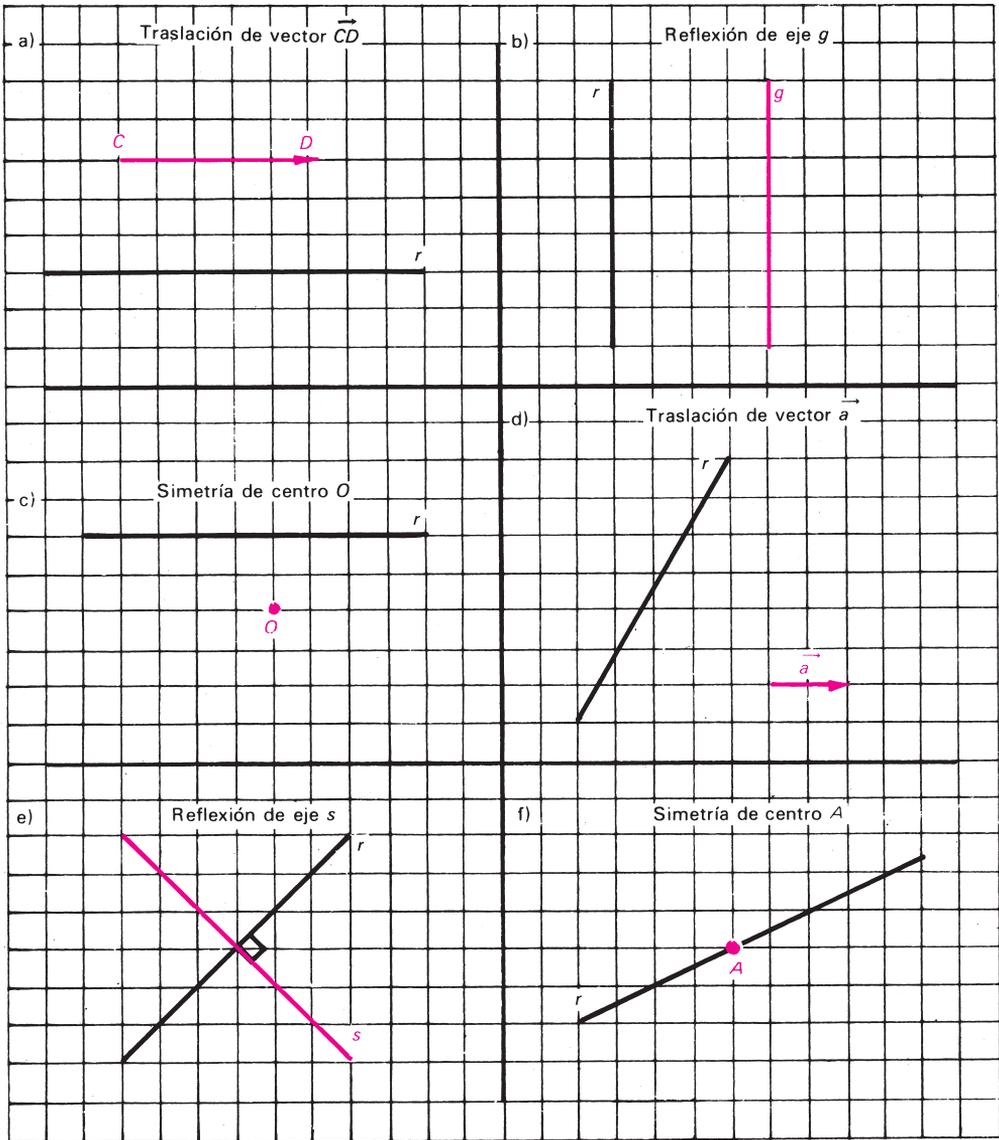


Fig. F 24

8*. Observa la figura F25 y di cuáles de las rectas representadas pueden ser imágenes de r por:

- La traslación \vec{PQ} .
- La simetría de centro M .
- La reflexión de eje e .

Las que no sean explica por qué.

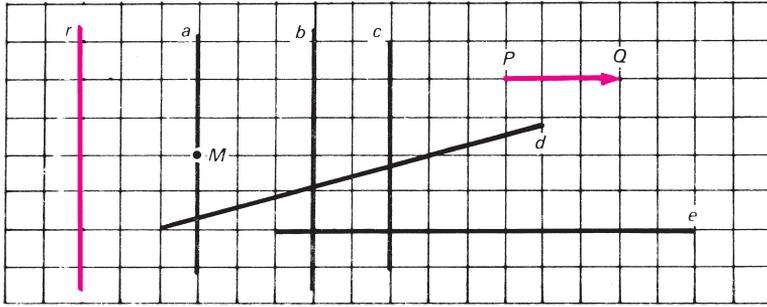


Fig. F 25

9. Representa en un sistema de coordenadas los puntos:

$A(4;3)$; $B(6;0)$; $C(8;3)$ y $D(6;6)$.

Determina y fundamenta en cada caso:

- La imagen de la recta AC por la reflexión de eje BD .
- La imagen de la recta BD por la simetría de centro $E(6;3)$.
- La imagen de la recta AD por la simetría de centro E .
- La imagen de la recta BC por la traslación \vec{AD} .

3. Ángulos. Repaso y profundización

Definición de ángulo

En quinto grado aprendiste que un ángulo se puede obtener como **intersección** de dos semiplanos, es decir como la parte común a dos semiplanos cuyos bordes se cortan (fig. F26).

En la figura la parte doblemente rayada es **un ángulo** ($\sphericalangle AOB$).

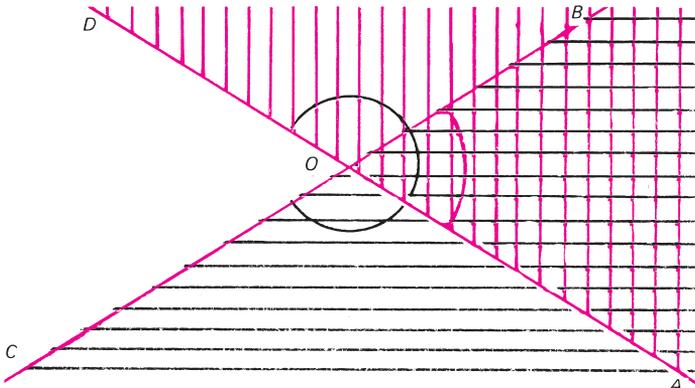


Fig. F 26

En la figura F26 puedes observar que si consideras **la unión** de los dos semiplanos, es decir, **tanto la parte común a ambos semiplanos como las dos partes no comunes** (rayadas solo en un color), también se obtiene **un ángulo**. En este caso el ángulo COD . Ese ángulo así obtenido es mayor que un ángulo llano, es decir, su amplitud es mayor que 180° .

Definición 1

Se denomina ángulo a la unión o intersección de dos semiplanos cuyos bordes se cortan o intersecan.

Con esta definición los ángulos pueden llegar a medir hasta 360° .

Ejemplo 1

Mide las amplitudes de los ángulos de la figura F27.

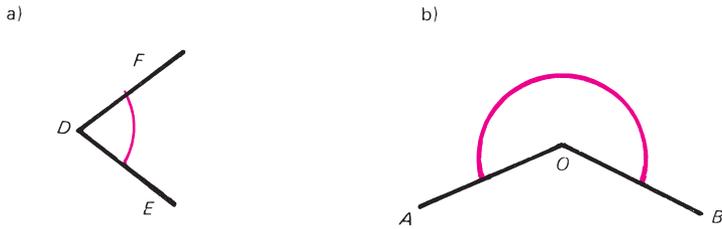


Fig. F 27

- a) Como el ángulo EDF es menor que 180° , para medirlo puedes utilizar directamente el **semicírculo graduado como aprendiste en grados anteriores**. En este caso: $\sphericalangle EDF = 75^\circ$.
- b) Como el ángulo AOB es mayor que 180° , mides con el **semicírculo el ángulo que sobrepasa al ángulo llano**. En este caso es 50° (fig. F28).

Entonces el ángulo AOB lo obtienes sumándole 180° . En este caso **$180^\circ + 50^\circ = 230^\circ$** .
Luego: $\sphericalangle AOB = 230^\circ$.

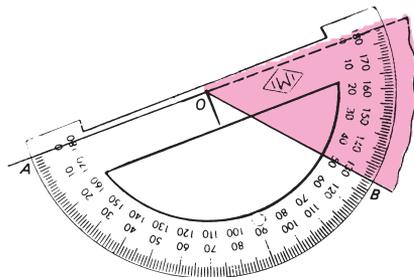


Fig. F 28

Clasificación de los ángulos según su amplitud

Como viste en la definición de ángulo, estos pueden ser mayores o menores que un ángulo llano. Los que son menores que un ángulo llano pueden ser a su vez mayores o menores que un ángulo recto, es decir de 90° . Esto permite clasificar los ángulos como se muestra en la siguiente tabla (fig. F29).

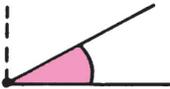
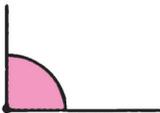
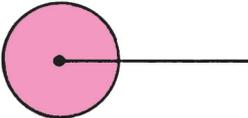
Ángulo agudo	Menor que 90°	
Ángulo recto	90°	
Ángulo obtuso	Mayor que 90° y menor que 180°	
Ángulo llano	180°	
Ángulo sobreobtuso	Mayor que 180° y menor que 360°	
Ángulo completo	360°	

Fig. F 29

Ejemplo 2

Clasifica los ángulos de la figura F 30 según su amplitud. Argumenta tu respuesta.

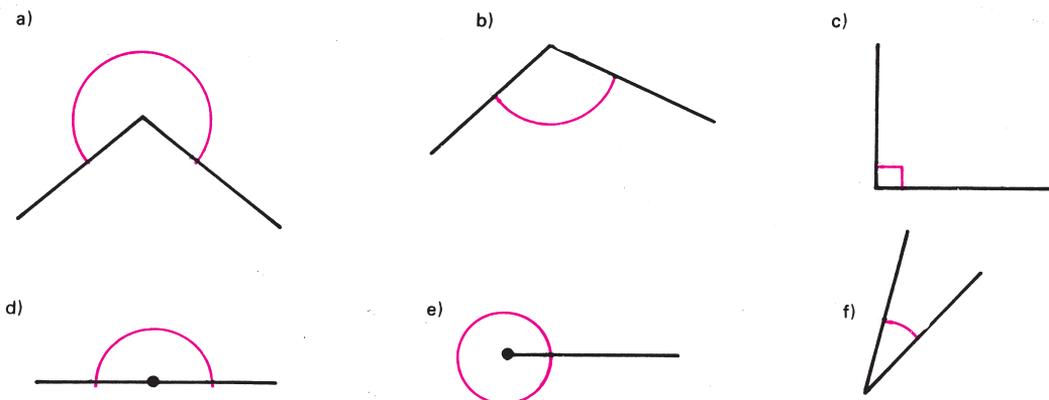


Fig. F 30

- a) Sobreobtuso porque es mayor que 180° y menor que 360° .
- b) Obtuso porque es mayor que 90° y menor que 180° .
- c) Recto porque mide 90° .
- d) Llano porque mide 180° .
- e) Completo porque mide 360° .
- f) Agudo porque es menor que 90° .

Ángulos consecutivos

Dados dos o más ángulos se puede formar un nuevo ángulo **moviéndolos** a la posición de **consecutivos**, es decir, poniéndolos **uno a continuación de otro** de modo que **solo tengan en común el vértice y un lado** (fig. F31).

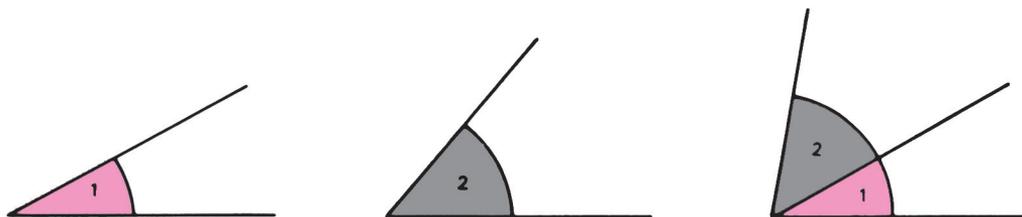


Fig. F 31

Observa que:

La amplitud de un ángulo formado por dos o más ángulos consecutivos es la suma de las amplitudes de los ángulos que lo forman.

Ejemplo 3

Di cuáles de los siguientes conjuntos de ángulos son consecutivos y en ese caso calcula la amplitud del ángulo por ellos determinado (fig. F32).

Si no son consecutivos, argumenta tu respuesta.

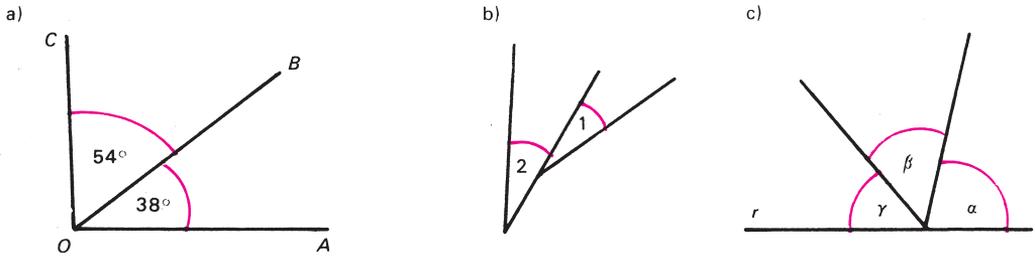


Fig. F 32

- a) $\sphericalangle AOB$ y $\sphericalangle BOC$ son consecutivos. $\sphericalangle AOC = 38^\circ + 54^\circ = 92^\circ$.
- b) $\sphericalangle 1$ y $\sphericalangle 2$ no son consecutivos porque los vértices no coinciden.
- c) $\sphericalangle \alpha$, $\sphericalangle \beta$ y $\sphericalangle \gamma$ son consecutivos **a un lado de una recta** porque forman un ángulo llano.

Del inciso c puedes concluir que:

Los ángulos consecutivos determinados a un lado de una recta forman un ángulo llano, luego suman 180° .

Puedes ver en la figura F33 que también se pueden formar **ngulos consecutivos alrededor de un punto**.

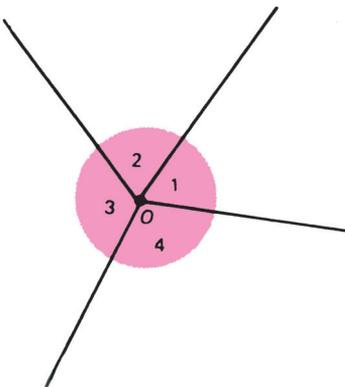


Fig. F 33

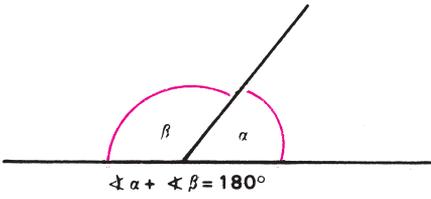
$\sphericalangle 1$, $\sphericalangle 2$, $\sphericalangle 3$ y $\sphericalangle 4$ son consecutivos alrededor del punto O.

Los ángulos consecutivos alrededor de un punto forman un ángulo completo, luego suman 360° .

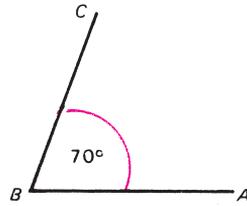
ngulos adyacentes

En la figura F34 puedes observar pares de ángulos que suman 180° . En el primer caso los ángulos son **consecutivos a un lado de una recta** y en el segundo caso no.

a)



b)



$\sphericalangle ABC + \sphericalangle DEF = 180^\circ$

c)

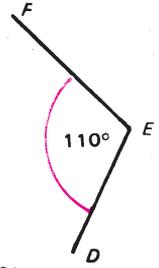


Fig. F 34

Definición 2

Dos ángulos consecutivos a un lado de una recta se llaman **ángulos adyacentes**

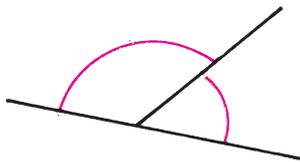
Los ángulos α y β de la figura F34 **son adyacentes**.

Los ángulos ABC y DEF de la propia figura **no son adyacentes**.

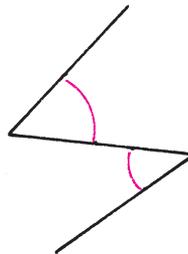
Ejemplo 4

De los siguientes pares de ángulos di cuáles son adyacentes y cuáles no. Argumenta cuando no lo sean (fig. F35).

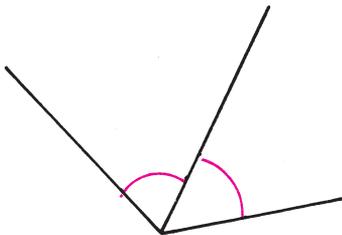
a)



b)



c)



d)

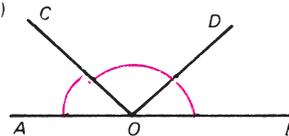


Fig. F 35

a) Son adyacentes.

b) No son adyacentes pues no son consecutivos.

c) No son adyacentes pues son consecutivos pero no a un lado de una recta.

d) Son adyacentes $\sphericalangle AOC$ y $\sphericalangle COB$. También $\sphericalangle AOD$ y $\sphericalangle DOB$.

Te habrás dado cuenta que los ángulos adyacentes cumplen una propiedad muy importante. Esa propiedad es que **suman 180°** y aunque te parezca muy evidente no podemos afirmar que es verdadera a partir de un ejemplo.

En Matemática vas a encontrar muchas afirmaciones, como la anterior, algunas veces muy claras y otras no tan claras y cuya veracidad es necesario establecer, es decir, **demostrar** a partir de otras propiedades ya conocidas. Estas afirmaciones o proposiciones verdaderas se denominan **teoremas**.

Teorema 1

Si dos ángulos son adyacentes entonces suman 180° .

Ejemplo 5

Demuestra el teorema de los ángulos adyacentes.

Para establecer la validez de un teorema, o sea, para **demostrar** un teorema, es útil reconocer en el enunciado, al igual que en la solución de problemas en general, **qué es lo que se da como información**, que en un teorema se llama **premisa o hipótesis**, y **qué es lo que se busca** que en un teorema se llama **tesis**. Después de reconocido lo anterior, una de las formas de demostrar es hacer una cadena de razonamientos válidos que se inician en la premisa y concluyen en la tesis.

En el teorema que queremos demostrar tenemos que:

La **premisa** es que **dos ángulos son adyacentes** (lo que se da).

La **tesis** es que **suman 180°** (lo que se desea demostrar).

Entonces:

Si dos ángulos son adyacentes se puede afirmar por definición, que son consecutivos a un lado de la recta.

Pero si son consecutivos a un lado de una recta, se puede afirmar que suman 180° .

Esto se puede representar esquemáticamente, apoyándose en una figura si es necesario (fig. F36), de la forma siguiente:

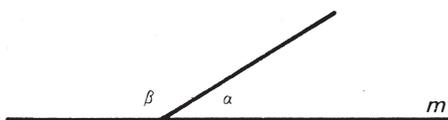


Fig. F 36

Demostración

- α y β son adyacentes (por premisa).
- α y β son consecutivos a un lado de una recta (por definición).
- **$\alpha + \beta = 180^\circ$**

Con relación a los teoremas es conveniente también que conozcas que si se invierten la premisa y la tesis se forman nuevas proposiciones que algunas veces son verdaderas y se enuncian como teoremas y otras veces son falsas. Por ejemplo, en el teorema de los ángulos adyacentes invirtiendo su premisa y su tesis se forma una nueva proposición:

Si dos ángulos suman 180° , entonces son adyacentes.

Una proposición que se forma de esa manera se llama recíproco del teorema en cuestión.

En este caso el recíproco del teorema de los ángulos adyacentes es una proposición **falsa**, pues puedes ver en la figura F34b que dos ángulos pueden sumar 180° y no ser adyacentes.

En clases posteriores **estudiarás otros recíprocos de teoremas que sí son proposiciones verdaderas** y con ellos se forman nuevos teoremas que te serán de utilidad conocer.

Ángulos opuestos por el vértice

Cuando **dos rectas se cortan en un punto** puedes ver en la figura F37 que se forman cuatro ángulos que se han denotado

$\sphericalangle 1$, $\sphericalangle 2$, $\sphericalangle 3$ y $\sphericalangle 4$.

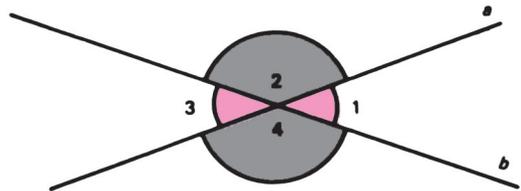


Fig. F 37

Observa que:

$\sphericalangle 1$ y $\sphericalangle 2$ son adyacentes (consecutivos a un lado de la recta b).

$\sphericalangle 2$ y $\sphericalangle 3$ son adyacentes (consecutivos a un lado de la recta a).

$\sphericalangle 3$ y $\sphericalangle 4$ son adyacentes (consecutivos a un lado de la recta b).

$\sphericalangle 4$ y $\sphericalangle 1$ son adyacentes (consecutivos a un lado de la recta a).

Puedes ver en la figura F37 que también hay otros pares de ángulos que no son adyacentes: $\sphericalangle 1$ y $\sphericalangle 3$; $\sphericalangle 2$ y $\sphericalangle 4$.

Estos ángulos que se forman al cortarse dos rectas se llaman **opuestos por el vértice**, pues tienen el mismo vértice y sus lados son semirrectas opuestas.

Ejemplo 6

En la figura F 38 selecciona todos los pares de ángulos adyacentes y todos los pares de ángulos opuestos por el vértice. Explica por qué no seleccionaste los restantes pares.

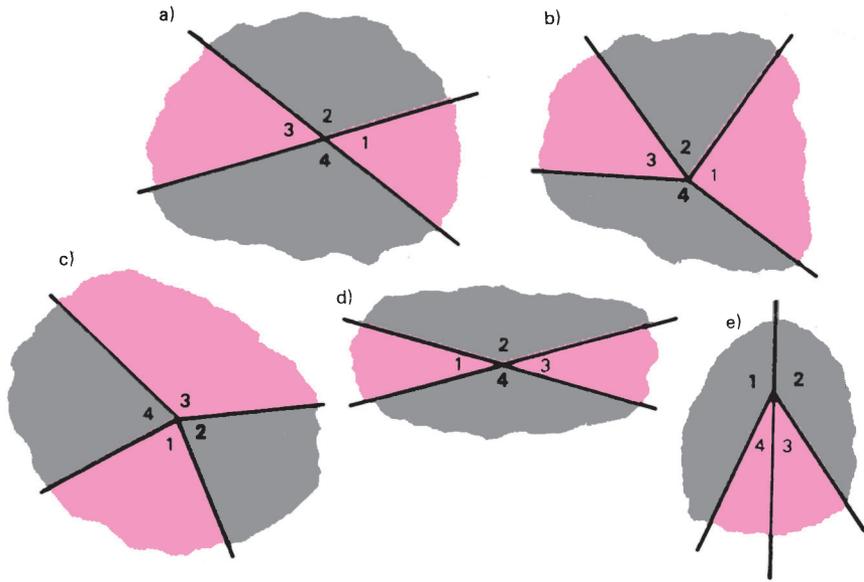


Fig. F 38

- a) $\sphericalangle 1$ y $\sphericalangle 2$; $\sphericalangle 2$ y $\sphericalangle 3$; $\sphericalangle 3$ y $\sphericalangle 4$; $\sphericalangle 4$ y $\sphericalangle 1$ son adyacentes.
 $\sphericalangle 1$ y $\sphericalangle 3$; $\sphericalangle 2$ y $\sphericalangle 4$ son opuestos por el vértice.
- b) No hay rectas, luego no se forman ni adyacentes ni opuestos por el vértice.
- c) Igual que en el inciso b).
- d) Igual que en el inciso a).
- e) $\sphericalangle 1$ y $\sphericalangle 4$; $\sphericalangle 2$ y $\sphericalangle 3$ son adyacentes. No hay opuestos por el vértice, pues no hay dos rectas que se cortan.

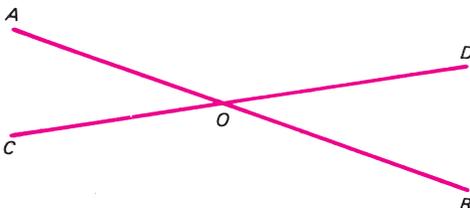
Los ángulos opuestos por el vértice cumplen una propiedad muy importante que vamos a enunciar como teorema.

Teorema 2

Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Su demostración es muy sencilla utilizando el teorema de los ángulos adyacentes. La **premisa** es que hay **dos ángulos opuestos por el vértice** y la **tesis** es que **son iguales**.

En la figura F39:



Sean AB y CD dos rectas que se cortan en O .

Hay que probar que:

$$\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOD$$

$$\text{(o que } \sphericalangle AOD = \sphericalangle BOC \text{)}$$

Fig. F 39

Demostración

$\sphericalangle AOC + \sphericalangle COB = 180^\circ$ por adyacentes, luego $\sphericalangle AOC = 180^\circ - \sphericalangle COB$.

$\sphericalangle DOB + \sphericalangle COB = 180^\circ$ por adyacentes, luego $\sphericalangle DOB = 180^\circ - \sphericalangle COB$.

Entonces, $\sphericalangle AOC = \sphericalangle DOB$ pues tienen la misma amplitud.

Otra forma de hacer la demostración es usando los movimientos estudiados.

Observa que por una simetría de centro en O , el ángulo AOC se transforma en el ángulo DOB , luego son iguales.

Ejemplo 7

Calcula el valor de los ángulos 1 al 12 destacados en la figura F40. Argumenta en cada caso tu respuesta. Ten en cuenta que las rectas representadas se cortan.

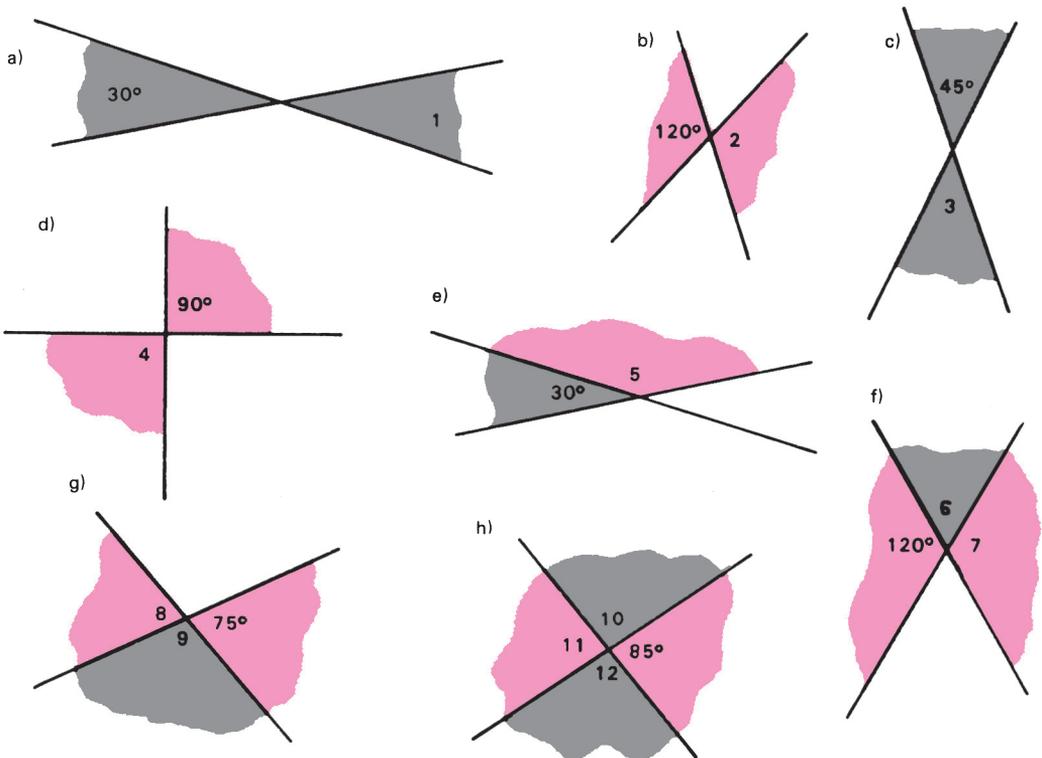


Fig. F 40

- a) $\sphericalangle 1 = 30^\circ$ por opuestos por el vértice.
- b) $\sphericalangle 2 = 120^\circ$ por opuestos por el vértice.
- c) $\sphericalangle 3 = 45^\circ$ por opuestos por el vértice.
- d) $\sphericalangle 4 = 90^\circ$ por opuestos por el vértice.
- e) $\sphericalangle 5 + 30^\circ = 180^\circ$ por adyacentes.
 $\sphericalangle 5 = 150^\circ$
- f) $\sphericalangle 7 = 120^\circ$ por opuestos por el vértice.
 $\sphericalangle 6 + 120^\circ = 180^\circ$ por adyacentes.
 $\sphericalangle 6 = 60^\circ$

- g) $\sphericalangle 8 = 75^\circ$ por opuestos por el vértice.
 $\sphericalangle 9 + 75^\circ = 180^\circ$ por adyacentes.
 $\sphericalangle 9 = 105^\circ$
- h) $\sphericalangle 11 = 85^\circ$ por opuestos por el vértice.
 $\sphericalangle 10 + 85^\circ = 180^\circ$ por adyacentes.
 $\sphericalangle 10 = 95^\circ$
 $\sphericalangle 12 = \sphericalangle 10 = 95^\circ$ por opuestos por el vértice.

Seguro que te has dado cuenta ya que el recíproco del teorema de los ángulos opuestos por el vértice también es una proposición falsa, pues si dos ángulos son iguales no son necesariamente opuestos por el vértice.

En resumen:

Quando dos rectas **se cortan** se forman cuatro ángulos (fig. F41).
 Los ángulos 1 y 2, 2 y 3, 3 y 4, y 4 y 1 **son adyacentes**.
 Los ángulos adyacentes **suman 180°** .
 Los ángulos 1 y 3, y 2 y 4 **son opuestos por el vértice**.
 Los ángulos opuestos por el vértice **son iguales**.

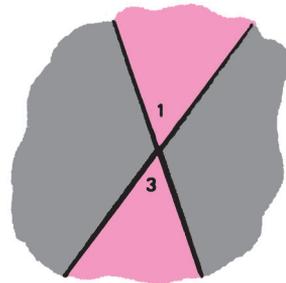


Fig. F 41

Ejercicios (epígrafe 3)

1. Mide los ángulos de la figura F42. Clasifícalos según su amplitud.

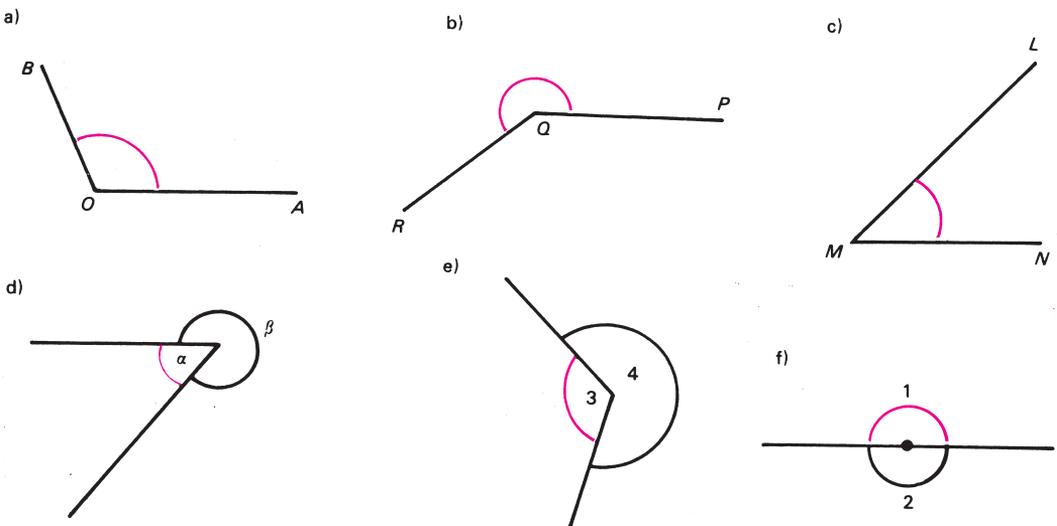


Fig. 42

- Traza en un sistema de coordenadas los puntos $A(2;1)$, $B(4;3)$, $C(2;5)$ y $D(0;3)$. Mide los ángulos interiores del cuadrilátero $ABCD$ y clasifícalos.
- Dados los puntos $E(2;4)$, $F(4;5)$ y $G(6;4)$, ubica un punto H de modo que se forme un trapecioide simétrico $EFGH$ y que el ángulo $\angle EHG$ sea:
 - agudo,
 - obtuso.
 ¿Cuáles son las coordenadas del punto H ?
- Traza con el semicírculo graduado ángulos con las siguientes amplitudes:
 - $\sphericalangle A = 64^\circ$
 - $\sphericalangle PQR = 128^\circ$
 - $\sphericalangle 1 = 223^\circ$
 Clasifícalos según su amplitud.
- En la figura F43, cuántos grados ha girado el horario del reloj desde:
 - 11 a.m. a 4 p.m.
 - 5 p.m. a 9 p.m.
 - 1 a.m. a 10 a.m.

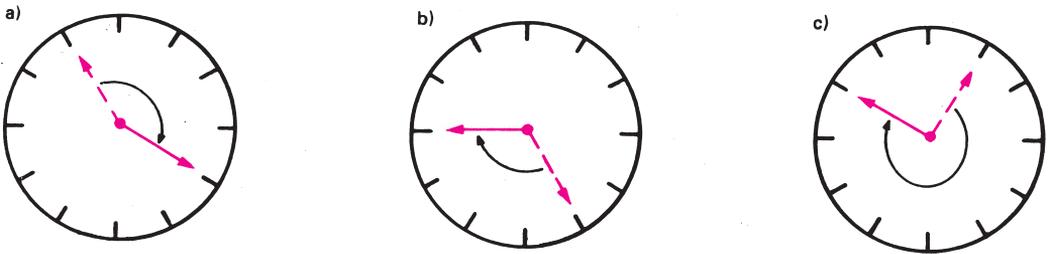


Fig. F 43

- En los triángulos de la figura F44 clasifica los ángulos según su amplitud. Justifica tu respuesta.

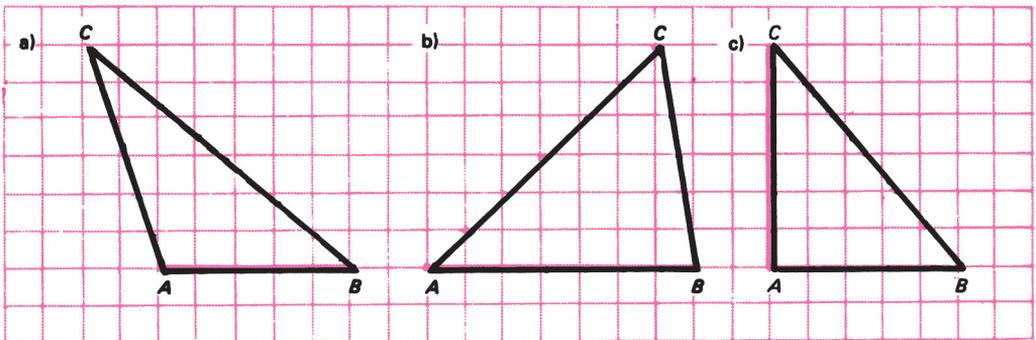


Fig. F 44

- En los polígonos de la figura F45, di cuáles ángulos son agudos y cuáles obtusos.



Fig. F 45

8. Traza un ángulo:
 a) Agudo. b) Obtuso. c) Recto. d) Sobreobtuso.
9. En la brújula de la figura F46 se han situado los cuatro puntos cardinales (N, S, E, W) y a igual distancia de ellos los puntos colaterales (NE, SE, NW, SW).
 Son ocho divisiones iguales.

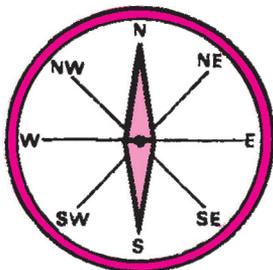


Fig. F 46

- a) ¿Cuánto mide el ángulo formado por los radios en las direcciones:
 N y E, N y SE, NE y NW, SE y N?
 b) Clasifica los ángulos que se forman según su amplitud.

10. María Elena compró un pastel y lo picó en partes iguales. En la figura F47 aparece representada una de esas partes.

¿En cuántas partes dividió el pastel?
 ¿Por qué?

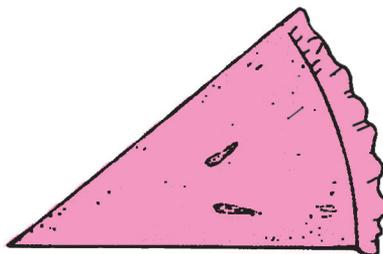


Fig. F 47

11. Selecciona los pares de ángulos que pueden formar un ángulo recto. Justifica.
 a) $\sphericalangle A = 61^\circ$ y $\sphericalangle B = 39^\circ$
 b) $\sphericalangle PQR = 13^\circ$ y $\sphericalangle STU = 77^\circ$
 c) $\sphericalangle 3 = 27^\circ$ y $\sphericalangle 4 = 63^\circ$
12. Selecciona los pares de ángulos que pueden formar un ángulo llano. Justifica.
 a) $\sphericalangle 1 = 79^\circ$ y $\sphericalangle 2 = 101^\circ$
 b) $\sphericalangle C = 121^\circ$ y $\sphericalangle D = 49^\circ$
 c) $\sphericalangle ABC = 52^\circ$ y $\sphericalangle DEF = 128^\circ$
13. Representa en un sistema de coordenadas el cuadrilátero PQRS con $P(1;5)$, $Q(1;1)$, $R(3;1)$ y $S(3;5)$.
 Traza sus diagonales y llámale T al punto de intersección.
 a) Clasifica, en agudos y obtusos, los ángulos que se forman al cortarse las diagonales.
 b) En la figura obtenida di cuáles son los pares de ángulos que suman 90° y cuáles suman 180° .
14. En la figura F48 selecciona pares de ángulos que sumen 90° y pares de ángulos que sumen 180° .

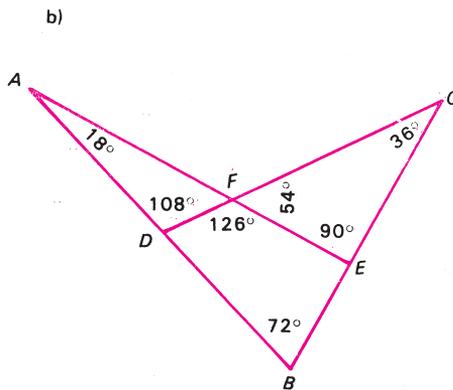
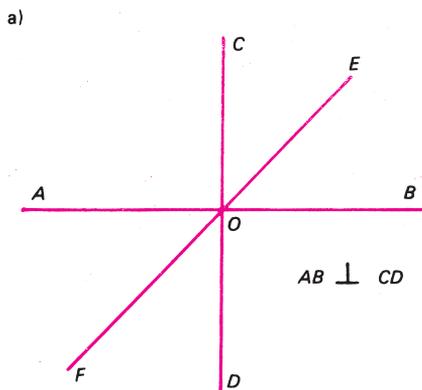


Fig. F 48

15. Calcula los ángulos que se indican en la figura F49.

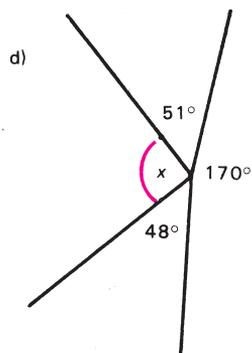
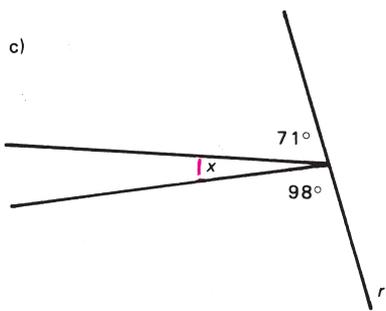
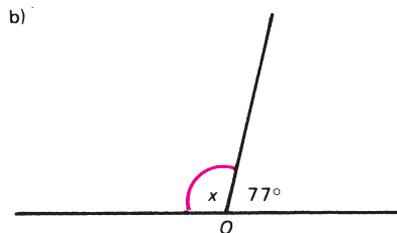
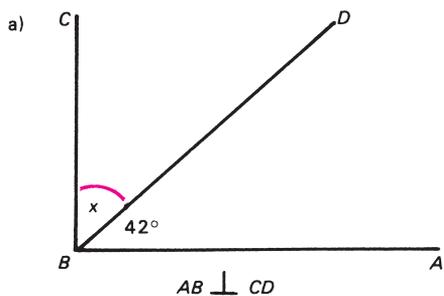


Fig. F 49

16. Tres de los ángulos de la figura F50 se pueden poner consecutivos a un lado de una recta. ¿Cuáles son? ¿Por qué?

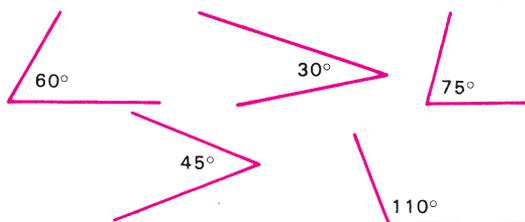


Fig. F 50

17. Cuatro de los ángulos de la figura F51 se pueden poner consecutivos alrededor de un punto. ¿Cuáles son? ¿Por qué?

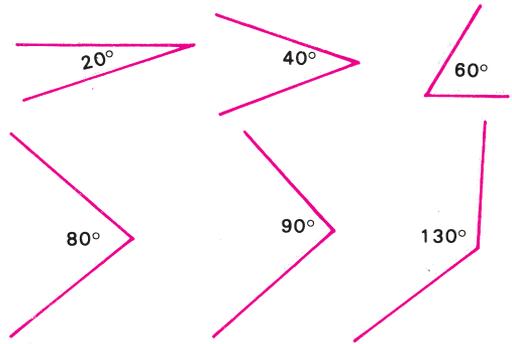


Fig. F 51

18. Calcula los ángulos interiores de los cuadriláteros de la figura F52.

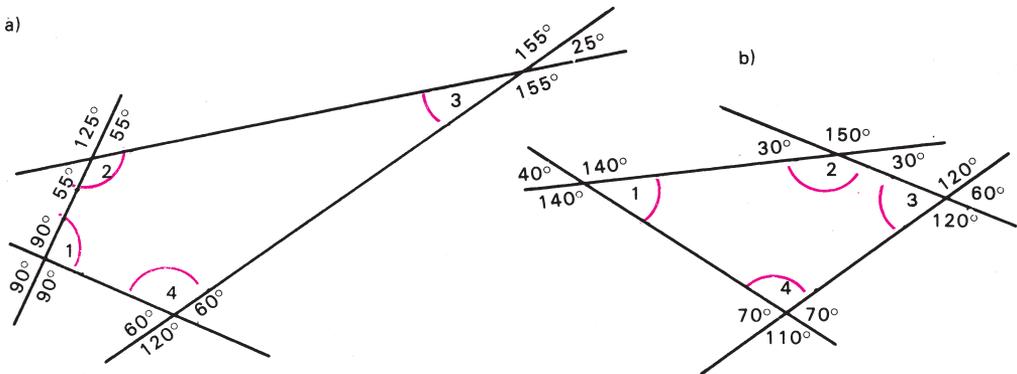


Fig. F 52

19. Observa la figura F53 en la que a y b son rectas que se cortan.

- a) ¿Cuál es la amplitud del ángulo α ? ¿Por qué?
 b) ¿Cuál es la amplitud del ángulo β ? ¿Por qué?

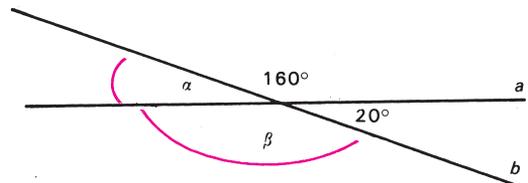


Fig. F 53

20. Encuentra todos los pares de ángulos adyacentes y opuestos por el vértice que aparecen en la figura F54.

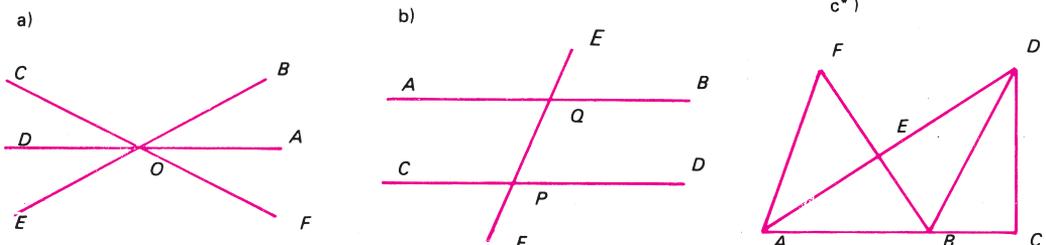


Fig. F 54

21. Calcula los ángulos denotados por letras en la figura F55.

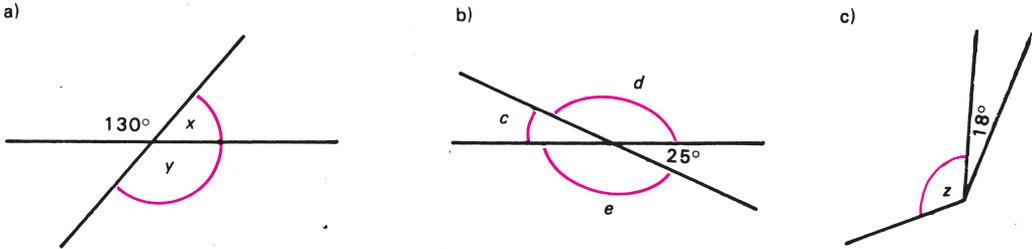


Fig. F 55

22. De un par de ángulos adyacentes uno es:
 a) agudo,
 b) obtuso,
 c) recto.
 ¿De qué tipo es el otro?
23. De un par de ángulos opuestos por el vértice uno es:
 a) agudo,
 b) obtuso,
 c) recto.
 ¿De qué tipo es el otro?
24. Los ángulos α y β son adyacentes. Completa la tabla de los valores de β a partir de los valores dados para α .

α	28°	74°	90°	115°	178°
β					

25. En la figura F56 aparecen dos rectas a y b que se cortan. Completa la tabla de los valores que faltan, conocidos valores para α .

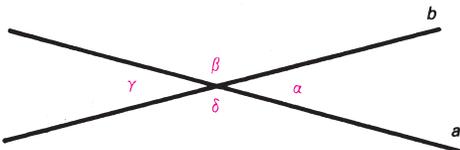


Fig. F 56

α	65°	110°	135°	160°
β				
γ				
δ				

26. Calcula los valores de los ángulos x , y , z de la figura F57.

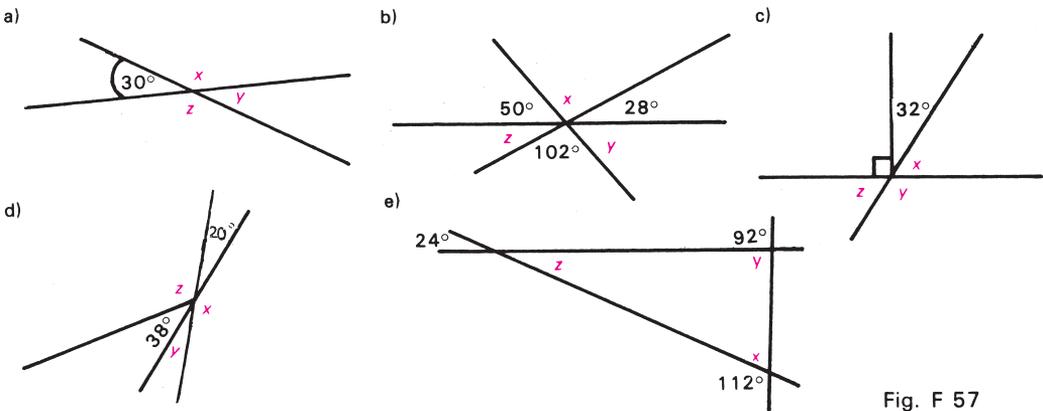


Fig. F 57

27. Construye dos ángulos que sumen 180° utilizando solo la regla. Fundamenta.
28. Construye dos ángulos iguales utilizando solo la regla. Fundamenta.
29. Fundamenta por qué dos ángulos agudos (obtusos) no pueden ser adyacentes.
30. Fundamenta por qué un ángulo agudo y uno obtuso no pueden ser opuestos por el vértice.
31. Argumenta mediante un ejemplo que las siguientes proposiciones son falsas.
- a) Si dos ángulos tienen un lado común, son adyacentes.
- b) Si dos ángulos tienen el vértice común, son opuestos por el vértice.
- 32* En la figura F58 se cumple que $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CBD$. Explica por qué en ese caso se cumple también que:

$$\sphericalangle ABE = \sphericalangle DBE$$

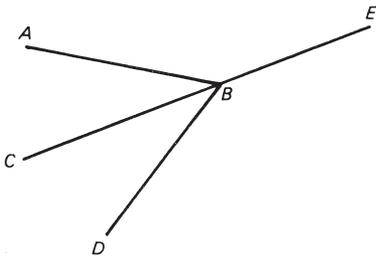


Fig. F 58

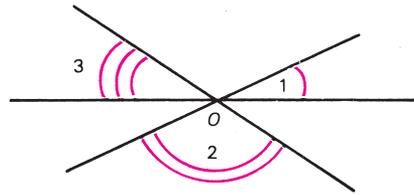


Fig. F 59

- 34* Traza dos ángulos adyacentes α y β y construye sus bisectrices con regla y compás. Comprueba con tu cartabón que dichas bisectrices forman un ángulo recto. Demuestra ese resultado.
- 35* Traza dos ángulos opuestos por el vértice α y β y construye sus bisectrices con regla y compás. Comprueba con tu regla que dichas bisectrices forman un ángulo llano. Demuestra ese resultado.

4. Ángulos entre paralelas

En cada ilustración de la figura F60 aparecen representadas dos rectas cortadas por otra recta que se denomina secante.

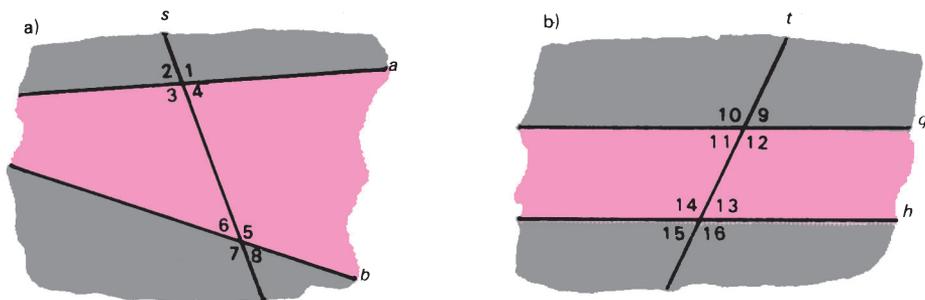


Fig. F 60

Observa que cuando una secante corta a dos rectas cualesquiera se forman **ocho ángulos**, cuatro en cada punto de intersección. Así, la recta s en la figura F60a, al cortar a las rectas a y b , forma los ángulos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8; y la recta t en la figura F 60 b, al cortar a las rectas g y h , forma los ángulos 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 y 16.

Observarás en la figura pares de ángulos ya conocidos:

Adyacentes (por ejemplo $\sphericalangle 1$ y $\sphericalangle 4$; $\sphericalangle 13$ y $\sphericalangle 14$).

Opuestos por el vértice (por ejemplo $\sphericalangle 5$ y $\sphericalangle 7$; $\sphericalangle 10$ y $\sphericalangle 12$).

Sin embargo, hay nuevos pares de ángulos que no conoces ni has establecido relaciones entre ellos, por ejemplo el $\sphericalangle 4$ y el $\sphericalangle 5$; el $\sphericalangle 10$ y el $\sphericalangle 14$, entre otros. En todos los casos son ángulos que se forman alrededor de puntos de intersección diferentes.

Para su estudio vamos a destacar primero un hecho:

Cuando dos rectas son cortadas por una secante, se forman dos regiones en el plano (fig. F61), una **interna** entre las dos rectas y otra **externa** exterior a las dos rectas.

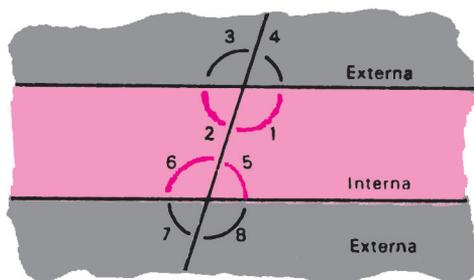


Fig. F 61

Se forman de ese modo 4 ángulos que quedan en la **región interna**, dibujados en color y 4 ángulos que quedan en la **región externa**, dibujados en gris.

Los ángulos 1, 2, 5 y 6 de la figura F61 son **internos** y los ángulos 3, 4, 7 y 8 son **externos**.

De los anteriores ángulos vamos a relacionar pares de ellos que son de interés estudiar, y que no son adyacentes ni opuestos por el vértice. Tenemos entonces:

Los ángulos que están situados al mismo lado de la secante y uno es interno y el otro externo, se llaman **correspondientes** (fig. F62).

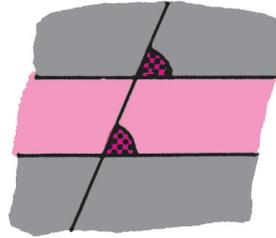


Fig. F 62

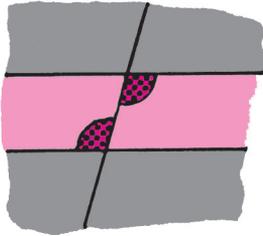


Fig. F 63

Los ángulos que están a distintos lados de la secante y ambos son internos o ambos son externos, se llaman **alternos** (fig. F63).

Los ángulos que están situados a un mismo lado de la secante y ambos son internos o ambos son externos, se llaman **conjugados** (fig. F64).

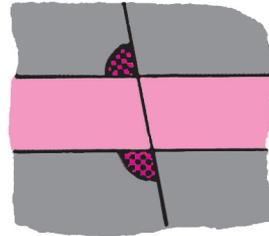


Fig. F 64

Ejemplo 1

Selecciona en la figura F65, todos los pares de ángulos que son:

a) correspondientes, b) alternos, c) conjugados.

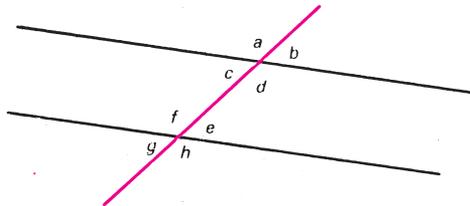


Fig. F 65

- a) Correspondientes: $\sphericalangle a$ y $\sphericalangle e$; $\sphericalangle d$ y $\sphericalangle h$; $\sphericalangle b$ y $\sphericalangle f$; $\sphericalangle c$ y $\sphericalangle g$.
- b) Alternos: $\sphericalangle a$ y $\sphericalangle g$; $\sphericalangle b$ y $\sphericalangle h$; $\sphericalangle c$ y $\sphericalangle e$; $\sphericalangle d$ y $\sphericalangle f$.
- c) Conjugados: $\sphericalangle b$ y $\sphericalangle g$; $\sphericalangle c$ y $\sphericalangle f$; $\sphericalangle a$ y $\sphericalangle h$; $\sphericalangle d$ y $\sphericalangle e$.

Los ángulos correspondientes, alternos y conjugados, cuando se forman **entre paralelas cortadas por una secante**, cumplen propiedades importantes que las vamos a enunciar como teoremas.

Teorema 1

Si dos rectas son paralelas los ángulos correspondientes son iguales.

Como se quiere probar que dos ángulos son iguales, una idea puede ser utilizar un movimiento.

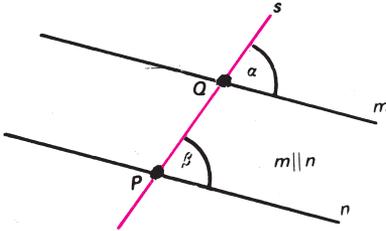


Fig. F 66

En este caso hay que probar que $\alpha = \beta$ (fig. F 66) y como por premisa $m \parallel n$, puede utilizarse una traslación de vector \overrightarrow{PQ} mediante la cual la imagen de β es α .

La demostración puede resumirse de la siguiente forma:

- La imagen de P es Q (la traslación es de vector \overrightarrow{PQ}).
- La imagen de n es m (la única paralela a n que pasa por Q es m).
- La imagen de s es ella misma (s es paralela al vector \overrightarrow{PQ}).

Luego la imagen de β es α y se cumple que $\alpha = \beta$.

Lo mismo que se hizo con este par de ángulos correspondientes puede hacerse con otra pareja cualquiera, luego es válido el teorema 1.

El recíproco de este teorema es una proposición verdadera que la vamos a enunciar como teorema y demostrar.

Teorema 2

Si dos ángulos correspondientes son iguales entonces las rectas que los forman son paralelas.

Ahora lo que se quiere probar es que $AB \parallel CD$, sabiendo que $\alpha = \beta$ (fig. F 67). De nuevo, como se sabe que hay ángulos iguales, se puede intentar utilizar un movimiento que transforme uno en otro.

En este caso, por la traslación de vector \overrightarrow{PQ} sucede que:

El vértice P de β se transforma en el vértice Q de α (la traslación es de vector \overrightarrow{PQ}).

El lado PM de β se transforma en el lado QM de α (MN es paralela al vector \overrightarrow{PQ}).

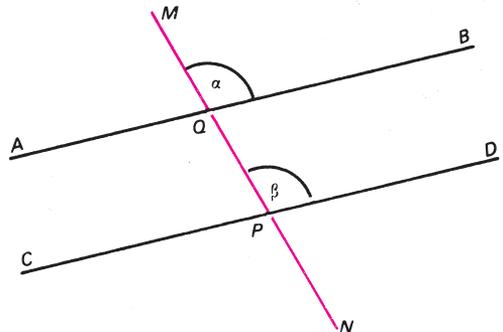


Fig. F 67

El lado PD de β se tiene que transformar en el lado QB de α pues los ángulos son iguales, luego, $PD \parallel QB$ ($CD \parallel AB$) pues la imagen de una recta no paralela al vector de traslación es otra paralela a ella.

Ejemplo 2

En la figura F68, $m \parallel n$. Calcula los valores de los ángulos x , y y z a partir de los valores dados en la figura. Argumenta tu respuesta.

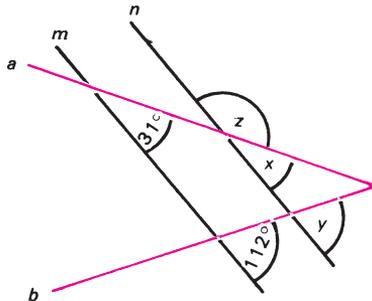


Fig. F 68

Como $m \parallel n$ y a es una secante, $\sphericalangle x = 31^\circ$ por correspondientes.

Análogamente: $\sphericalangle y = 112^\circ$ por correspondientes entre las paralelas m y n y la secante b .

$\sphericalangle z + \sphericalangle x = 180^\circ$ por adyacentes.

$$\sphericalangle z = 180^\circ - 31^\circ$$

$$\sphericalangle z = 149^\circ$$

Teorema 3

Si dos rectas son paralelas los ángulos alternos son iguales.

Una vía para demostrar este teorema es apoyarse en la propiedad de los ángulos correspondientes y de los opuestos por el vértice.

Sea $PQ \parallel RT$ y AB secante (fig. F69). Hay que probar que $\alpha = \beta$.

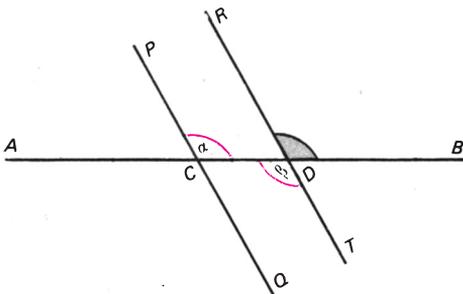


Fig. F 69

Demostración

$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle RDB$ por correspondientes entre paralelas.

$\sphericalangle RDB = \sphericalangle \beta$ por opuestos por el vértice.

$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta$ por ser iguales a un mismo ángulo.

Otra vía para demostrar el teorema 3 es usando movimientos. En este caso se puede aplicar una simetría de centro en el punto medio del segmento CD , o la composición de una traslación de vector \vec{CD} y una simetría de centro D .

Teorema 4

Si dos rectas son paralelas los ángulos conjugados suman 180° .

De nuevo, vamos a utilizar como vía para la demostración otros teoremas ya conocidos

En la figura F70, $m \parallel n$ y a es secante.
Hay que probar que $\alpha + \beta = 180^\circ$.

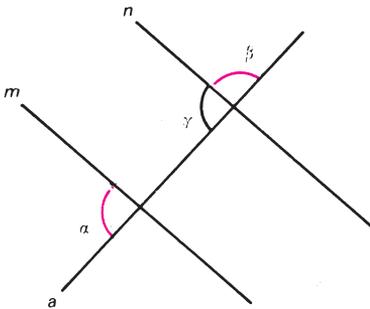


Fig. F 70

Demostración

- $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \gamma$ por correspondientes entre paralelas.
- $\sphericalangle \gamma + \sphericalangle \beta = 180^\circ$ por adyacentes.
- Luego : $\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta = 180^\circ$ sustituyendo.

De nuevo puedes utilizar movimientos para demostrarlo. Basta utilizar una traslación que transforme α en γ y entonces resultan γ y β adyacentes por lo que suman 180° .

Ejemplo 3

En la figura F71 se cumple que $PQ \parallel RT$ y SU es secante. Demuestra que $\alpha + \beta = 180^\circ$.

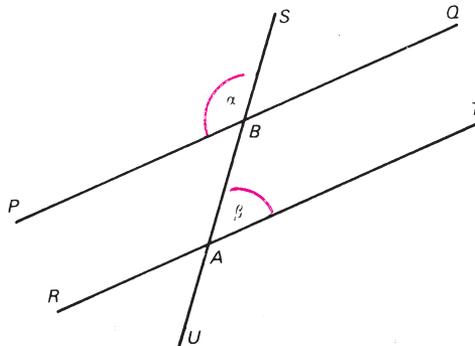


Fig. F 71

Existen diferentes vías para demostrarlo. Vamos a ilustrar dos de ellas.

Demostración

$\sphericalangle \alpha + \sphericalangle RAU = 180^\circ$ por conjugados.
 $\sphericalangle RAU = \sphericalangle \beta$ por opuestos por el vértice.
 Luego: $\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta = 180^\circ$.

Demostración

$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle UAT$ por alternos.
 $\sphericalangle UAT + \sphericalangle \beta = 180^\circ$ por adyacentes.
 Luego: $\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta = 180^\circ$.

Habrás observado que los ángulos del ejemplo 3 no son correspondientes, ni alternos, ni conjugados. Debes saber que en general se cumple que todos los ángulos que se forman entre paralelas, que no son opuestos por el vértice, ni correspondientes, ni alternos, tienen la propiedad de que suman 180° .

Los recíprocos de los teoremas de los ángulos alternos y conjugados son proposiciones verdaderas que no vamos a demostrar en este libro, pero sí se enuncian a continuación:

- Si dos ángulos alternos son iguales entonces las rectas que los forman son paralelas.
- Si dos ángulos conjugados suman 180° entonces las rectas que los forman son paralelas.

Como un resumen de lo que has estudiado sobre pares de ángulos y que te facilitará el trabajo con ellos, debes saber que:

Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, se forman ocho ángulos para los que pueden suceder dos posibilidades:

1. Si uno es recto, todos los demás también son rectos (fig. F72).

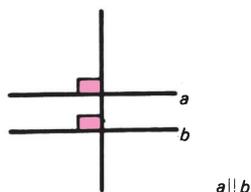


Fig. F 72

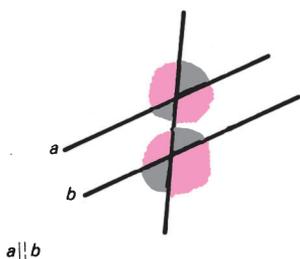


Fig. F 73

2. Si uno no es recto, entonces se forman ángulos agudos y obtusos (fig. F73) y

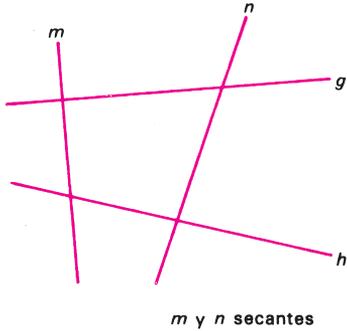
Todos los agudos (obtusos) son iguales.

Si uno es agudo y otro obtuso, suman 180° .

Ejercicios (epígrafe 4)

1. Haz un resumen en tu libreta de todos los pares de ángulos correspondientes, alternos y conjugados de la figura F74. Denótalos mediante números.

a)



b)

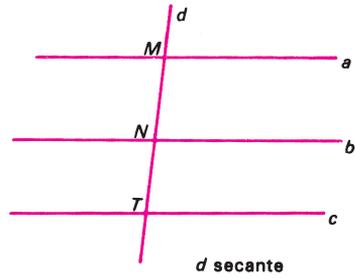
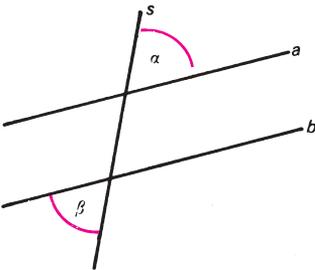


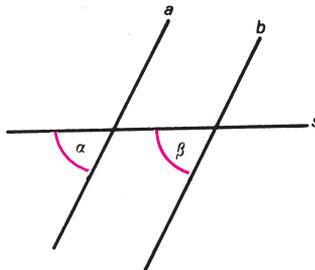
Fig. F 74

2. En la figura F74b, considera que $a \parallel b \parallel c$. Escoge una de las parejas de ángulos correspondientes (alternos) que se forman y di mediante qué movimientos uno es la imagen del otro.
3. En la figura F75, $a \parallel b$ y s es una secante y $\sphericalangle \alpha = 42^\circ$. ¿Cuál es la amplitud del ángulo β ? ¿Por qué?

a)



b)



c)

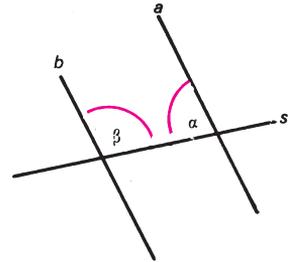


Fig. F 75

4. Dadas las rectas m y n ($m \parallel n$) y t secante (fig. F76), fundamenta que:

a) $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$

b) $\sphericalangle 4 = \sphericalangle 6$

c) $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 6$

d) $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 7 = 180^\circ$

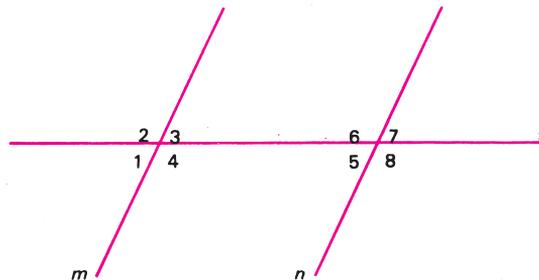


Fig. F 76

5. En la figura F76 di si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. En el caso de las falsas, argúentalas.
- $\sphericalangle 3$ y $\sphericalangle 7$ son correspondientes.
 - $\sphericalangle 1$ y $\sphericalangle 6$ son alternos.
 - $\sphericalangle 5$ y $\sphericalangle 7$ son adyacentes.
 - $\sphericalangle 2$ y $\sphericalangle 7$ son conjugados.
6. Argumenta por qué son falsas las siguientes proposiciones.
- Los pares de ángulos correspondientes siempre son iguales.
 - Los pares de ángulos conjugados suman 180° .
 - Los pares de ángulos alternos entre paralelas suman 180° .
7. En la figura F77 las rectas dadas son paralelas. Calcula los ángulos denotados por letras.

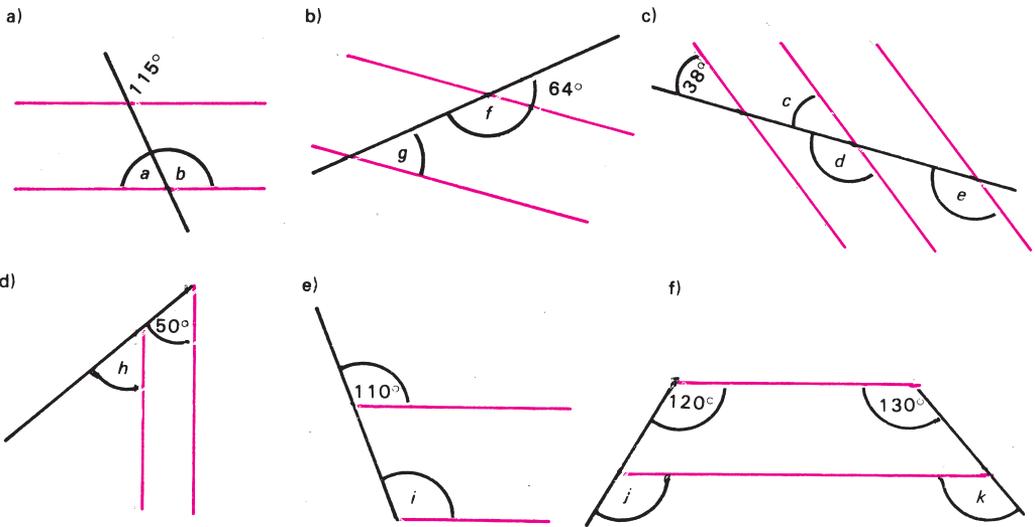


Fig. F 77

8. En la figura F78, denota y calcula todos los ángulos a partir del ángulo dado. Ten en cuenta que las rectas son paralelas.

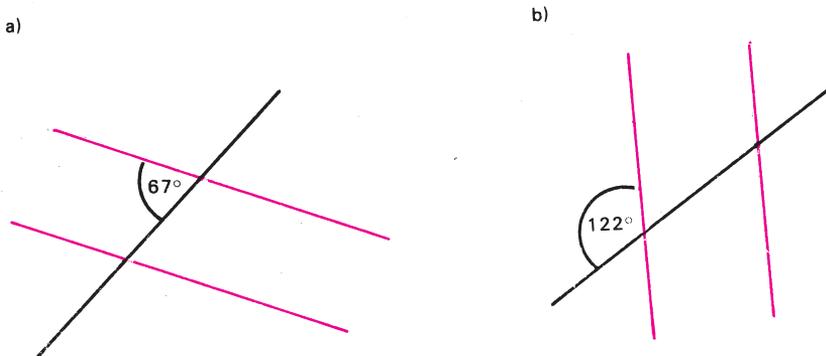
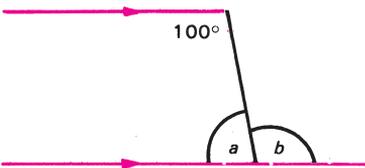


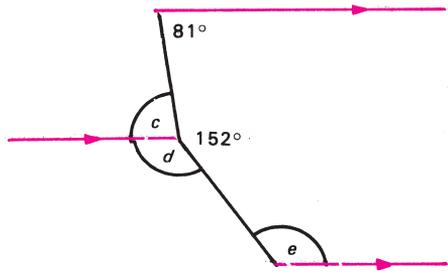
Fig. F 78

9. En la figura F79 las saetas indican las paralelas. Calcula los ángulos denotados por letras.

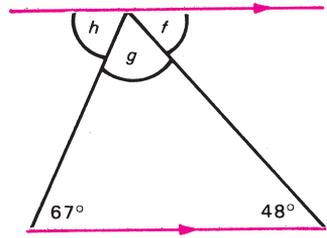
a)



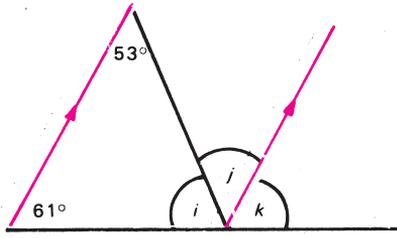
b)



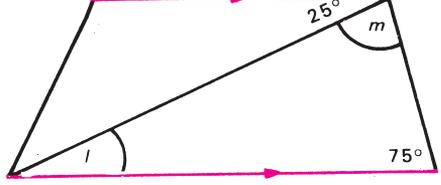
c)



d)



e)



f)

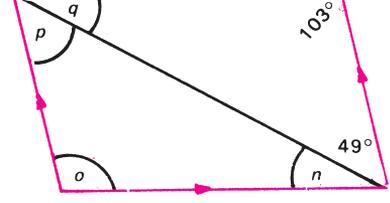


Fig. F 79

10. En la figura F80, $AB \parallel DE$. Calcula los ángulos ABF , AED , EFD .

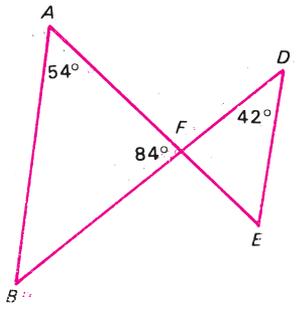


Fig. F 80

11. En la figura F81, $ABCD$ es un paralelogramo. Calcula los ángulos 1, 2 y 3.

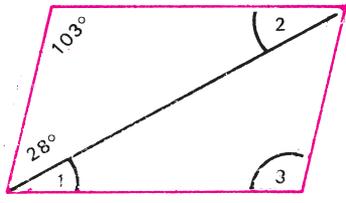


Fig. F 81

12. Fundamenta por qué las rectas a y b son paralelas (fig. F82).

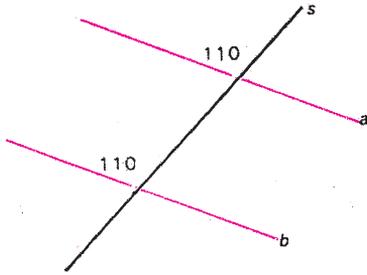


Fig. F 82

13. Fundamenta por qué las rectas m y n no son paralelas (fig. F83).

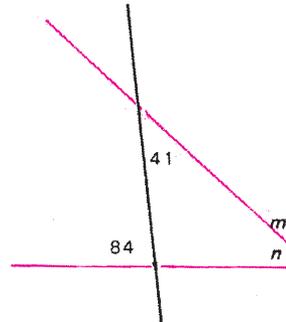


Fig. F 83

14. En la figura F84 fundamenta que $h \parallel g$.

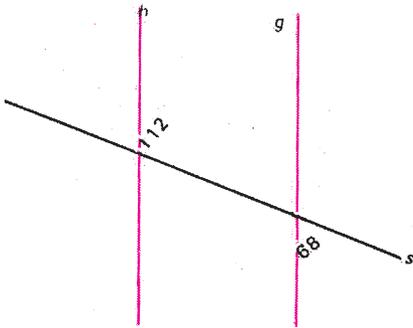


Fig. F 84

15. Fundamenta que las rectas p y q no son paralelas (fig. F85).

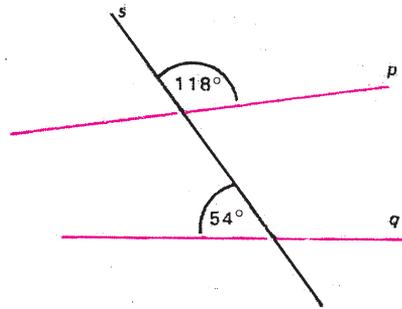
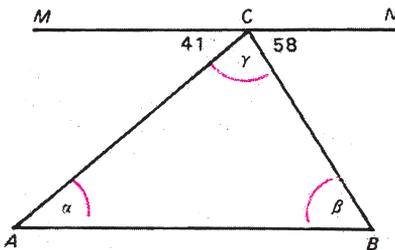


Fig. F 85

16. Demuestra que en un paralelogramo los ángulos consecutivos suman 180° y los opuestos son iguales.

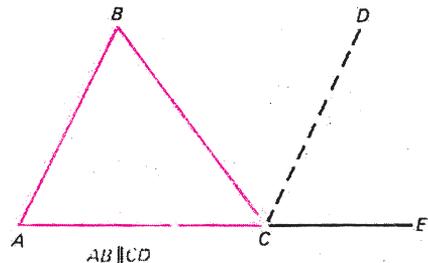
17. En la figura F86 demuestra que $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.



$MN \parallel AB$

Fig. F 86

18. En la figura F87 demuestra que: $\sphericalangle A + \sphericalangle B = \sphericalangle BCE$.



$AB \parallel CD$

Fig. F 87

19.* En la figura F88 aparecen dos ángulos α y β de lados respectivamente paralelos. Demuestra que son iguales.

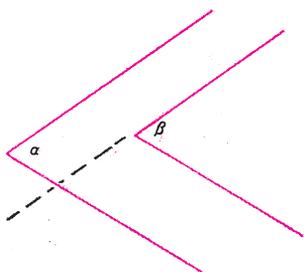


Fig. F 88

20.* En la figura F89 aparecen dos ángulos α y β de lados respectivamente paralelos. Demuestra que suman 180° .

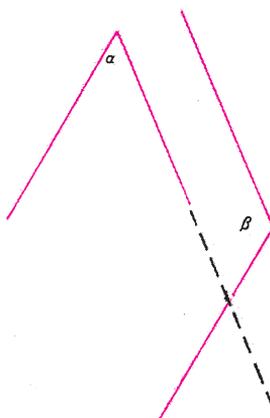


Fig. F 89

21. En la figura F90, $m \parallel n$ y α y β son correspondientes.

a) Traza las bisectrices de α y β .

b*) Demuestra que las bisectrices también son paralelas.

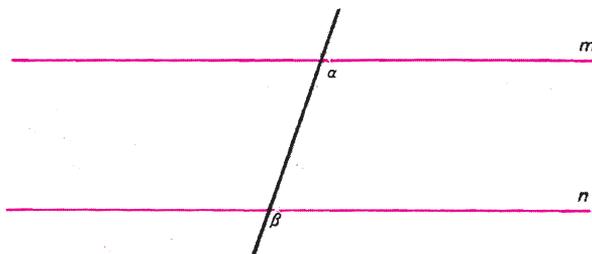


Fig. F 90

5. Triángulos

Clasificación de los triángulos

De quinto grado recordarás al triángulo como un ejemplo de polígono. Podemos definirlo de la siguiente forma:

Definición 1

Un triángulo es un polígono de tres lados.

Un triángulo tiene entonces tres lados, tres vértices y tres ángulos interiores (fig. F91).

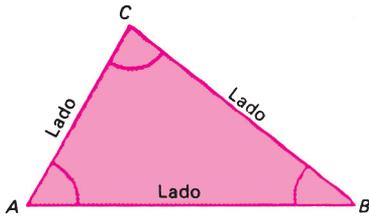


Fig. F 91

Lados: \overline{AB} ; \overline{BC} y \overline{AC} .
 Vértices: A ; B y C .
 Ángulos interiores: $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ y $\sphericalangle C$.

Según la longitud de sus lados ya conoces que los triángulos se pueden clasificar en:

Escalenos si tienen sus tres lados desiguales.

Isósceles si tienen dos lados iguales.

Equiláteros si tienen tres lados iguales.

En la figura F92 se ha representado mediante un diagrama de conjuntos los triángulos clasificados **según sus lados**.

Observa que el conjunto de los triángulos equiláteros es un **subconjunto** del de los isósceles.

Los triángulos también se pueden clasificar **según sus ángulos**. En la figura F93 se resume esa clasificación.



Fig. F 92

Proporciones		
Acutángulo	Rectángulo	Obtusángulo
Sus tres ángulos agudos	Un ángulo recto	Un ángulo obtuso

Fig. F 93

Es fácil comprender, por ejemplo, que si un triángulo es acutángulo, no puede ser ni rectángulo ni obtusángulo.

Así se tiene que en el conjunto de los triángulos, el conjunto de los acutángulos, de los rectángulos y de los obtusángulos, no tienen elementos comunes como se ilustra en la figura F94.

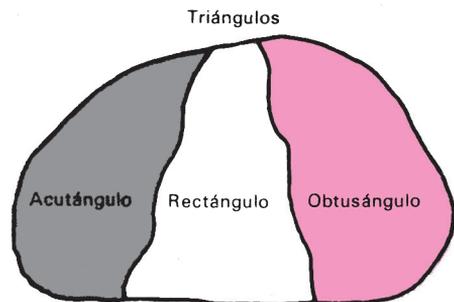


Fig. F 94

Los lados o ángulos de los triángulos isósceles y de los rectángulos reciben nombres especiales que necesitas conocer.

En todo triángulo **isósceles**, al lado desigual se le llama **base** y a los ángulos que tienen común la base se les llama **ángulos bases**. El ángulo que se opone a la base se llama **ángulo vertical** (fig. F95).

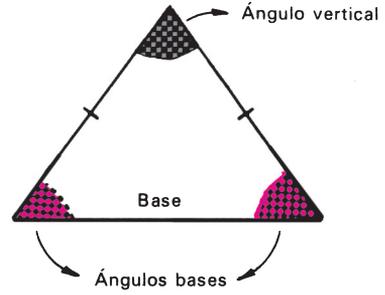


Fig. F 95

En un triángulo **rectángulo**, el lado que se opone al ángulo recto (fig. F96) se denomina **hipotenusa** y los otros dos lados se denominan **catetos**.

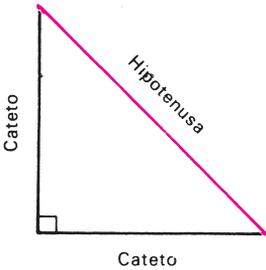


Fig. F 96

Relaciones entre lados y ángulos de un triángulo

En la figura F97 se ha representado un triángulo isósceles ABC al que se le ha trazado su eje de simetría CD .

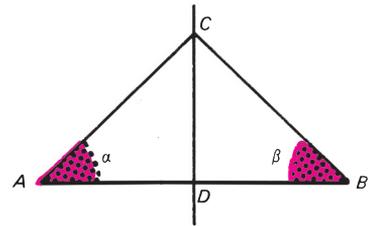


Fig. F 97

Los lados \overline{AC} y \overline{BC} son iguales, pues el triángulo es isósceles. Los ángulos α y β también son iguales pues uno es la imagen del otro por la reflexión de eje CD . Luego, en un triángulo isósceles **los ángulos que se oponen a los lados iguales también son iguales**.

Este resultado se puede generalizar y formular como un teorema.

Teorema 1

En todo triángulo, a lados iguales se oponen ángulos iguales.

El recíproco de este teorema es también un teorema, pues es una proposición verdadera.

Teorema 2

En todo triángulo, a ángulos iguales se oponen lados iguales.

También existen relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo que no tienen lados iguales. Observa en la figura F98 que se ha trazado un triángulo

PQR escaleno de lados \overline{PQ} , \overline{QR} y \overline{PR} todos desiguales entre sí ($\overline{PQ} > \overline{QR} > \overline{PR}$). Los ángulos que se oponen a esos lados son:

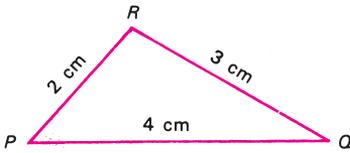


Fig. F 98

lado	ángulo que se opone
\overline{PQ} →	$\sphericalangle R$
\overline{QR} →	$\sphericalangle P$
\overline{PR} →	$\sphericalangle Q$

Puedes comprobar midiendo que también se cumple que $\sphericalangle R > \sphericalangle P > \sphericalangle Q$. Es decir que **a mayor lado se opone mayor ángulo**.

Esto también se puede enunciar como un teorema que no vamos a demostrar en este libro.

Teorema 3

En todo triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo.

De este teorema se infiere claramente que si se ordenan de mayor a menor (o viceversa) los lados de un triángulo, los ángulos que se le oponen quedan ordenados de igual forma como se ilustró en la figura F 98.

Si $\overline{PQ} > \overline{QR} > \overline{PR}$ entonces $\sphericalangle R > \sphericalangle P > \sphericalangle Q$.

El recíproco de este teorema 3 es también un teorema.

Teorema 4

En todo triángulo a mayor ángulo se opone mayor lado.

Ejemplo 1

En la figura F99 aparecen representados triángulos y algunas de sus medidas. Ordena los lados y ángulos de mayor a menor (si son iguales acláralo) y argumenta tu respuesta.

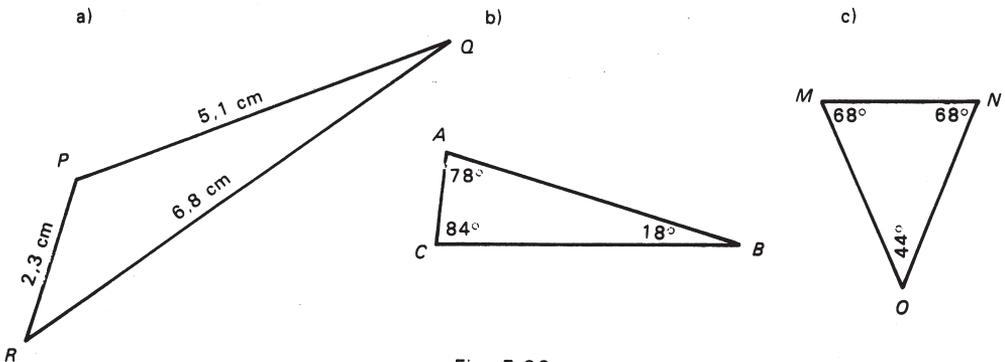


Fig. F 99

a) $\overline{QR} > \overline{QP} > \overline{PR}$

$\sphericalangle P > \sphericalangle R > \sphericalangle Q$ a mayor lado mayor ángulo.

b) $\sphericalangle C > \sphericalangle A > \sphericalangle B$.

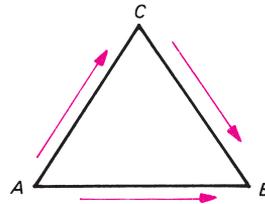
$\overline{AB} > \overline{BC} > \overline{AC}$ a mayor ángulo mayor lado.

c) $\sphericalangle M = \sphericalangle N > \sphericalangle O$.

$\overline{ON} = \overline{OM} > \overline{MN}$ $\overline{ON} = \overline{OM}$, porque a ángulos iguales se oponen lados iguales y a mayor ángulo mayor lado.

Desigualdad triangular

Si observas la figura F100 te darás cuenta que si quieres ir desde A hasta B , el camino más corto es seguir el segmento AB . Si caminas primero desde A hasta C y después desde C hasta B , el recorrido es mucho más largo. Esto mismo te sucederá si tratas de ir de A hasta C , o de C hasta B .



Esta idea la podemos expresar con más claridad si se escribe que en el triángulo ABC :

$$\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{CB}$$

$$\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$$

$$\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}$$

Esta es una propiedad muy importante de los triángulos que se conoce con el nombre de **desigualdad triangular** y que se puede expresar como un teorema:

Teorema 5

En todo triángulo, cada lado es menor que la suma de los otros dos lados.

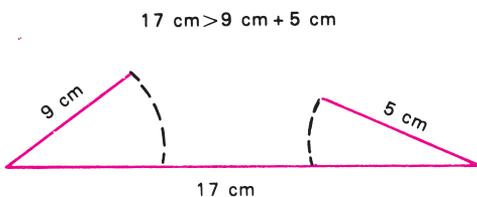


Fig. F 101

Este teorema es muy importante, pues si tres segmentos no cumplen esta condición, con ellos no se puede formar un triángulo. Es decir, **si uno de ellos es mayor o igual que la suma de los otros dos, entonces no pueden formar un triángulo** (fig. F101).

Ejemplo 2

¿Puedes formar triángulos con las varillas de la figura F102? Argumenta tu respuesta.

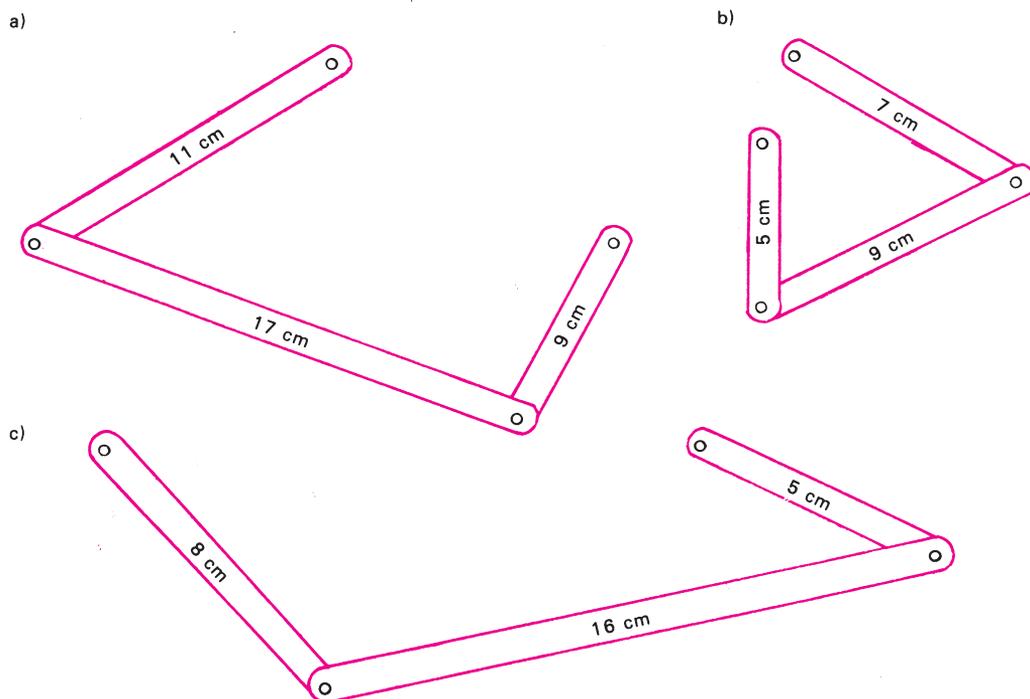


Fig. F 102

a) Sí se puede formar, pues:

$$\begin{aligned}11 &< 17 + 9 \\17 &< 11 + 9 \\9 &< 11 + 17\end{aligned}$$

b) Sí se puede formar, pues:

$$\begin{aligned}5 &< 7 + 9 \\9 &< 5 + 7 \\7 &< 9 + 5\end{aligned}$$

c) No se puede formar, pues $16 > 8 + 5$.

Observa que para poder afirmar que **sí se puede formar** hay que garantizar que **cada lado es menor que la suma de los otros dos**, pero para afirmar que **no se puede formar** basta que **un lado deje de cumplir la desigualdad triangular**.

Teoremas sobre los ángulos de un triángulo

Cuando estudiaste la clasificación de los triángulos pudiste seguro apreciar que un triángulo puede tener, como se observa en la figura F103, sus **tres ángulos agudos** (acutángulo), sin embargo **un sólo ángulo recto** (rectángulo), o **un sólo ángulo obtuso** (obtusángulo).

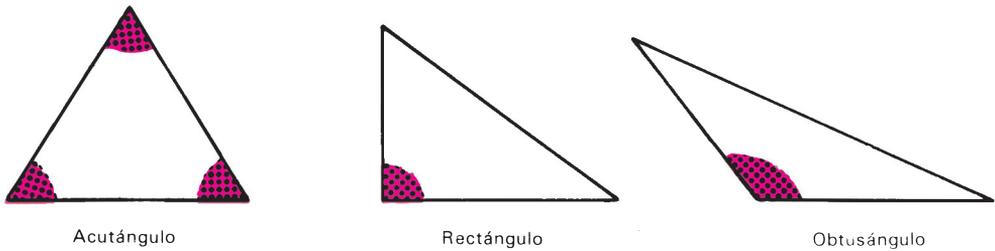


Fig. F 103

¿Te has preguntado alguna vez por qué sucede esto?

La respuesta a esta pregunta la puedes encontrar si mides los ángulos interiores de cada uno de esos triángulos y calculas la suma de sus amplitudes. Puedes comprobar midiendo que la suma de los tres ángulos de un triángulo es aproximadamente 180° . Esta propiedad, muy importante de los ángulos interiores de un triángulo, se puede enunciar como un teorema:

Teorema 6

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° .

Para demostrar este teorema vamos a apoyarnos en una figura (fig. F104).

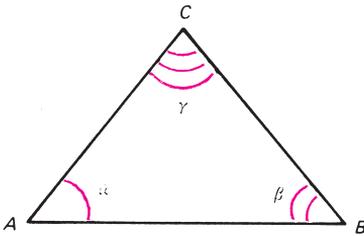


Fig. F 104

Sea ABC un triángulo y α , β y γ sus tres ángulos interiores.

Hay que probar que:

$$\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta + \sphericalangle \gamma = 180^\circ$$

Observa que si los pudiéramos llevar a la posición de **consecutivos a un lado de una recta**, tenemos el problema resuelto pues ellos forman un ángulo llano y por tanto suman 180° . Para ello observa en la figura F105 que podemos utilizar una **trasiación de vector \vec{AB}** .

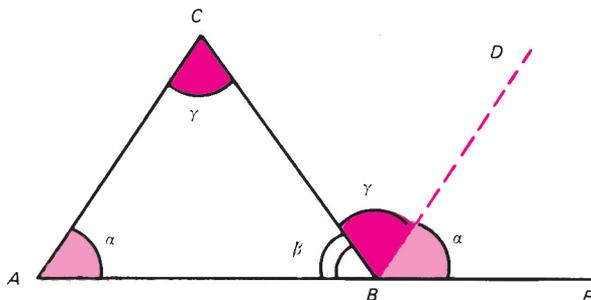


Fig. F 105

Por esa traslación el $\sphericalangle EBD$ es la imagen del ángulo α , luego: $\sphericalangle EBD = \sphericalangle \alpha$.

La semirrecta BD es paralela al lado \overline{AC} del triángulo pues es la imagen de la semirrecta AC por esa traslación. Luego $\sphericalangle \gamma = \sphericalangle CBD$ por **alternos entre paralelas**.

Tenemos entonces alrededor del punto B , a un lado de AE , los ángulos β , CBD y DBE que son **consecutivos a un lado de una recta**. Luego:

$$\sphericalangle \beta + \sphericalangle CBD + \sphericalangle DBE = 180^\circ.$$

Pero como $\sphericalangle CBD = \sphericalangle \gamma$ y $\sphericalangle EBD = \sphericalangle \alpha$, entonces:

$$\sphericalangle \beta + \sphericalangle \gamma + \sphericalangle \alpha = 180^\circ.$$

Reordenándolos se tiene que:

$$\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta + \sphericalangle \gamma = 180^\circ.$$

Podemos organizar la demostración de la siguiente forma:

Demostración

En el triángulo ABC (fig. F105).

- De la traslación de vector \overrightarrow{AB} resulta:
 $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle EBD$ y $AC \parallel BD$.
- Luego $\sphericalangle \gamma = \sphericalangle CBD$ por alternos entre paralelas.
- Como $\sphericalangle EBD + \sphericalangle DBC + \sphericalangle \beta = 180^\circ$ por consecutivos a un lado de una recta.
- Entonces $\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta + \sphericalangle \gamma = 180^\circ$.

De la demostración anterior puedes concluir otra relación importante. Observa en la figura F105 que:

$$\sphericalangle EBC = \sphericalangle \alpha + \sphericalangle \gamma$$

Un ángulo como el $\sphericalangle EBC$ que es **adyacente** a un ángulo interior se denomina **ángulo exterior del triángulo**, y podrás observar que es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a él.

Esto se puede generalizar y enunciar como un teorema.

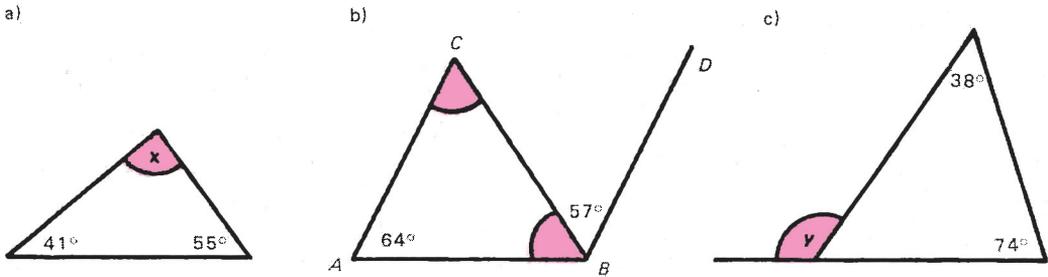
Teorema 7

En todo triángulo, cada ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a él.

Estos dos teoremas los vas a utilizar mucho en tus estudios sobre geometría.

Ejemplo 3

**Calcula los ángulos destacados en la figura F106.
Argumenta tu respuesta.**



$AC \parallel BD$

Fig. F 106

a) $x + 41^\circ + 55^\circ = 180^\circ$ por suma de los ángulos interiores de un triángulo.
 $x = 180^\circ - 41^\circ - 55^\circ$
 $x = 84^\circ$

b) $\sphericalangle C = \sphericalangle CBD$ por alternos entre paralelas.
 $\sphericalangle C = 57^\circ$
 $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ$ por suma de ángulos interiores.
 $\sphericalangle B = 180^\circ - 64^\circ - 57^\circ$
 $\sphericalangle B = 59^\circ$

c) $\sphericalangle y = 38^\circ + 74^\circ$ por ser un ángulo exterior.
 $\sphericalangle y = 112^\circ$

Ejemplo 4

Fundamenta por qué un triángulo puede tener como máximo un ángulo recto o un ángulo obtuso.

Para fundamentar esta proposición hay que basarse en el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, pues como los tres tienen que sumar 180° , si hay uno solo que es mayor o igual que 90° , los otros tienen que ser agudos.

Ejercicios (epígrafe 5)

1. En la figura F107 están representados, por números, diferentes triángulos. Clasifícalos según sus lados y según sus ángulos. Si es necesario utiliza el compás para comparar los lados y el semicírculo o el cartabón para los ángulos.

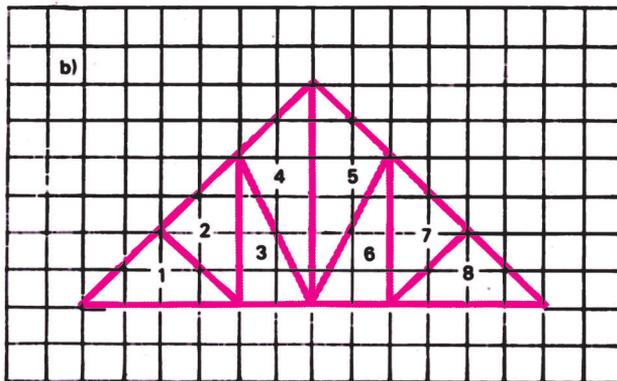
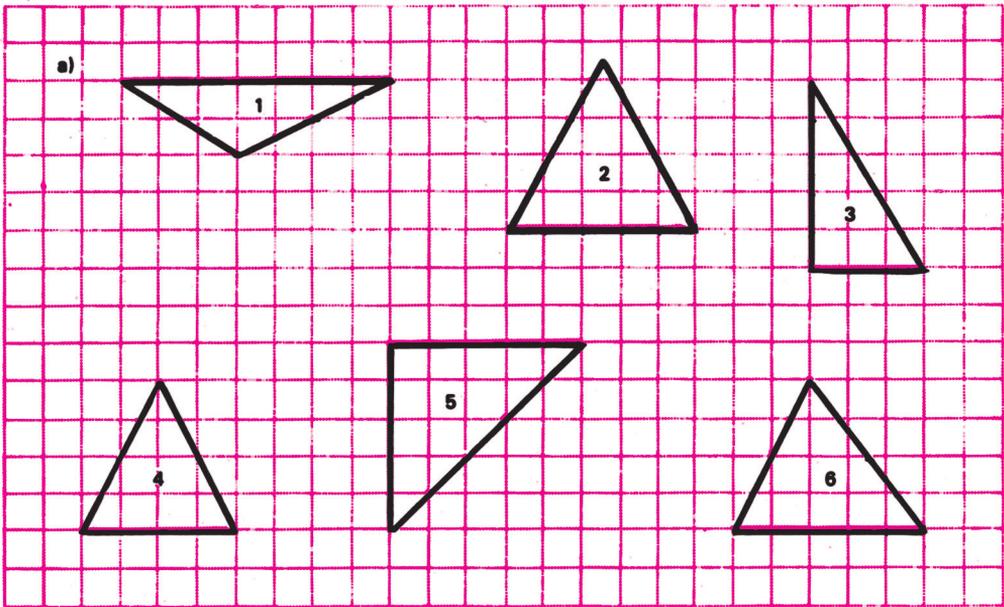


Fig. F 107

2. Dibuja un triángulo escaleno que sea rectángulo.
3. Dibuja un triángulo rectángulo que sea isósceles.
4. Traza en un sistema de coordenadas los puntos $A(2;1)$ y $B(6;1)$. Determina tres puntos C , D y E de modo que:
 - a) El triángulo ABC sea rectángulo e isósceles.
 - b) El triángulo ABD sea isósceles y acutángulo.
 - c) El triángulo ABE sea obtusángulo y escaleno.
 En cada caso di cuáles son las coordenadas de C , D y E
5. Copia en tu libreta la siguiente tabla y complétala diciendo sí, si un triángulo puede clasificarse a la vez según indican las filas y las columnas de la tabla y no, en caso de no ser posible.

Triángulo	Escaleno	Isósceles	Equilátero
Acutángulo			
Rectángulo			
Obtusángulo			

6. Construye (con regla y compás) los siguientes triángulos isósceles en los que la base \overline{AB} mide 2,8 cm.

- a) $\overline{AC} = 3$ cm b) $\overline{AC} = 2,8$ cm c) $\overline{BC} = 4$ cm

Mide los ángulos interiores en cada caso. ¿A qué conclusión llegas?

7. Calcula el lado de un triángulo equilátero cuyo perímetro es 72,3 m.

8. Calcula los lados desconocidos de un triángulo isósceles cuyo perímetro es 1 225 dm y su base mide 37,5 m.

9. a) Demuestra el siguiente teorema:

Si un triángulo es equilátero, entonces también es isósceles.

b) Formula el recíproco y pon un ejemplo que demuestre que no es verdadero.

10. Pon ejemplos que demuestren que las siguientes proposiciones son falsas:

- a) Si un triángulo es escaleno, entonces es obtusángulo.
 b) Si un triángulo es obtusángulo, entonces es escaleno.
 c) Si un triángulo es rectángulo, entonces es isósceles.
 d) Si un triángulo es isósceles, entonces es rectángulo.

11. De un triángulo ABC se sabe que sus lados miden:

a) $\overline{AB} = 4,8$ cm; $\overline{BC} = 3,4$ cm; $\overline{AC} = 5$ cm.

b) $\overline{AB} = \frac{11}{4}$ cm; $\overline{BC} = 2,75$ cm; $\overline{AC} = 2$ cm.

Ordena sus ángulos interiores de menor a mayor y fundamenta tu respuesta. En cada inciso clasifica el triángulo según sus lados.

12. De un triángulo ABC se sabe que sus ángulos miden:

a) $\sphericalangle A = 58,3^\circ$; $\sphericalangle B = 61,4^\circ$; $\sphericalangle C = 60,3^\circ$.

b) $\sphericalangle A = 102,4^\circ$; $\sphericalangle B = 38,8^\circ$; $\sphericalangle C = 38,8^\circ$.

Ordena sus lados de menor a mayor y fundamenta tu respuesta. Clasifica el triángulo según sus lados y ángulos.

13. ¿Por qué se puede afirmar que en un triángulo rectángulo, la hipotenusa es el lado mayor?

14. ¿Por qué en un triángulo obtusángulo hay siempre un lado mayor que los otros dos? ¿Cuál es ese lado?

15. Fundamenta por qué un triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales.
 16. Fundamenta por qué un triángulo equilátero tiene sus tres ángulos iguales.
 17. Di si es posible formar triángulos con tres segmentos que miden respectivamente:

- a) 10, 15 y 6 cm b) 14, 9 y 5 cm c) 8, 11 y 20 cm
 d) 12, 11 y 10 cm e) 1, 6 y 7 cm f) 16, 20 y 14 cm

Explica tu respuesta en cada caso.

18. Copia la siguiente tabla en tu libreta y complétala. Escribe en los espacios en blanco longitudes de segmentos que cumplan la desigualdad triangular.

Lados del triángulo			Control mediante desigualdad triangular		
a	b	c	$c < a + b$	$b < a + c$	$a < b + c$
9,2 cm	7,5 cm				
3,8 cm		9,8 cm			
	1,5 cm	8,7 cm			

19. En la figura F108 se han representado cuatro segmentos con sus longitudes. Escoge todos los posibles tríos de segmentos con los que se pueda formar un triángulo. Si no seleccionas algún trío, fundamenta por qué.

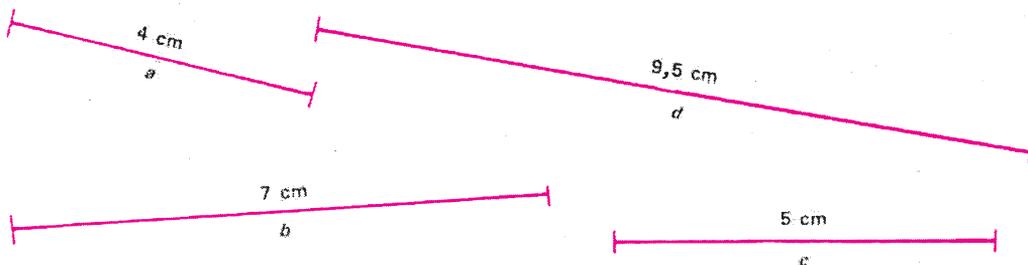


Fig. F 108

20. Traza un segmento $\overline{AC} = 7$ cm y usando regla y compás construye:
 a) Un paralelogramo $ABCD$ con los lados iguales de longitudes de 3 cm y 5 cm respectivamente.
 b) Un trapecioide simétrico $ABCD$ con los lados iguales de longitudes de 3 cm y 5 cm respectivamente.
 ¿Se hubieran podido construir si los lados iguales hubieran medido 3 cm y 4 cm respectivamente? ¿Por qué?
 21. Calcula los ángulos denotados por letras en la figura F109. Fundamenta.

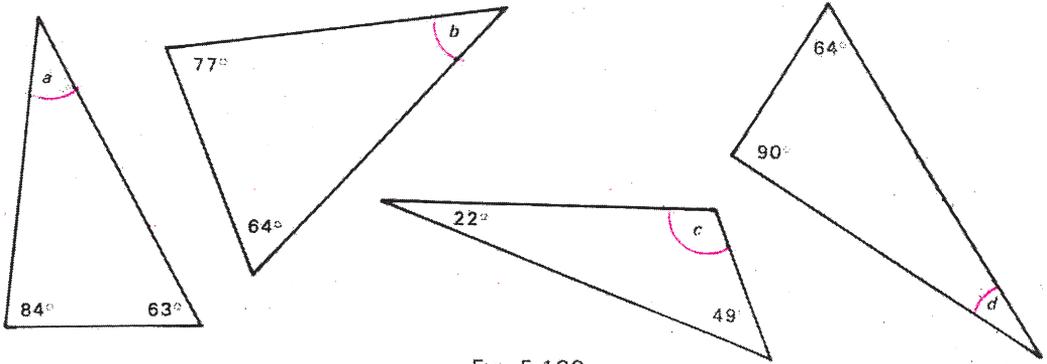


Fig. F 109

22. Calcula el tercer ángulo interior de un triángulo (α , β o γ) si los otros dos miden:

a) $\alpha = 57^\circ$; $\beta = 75^\circ$

b) $\beta = 23^\circ$; $\gamma = 109^\circ$

c) $\alpha = 108^\circ$; $\gamma = 82^\circ$

d) $\alpha = 90^\circ$; $\gamma = 43^\circ$

23. En la figura F110, $\angle B = 40^\circ$ y $\angle C = 40^\circ$.
Calcula $\angle BAD$.

24. En la figura F111, $\angle DCB = 110^\circ$ y $\angle A = 70^\circ$.
Calcula $\angle B$.

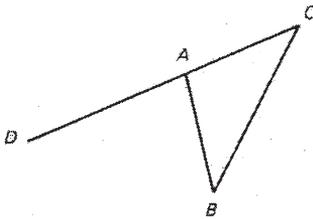


Fig. F 110

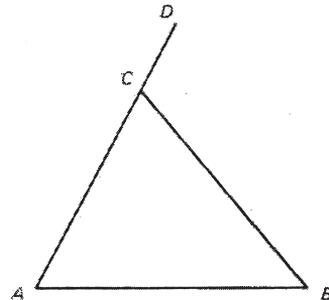


Fig. F 111

25. Calcula los ángulos denotados por letras en la figura F112. Los lados destacados en color son iguales.

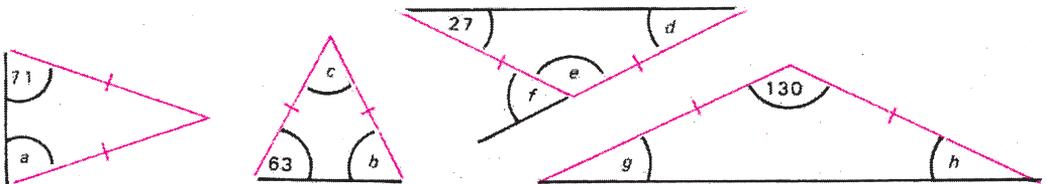


Fig. F 112

26. Determina los ángulos interiores de un triángulo (α , β y γ) si se sabe que:

a) $\alpha = 74^\circ$ y $\beta = \gamma$

b) $\alpha = 36^\circ$ y $\beta = 2\gamma$

c) $\alpha = \beta = \gamma$

27. Calcula la amplitud del ángulo exterior δ (adyacente con α) si se sabe que:

a) $\alpha = 42^\circ$; $\gamma = 83^\circ$

b) $\beta = 77^\circ$; $\gamma = 59^\circ$

c) $\alpha = 21^\circ$; $\beta = 113^\circ$

28. En un triángulo rectángulo uno de sus ángulos exteriores mide:
a) 141° b) 127° c) 135°
Calcula sus ángulos interiores.
29. En un triángulo isósceles el ángulo exterior adyacente al ángulo vertical mide:
a) 132° b) 128° c) 142°
Calcula sus ángulos interiores.
30. Completa la siguiente tabla:

Triángulos			Tipos de triángulos	
α	β	γ	Según sus ángulos	Según sus lados
72°	65°			
	75°	30°		
31°		59°		
				Equilátero
	100°			Isósceles
		90°		Isósceles

31. ¿Por qué un triángulo equilátero no puede ser rectángulo?
32. ¿Por qué los ángulos bases de un triángulo isósceles no pueden ser obtusos?
33. Argumenta por qué la suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es 90° .
34. Muestra con un ejemplo que la siguiente proposición es falsa:
Todo ángulo exterior de un triángulo es mayor que cualquiera de los ángulos interiores.

6. Volumen de un ortoedro

Al inicio de este capítulo viste en la figura F1 que los cuerpos pueden tener diferentes formas y tamaños. Desde grados anteriores conoces también que puedes medir la "extensión" de un segmento y de un rectángulo y que para ello puedes utilizar las unidades de longitud y de superficie respectivamente.

En este grado aprenderás a medir la "extensión" de un ortoedro, que se conoce con el nombre de **volumen** del ortoedro, así como algunas **unidades de volumen** del Sistema Internacional de Unidades.

Para medir el **volumen de un ortoedro** vamos a utilizar un cubo de 1 cm de lado (fig. F113).

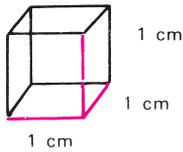


Fig. F 113

El volumen de un cubo de 1 cm de lado es 1 cm^3 .

1 cm^3 se lee: un centímetro cúbico.

En el ortoedro de la figura F114 puedes observar que:

Sobre el fondo se pueden colocar $5 \cdot 4 = 20$ cubos de 1 cm^3 de volumen. Como hay 3 capas análogas a la anterior, se pueden colocar: $20 \cdot 3 = 60$ cubos de 1 cm^3 de volumen.

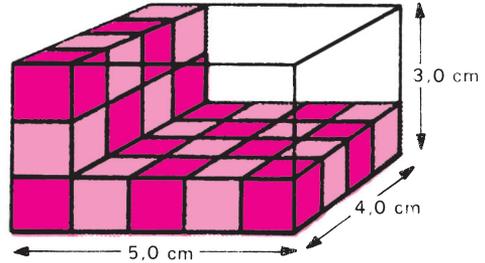


Fig. F 114

El volumen de ese ortoedro es 60 cm^3 pues en él caben 60 cubos de 1 cm^3 . Observa que:

El volumen de ese ortoedro se puede calcular **multiplicando el largo, por el ancho y por la altura**:

$$V = 5 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 60 \text{ cm}^3$$

En general el volumen de un ortoedro se calcula:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

volumen
largo
ancho
altura

Ejemplo 1

Calcula el volumen de un cubo cuyo lado mide 3,2 cm.

Como un cubo es un ortoedro con sus tres dimensiones iguales, el volumen se puede calcular de la siguiente forma:

$$V = 3,2 \text{ cm} \cdot 3,2 \text{ cm} \cdot 3,2 \text{ cm} \\ = 33 \text{ cm}^3$$

Operaciones auxiliares:

$\begin{array}{r} 3,2 \cdot 3,2 \\ \hline 96 \\ 64 \\ \hline 10,24 \end{array}$	$\begin{array}{r} 10,2 \cdot 3,2 \\ \hline 306 \\ 204 \\ \hline 32,64 \end{array}$
---	--

Observa que los datos son **valores aproximados** pues corresponden a mediciones. Como 3,2 cm tiene **dos cifras significativas** la respuesta debe darse con **dos cifras significativas**. Los datos intermedios se redondean a tres cifras.

Del ejemplo 1 puedes apreciar que el volumen de un cubo cualquiera de lado a se calcula:

$$V = a \cdot a \cdot a$$

$$V = a^3$$

En grados posteriores aprenderás a calcular el volumen de otros cuerpos conocidos por ti.

Unidades de volumen

Hasta ahora solo conoces una unidad de volumen, **el centímetro cúbico**. Al igual que en la longitud y en la superficie, existen diferentes unidades de volumen.

Observa la figura F115 que representa un cubo de 1 dm de arista. Su volumen es la unidad llamada **decímetro cúbico** que se escribe dm^3 .

Puedes observar que dentro de ese cubo caben 1 000 cm^3 , pues hay 10 capas compuestas cada una por 10 columnas de 10 cm^3 cada una.

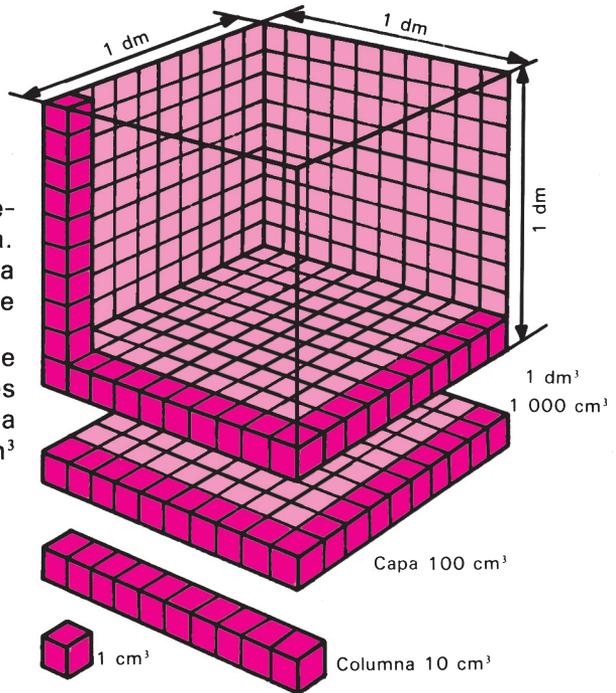


Fig. F 115

De lo anterior se puede concluir que:

$$1 \text{ dm}^3 = 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 1 \text{ 000 cm}^3$$

La unidad fundamental de volumen es el **metro cúbico** que es el volumen de un cubo de 1 m de arista y se cumple que:

$$1 \text{ m}^3 = 1 \text{ 000 dm}^3 = 1 \text{ 000 000 cm}^3$$

Existe una unidad de volumen más pequeña que el centímetro cúbico y es la del volumen de un cubito de 1 mm de arista. Se llama **milímetro cúbico** y se escribe mm^3 .

Las unidades de volumen **aumentan y disminuyen de 1 000 en 1 000** (fig. F116).

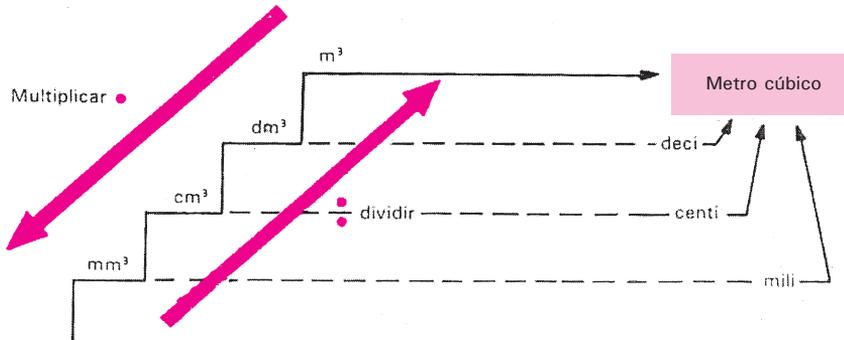


Fig. F 116

Como aprendiste en quinto grado, si debes pasar de una unidad a otra inmediata inferior entonces **multiplicas**, en este caso es por **1 000**, pues se trata de unidades de volumen. Si pasas de una menor a la inmediata superior, **divides por 1 000**

Existen otras unidades mayores que el **metro cúbico** como son el **decámetro cúbico** (dam^3) el **hectómetro cúbico** (hm^3) y el **kilómetro cúbico** (km^3). Estas unidades se usan para medir el volumen de cuerpos muy grandes.

Ejemplo 2

Expresa en decímetros cúbicos:

- a) $3,421 \text{ m}^3$ b) $0,08 \text{ m}^3$ c) $4\,090 \text{ cm}^3$ d) 9 mm^3

$$\begin{aligned} \text{a) } 3,421 \text{ m}^3 &= 3,421 \cdot 1\,000 \text{ dm}^3 \\ &= 3\,421 \text{ dm}^3 \end{aligned}$$

Se **multiplica** pues se está pasando de una unidad mayor a una menor.

$$\begin{aligned} \text{b) } 0,08 \text{ m}^3 &= 0,08 \cdot 1\,000 \text{ dm}^3 \\ &= 80 \text{ dm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 4\,090 \text{ cm}^3 &= 4\,090 : 1\,000 \text{ dm}^3 \\ &= 4,090 \text{ dm}^3 \end{aligned}$$

Se **divide** pues se está pasando de una unidad menor a una mayor.

$$\begin{aligned} \text{d) } 9 \text{ mm}^3 &= 9 : 1\,000\,000 \text{ dm}^3 \\ &= 0,000\,009 \text{ dm}^3 \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Una piscina de forma ortoédrica tiene **20,2 m** de largo por **12,0 m** de ancho y **41,0 dm** de altura.

Calcula su volumen.

Como es un ortoedro:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$= 20,2 \text{ m} \cdot 12 \text{ m} \cdot 4,1 \text{ m}$$

$$V = 994 \text{ m}^3$$

Se convierte en metros
41 dm = 4,1 m

Operaciones auxiliares:

<u>20,2 · 12</u>	<u>242,4 · 4,1</u>
202	9696
<u>404</u>	<u>2424</u>
242,4	993,84

Respuesta: El volumen es 994 m³.

Observa que el menor número de cifras de los datos es 3 y la respuesta se da con ese mismo número de cifras.

Unidades de capacidad

De grados anteriores conoces el **litro** que es una unidad que se utiliza fundamentalmente para medir la cantidad o **volumen** de líquido que contienen los recipientes.

Un **litro** es una unidad de **capacidad** y tiene relación con las unidades de **volumen**, pues es la **capacidad de un decímetro cúbico** (fig. F117).

$$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$$

Sus múltiplos y submúltiplos se comportan igual que los del metro, pues **au-
mentan o disminuyen de 10 en 10**.

- 1 kilolitro (kL) = 1 000 litros
- 1 hectolitro (hL) = 100 litros
- 1 decalitro (daL) = 10 litros
- 1 decilitro (dL) = 0,1 litro
- 1 centilitro (cL) = 0,01 litro
- 1 mililitro (mL) = 0,001 litro

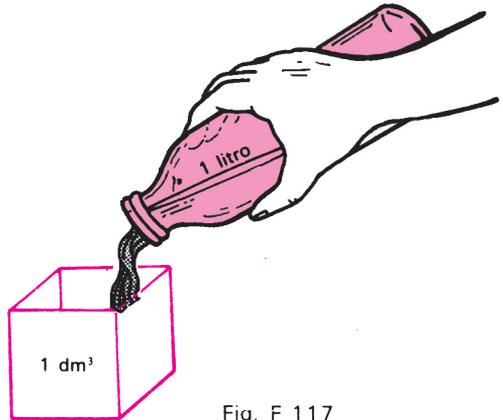


Fig. F 117

Ejemplo 4

¿Cuántos litros de agua caben en una pecera de 3,0 dm de largo, 40 cm de ancho y 2,1 dm de altura?

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = 3 \text{ dm} \cdot 4 \text{ dm} \cdot 2,1 \text{ dm}$$

$$V = 25,2 \text{ dm}^3$$

es una pecera que es de forma ortoédrica.

40 cm = 4 dm

Operaciones auxiliares:

$$\begin{array}{r} 12 \cdot 2,1 \\ 24 \\ \hline 12 \end{array}$$

25,2 → se redondea a dos cifras.

Respuesta: Caben 25 L de agua.

Ejercicios (epígrafe 6)

1. Convierte en cm^3 :

- a) $0,1 \text{ m}^3$ b) $2,2 \text{ dm}^3$
 c) $8,4 \text{ m}^3$ d) 32 mm^3
 e) $0,021 \text{ dm}^3$

2. Convierte en dm^3 :

- a) $2,4 \text{ cm}^3$ b) 832 000 mm^3
 c) $8,3 \text{ m}^3$ d) $3,91 \text{ mm}^3$
 e) $0,004 \text{ m}^3$

3. Completa las siguientes igualdades:

- a) $18 \text{ m}^3 = \text{_____} \text{ dm}^3$ b) $0,49 \text{ dm}^3 = \text{_____} \text{ cm}^3$
 c) $13 \text{ 118 cm}^3 = \text{_____} \text{ dm}^3$ d) $1 \text{ 939 dm}^3 = \text{_____} \text{ cm}^3$
 e) $7 \text{ 284 dm}^3 = \text{_____} \text{ m}^3$ f) $12,33 \text{ m}^3 = \text{_____} \text{ cm}^3$
 g) $74,9 \text{ cm}^3 = \text{_____} \text{ mm}^3$ h) $18 \text{ 628 mm}^3 = \text{_____} \text{ cm}^3$

4. Expresa en cm^3 :

- a) $3 \text{ dm}^3 + 27 \text{ cm}^3$ b) $28 \text{ dm}^3 + 7 \text{ cm}^3$
 c) $2 \text{ m}^3 + 125 \text{ dm}^3$ d) $1 \text{ m}^3 + 75 \text{ dm}^3$
 e) $125 \text{ dm}^3 + 374 \text{ cm}^3$ f) $13 \text{ m}^3 + 800 \text{ mm}^3$

5. Determina el sumando que falta:

- a) $1 \text{ m}^3 = 300 \text{ dm}^3 + \dots$ b) $1 \text{ dm}^3 = 275 \text{ cm}^3 + \dots$
 c) $1 \text{ cm}^3 = 450 \text{ mm}^3 + \dots$ d) $1 \text{ cm}^3 = 75 \text{ mm}^3 + \dots$
 e) $1 \text{ dm}^3 = 850 \text{ cm}^3 + \dots$ f) $1 \text{ m}^3 = 550 \text{ dm}^3 + \dots$

6. Las tablas corresponden a datos de ortoedros. Considera que los valores dados son exactos y completa las tablas:

a)

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>V</i>
5 m	7 m	9 m	
3 dm	15 cm	7 cm	
4 cm	5 mm		8 cm^3
	10 dm	3 m	6 m^3
140 cm	3 dm		$88,2 \text{ dm}^3$

b)

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>V</i>
9 cm	6 cm	12 cm	
4 m	17 dm	6 dm	
	0,6 cm	0,3 cm	16 mm^3
2,1 m	20 dm		$12,6 \text{ m}^3$
42 mm		88 mm	$73,92 \text{ cm}^3$

7. Un cubo tiene 4,5 cm de arista. ¿Cuál es su volumen?

8. Un dado tiene 2,1 cm de arista. ¿Cuál es su volumen?

9. Una maleta tiene 0,85 m de largo, 0,60 m de ancho y 0,3 m de alto. ¿Cuál es su volumen?

10. Una caja de fósforos mide 5,0 cm de largo, 4,0 cm de ancho y 2,0 cm de altura.
 - a) ¿Cuál es su volumen?
 - b) ¿Cuántas se podrían colocar en una caja cuyo volumen es $2,4 \text{ dm}^3$, si todo el espacio puede ser aprovechado en la colocación de cajas?
11. ¿Cuántos metros cúbicos de aire hay en una habitación de 45 dm de largo, 5,4 m de ancho y 3,2 m de alto?
12. ¿Cuántos metros cúbicos de agua tiene una piscina si se ha llenado hasta una altura de 410 cm y las dimensiones del fondo son 16,2 m de largo por 12,0 m de ancho?
13. Unos trozos de jabón en forma de cubo tienen 7,5 cm de arista. ¿Cuántos pueden transportarse en cajas de 60 cm de arista?
14. Expresa en litros las siguientes cantidades:

a) 300 dm^3	b) $2,5 \text{ m}^3$	c) 824 mm^3
d) 18 hL	e) 210 cL	f) 3 824 mL
15. Calcula en litros la capacidad de un recipiente de forma ortoédrica que tiene las siguientes dimensiones:

a) 1,3 m ; 2,0 dm ; 21 cm.	b) 2,3 cm ; 12 mm ; 3,0 cm.
c) 4,2 dm ; 42 cm ; 0,42 m.	d) 300 mm ; 3,1 dm ; 28 cm.

RESUMEN

Dos figuras son iguales si y solamente si existe un movimiento que transforme una en la otra.

De la realización sucesiva de movimientos se obtiene también un movimiento (fig. F118).

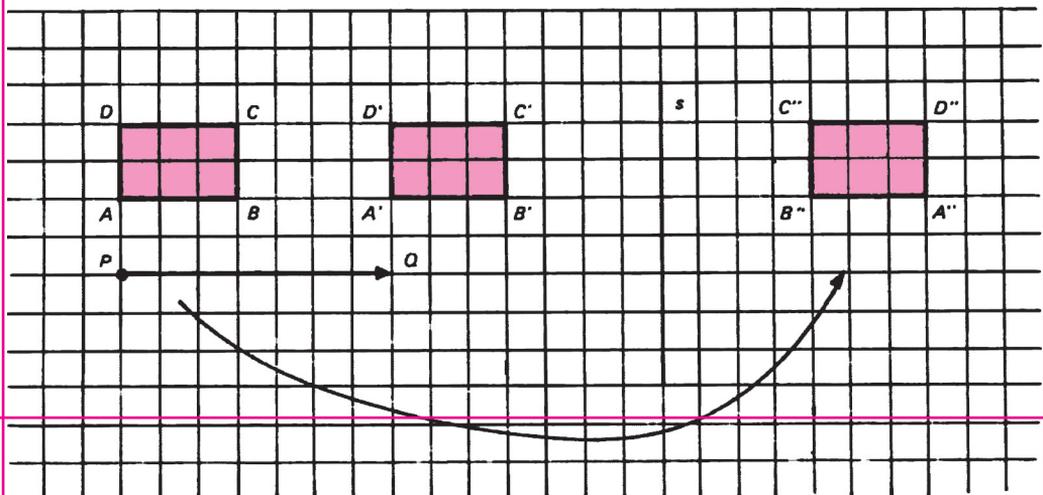


Fig. F 118

RESUMEN

Ángulos

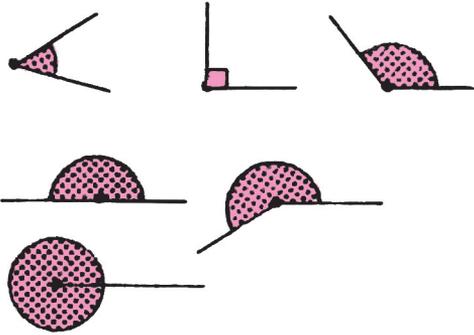


Fig. F 119

Por su amplitud los ángulos se clasifican en agudos, rectos, obtusos, llanos, sobreobtusos y completos (fig. F119).

Cuando dos rectas se cortan se forman ángulos **adyacentes** y ángulos **opuestos por el vértice** (fig. F120).

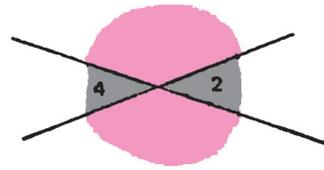


Fig. F 120

Adyacentes:

$$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = 180^\circ$$

$$\sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 180^\circ$$

$$\sphericalangle 3 + \sphericalangle 4 = 180^\circ$$

$$\sphericalangle 4 + \sphericalangle 1 = 180^\circ$$

Opuestos:

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$$

$$\sphericalangle 2 = \sphericalangle 4$$

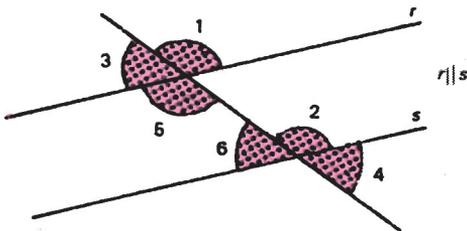


Fig. F 121

Cuando dos rectas **paralelas** son cortadas por una recta secante se forman (fig. F121):

ángulos **correspondientes iguales**.

ángulos **alternos iguales**.

ángulos **conjugados que suman 180°** .

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ por correspondientes.

$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$ por alternos.

$\sphericalangle 5 + \sphericalangle 6 = 180^\circ$ por conjugados.

RESUMEN

Triángulos

En todos los triángulos cada lado es menor que la suma de los otros dos (desigualdad triangular).

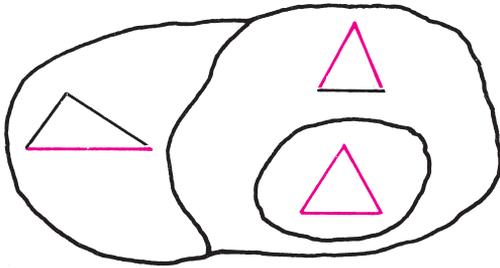


Fig. F 122

Los triángulos se clasifican según sus lados en: escaleno, isósceles y equilátero (fig. F122).

Los triángulos se clasifican según sus ángulos en: acutángulo, rectángulo y obtusángulo (fig. F123).

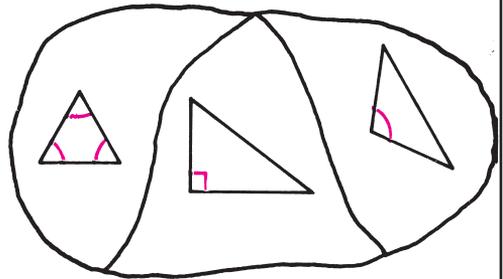


Fig. F 123

Los tres ángulos interiores de un triángulo suman 180° (fig. F124):

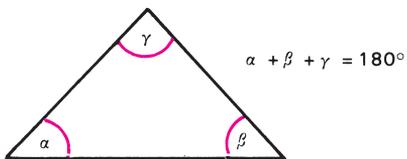


Fig. F 124

Cada ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los interiores no adyacentes a él (fig. F125):

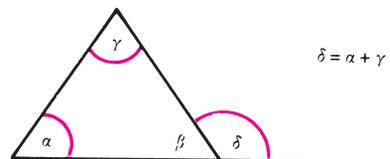
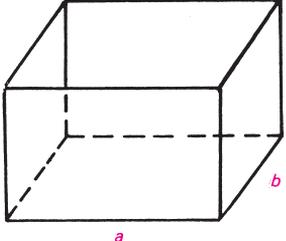


Fig. F 125

RESUMEN

Volumen del ortoedro	
<p>(Fig. F126).</p>  <p style="text-align: center;">$V = a \cdot b \cdot c$</p> <p style="text-align: center;">Fig. F 126</p>	<p>Unidades de volumen más usadas: :</p> <p> $1 \text{ m}^3 = 1 \text{ 000 dm}^3$ aumentan ↑ $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ 000 cm}^3$ y $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ 000 mm}^3$ disminuyen de ↓ $\cdot 1 \text{ 000 en } 1 \text{ 000}$ </p>
<p>Unidades de capacidad: :</p> <p> $1 \text{ kL} = 1 \text{ 0 L}$ aumentan ↑ $1 \text{ hL} = 1 \text{ 0 daL}$ y $1 \text{ daL} = 1 \text{ 0 L}$ disminuyen de ↓ $1 \text{ L} = 1 \text{ 0 dL}$ ↓ $1 \text{ dL} = 1 \text{ 0 cL}$ $\cdot 1 \text{ 0 en } 1 \text{ 0}$ </p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$ </div>

Ejercitación variada

1. Se han formado tres ángulos consecutivos a , b y c a un lado de una recta. Calcula c si $a = 42^\circ$ y $b = 118^\circ$.
2. Se han formado cuatro ángulos consecutivos d , e , f y g alrededor de un punto. Calcula el ángulo e si $d = 82^\circ$; $f = 104^\circ$ y $g = 38^\circ$.
3. Calcula los ángulos marcados con números en la figura F127.

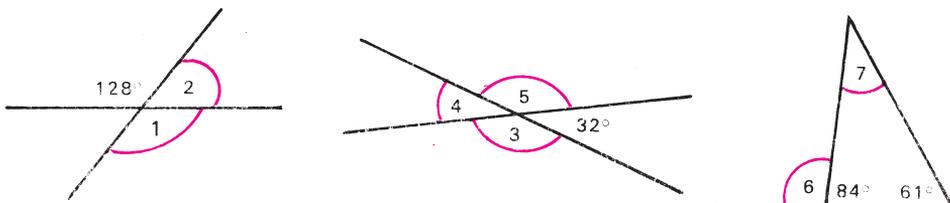


Fig. F 127

4. Calcula todos los valores de los ángulos interiores de los triángulos que aparecen en la figura F128.

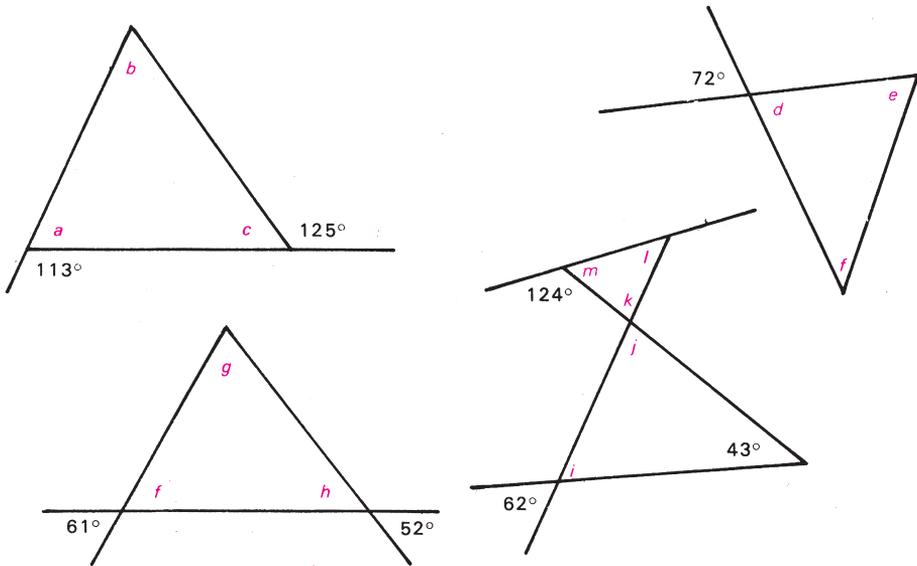


Fig. F 128

5. En la figura F129 las flechas indican rectas paralelas. Calcula los ángulos interiores de los triángulos que aparecen.

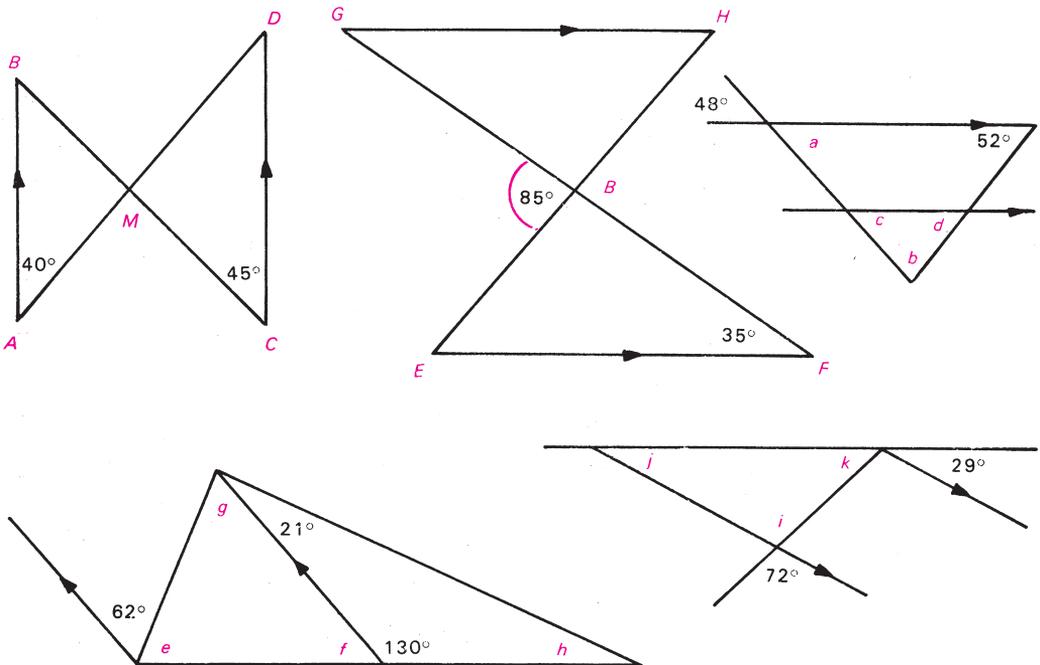


Fig F 129

6. Calcula los ángulos que se indican con números en la figura F130. Las flechas indican rectas paralelas.

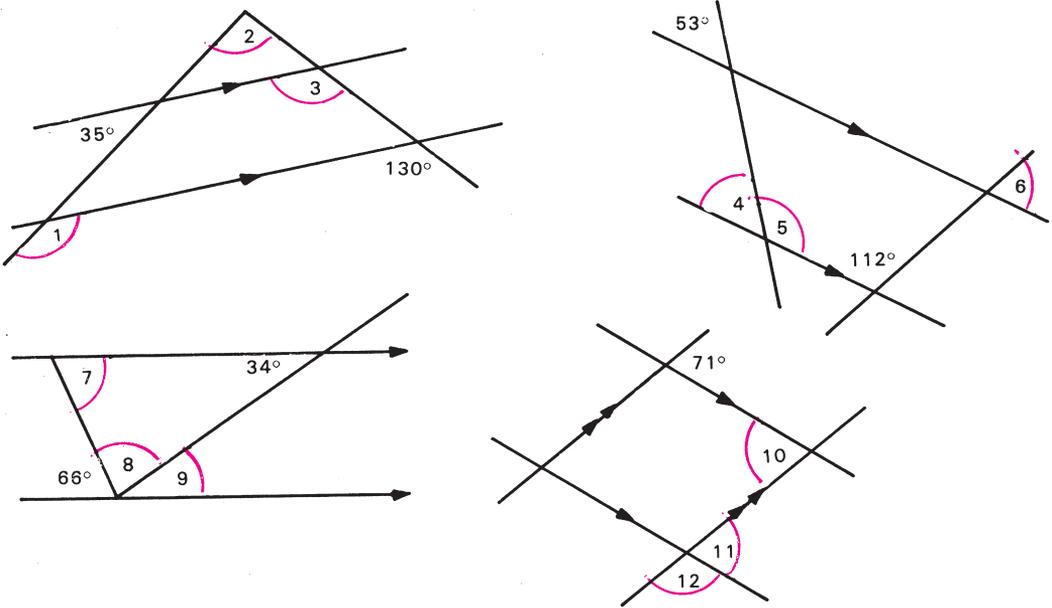


Fig. F 130

7. Calcula los ángulos marcados con letras en la figura F131. Los segmentos destacados en color son iguales.

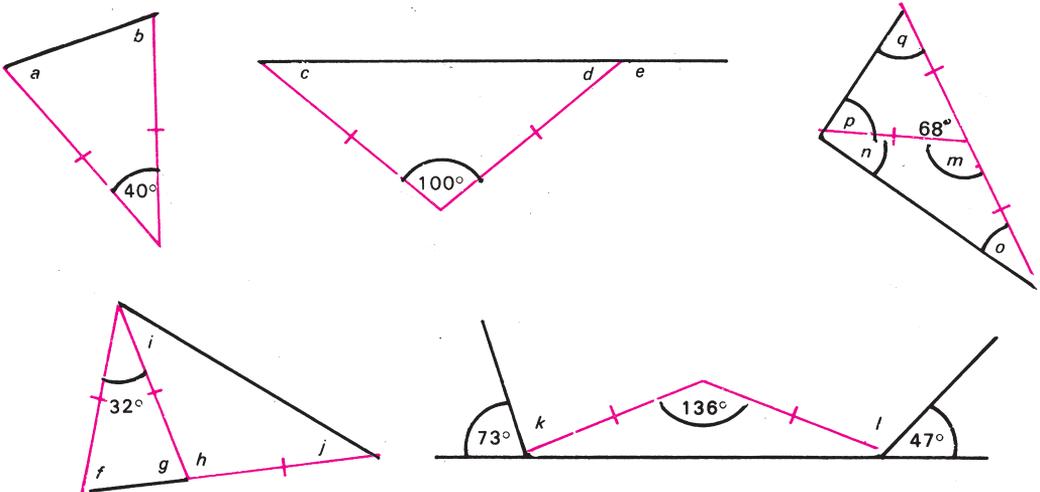


Fig. F 131

8. Traza un cuadrilátero y descomponlo en dos triángulos mediante una diagonal. Demuestra el siguiente teorema: *La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360°.*

9. Utiliza el teorema del ejercicio 8 para los ángulos denotados por letras en la figura F132.

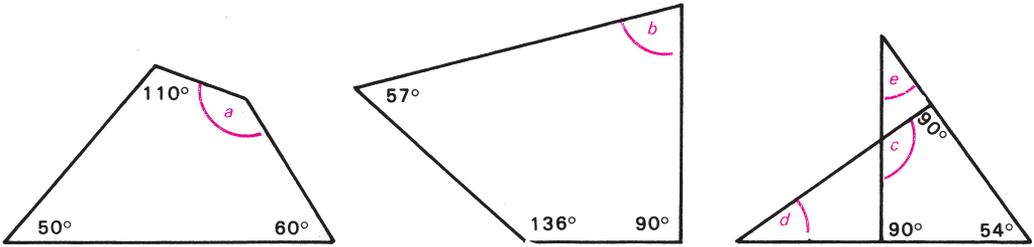


Fig. F 132

10. Uno de los ángulos interiores de un triángulo isósceles es el doble del otro. ¿Cuáles son los valores de los tres ángulos interiores? (Dos soluciones.)
- 11* La suma de dos ángulos exteriores de un triángulo es 258° . ¿Cuál es la amplitud del ángulo interior no adyacente a ninguno de los dos ángulos exteriores?
12. En un triángulo ABC , sus ángulos interiores α , β y γ cumplen que: $\alpha = 2x + 5^\circ$; $\beta = 3x + 4^\circ$ y $\gamma = 81^\circ$. Calcula α y β .
13. En un triángulo, un ángulo exterior mide 102° . Calcula los tres ángulos interiores α , β y γ si se sabe que: $\alpha = 4x - 8^\circ$; $\beta = x + 10^\circ$ y γ es adyacente al ángulo exterior.
14. En la figura F133, $\alpha = 68^\circ$ y $\beta = 112^\circ$. Formula una proposición verdadera sobre las rectas c y b .
15. En la figura F134 $AB \parallel CD$. Explica por qué los triángulos ABE y CDE tienen sus ángulos interiores respectivamente iguales.

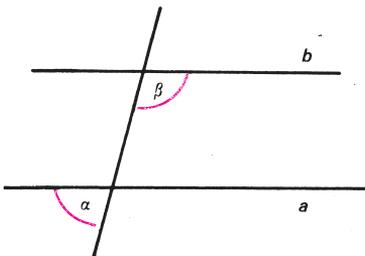


Fig. F 133

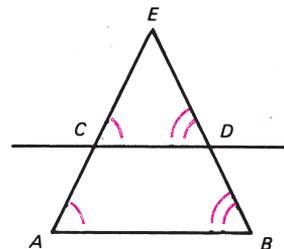


Fig. F 134

16. Demuestra que si dos triángulos tienen respectivamente iguales dos ángulos, los terceros ángulos también son iguales.
17. ¿Por qué en cualquier triángulo, todo ángulo exterior es mayor que cada uno de los interiores no adyacentes a él?

18. Si $\sphericalangle CBD = 2 \sphericalangle A$.
Prueba que $AB = BC$
(fig. F135).

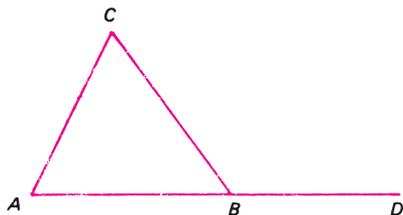


Fig. F 135

19. En el triángulo ABC , $AB = BC$ y $MN \parallel AC$.
Prueba que $BM = BN$ (fig. F136).

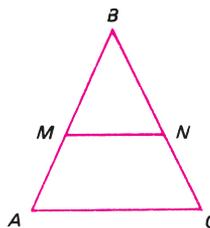


Fig. F 136

20. Un cubo tiene 3,1 cm de arista.
a) ¿Cuál es el área de una cara?
b) ¿Cuál es el área de todas sus caras?
c) ¿Cuál es su volumen?
21. Un dado tiene 2,2 cm de arista.
a) ¿Cuál es el área de una de sus caras?
b) ¿Cuál es el área total?
c) ¿Cuál es el volumen?
22. ¿Cuántos ortoedros distintos se pueden formar con 12 cubitos de 1 cm de arista? ¿Cuál sería el volumen de cada uno?
23. ¿Cuántos cubos distintos se pueden formar con 64 cubitos de 1 cm de arista? ¿Cuál sería su volumen?
24. Completa la tabla. Los datos corresponden a un ortoedro de lados a , b y c .
Considera exactas las medidas.
- 25*. Completa la tabla. Los datos corresponden a un cubo de lado a .
Considera exactas las medidas.

a	9 cm	7 cm	15 cm	
b	4 cm	5 cm		
c	5 cm		2 dm	
A_T				6 m ²
V		14 cL	9 L	1 m ³

a	4 cm			
A_T		150 cm ²	216 cm ²	
V				8 dm ³

26. Un depósito ortoédrico de 3,45 m de alto, estando lleno contiene 8 625 dm³ de aceite.
a)* ¿Cuál es el área de la base de dicho depósito?
b) ¿Cuántos litros de aceite le caben al depósito?
27. En un terreno rectangular de 3 650 m² de área han caído durante una tormenta 125 m³ de agua ¿Cuál sería la altura del agua, en centímetros, si no se hubiera filtrado?

28. Para construir una pared se han utilizado 1 324 ladrillos de $4,5 \text{ dm}^3$ cada uno. Halla el volumen de la pared sabiendo que se ha utilizado, además, $0,150 \text{ m}^3$ de cemento.
29. Se ha cavado una zanja de forma de ortoedro cuyo volumen es de 115 m^3 . Si se sabe que la tierra removida aumenta en $\frac{1}{5}$ su volumen original, ¿cuántos camiones se necesitan para cargar esa tierra si cada uno da un solo viaje y carga $2\,300 \text{ dm}^3$?
30. Sobre un campo rectangular de 150 m de largo y 115 m de ancho, han caído $18,0 \text{ mm}$ de agua durante un aguacero. ¿Cuántos metros cúbicos de agua han caído sobre el campo?
31. Una bomba extrae 90 L de agua por minuto. ¿En cuántos minutos vaciará un depósito de $15,3 \text{ kL}$ de capacidad?
32. Un hombre respira 16 veces por minuto. Cada vez introduce en sus pulmones $4,50 \text{ dL}$ de aire. ¿Cuál es, en litros, la cantidad de aire inspirado en una hora?

Respuestas de los ejercicios

Capítulo A

Epígrafe 1

- 1** a) 39 915 b) 71 928 c) 943 658 d) 32 217 e) 828 518
- 2** a) 67 265 b) 603 828 c) 111 729 d) 1 016 895 e) 500 899 f) 122 346
- 3** a) 162 561 b) 862 403 c) 414 326 d) 408 435 e) 135 047
- 4** a) 24 480 000 b) 73 246 300 c) 774 000 000 d) 152 193 e) 3 276 441
f) 1 285 830 g) 7 937 835 h) 15 435 168 i) 290 403 648 j) 4 813 400
k) 272 928 000 l) 1 032 752
- 5** a) 2 368 b) 3 623, resto 41 c) 125 d) 23 e) 13, resto 7 f) 208 g) 96,
resto 104 h) 2 003 i) 84, resto 260 j) 4 007 k) 68, resto 156 l) 630, res-
to 8 m) 42, resto 680 n) 35 ñ) 714 o) 275 p) 271 q) 225 r) 1 324, resto
207 s) 341, resto 176
- 6** a) 23 b) 3 191 c) 2 948 497 d) 17 994 e) 47 414 f) 20 736 g) 9 263
- 7** a) 6 701 b) 9 621 c) 7 675 d) 6 282 411 e) 7 213
- 8** 9 595 **9** 10 170 **10** 5 594 800 **11** 297
- 12** 32 617 **13** 1 416 **14** 367 **15** 120 ; 121 y 122
- 16** 37 y 19 **17** 2000 **18** a) 5 885 kg b) 1 177 kg

Epígrafe 2

- 1** a) $D_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$; $D_{18} = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$;
 $D_{30} = \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$; $D_{48} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48\}$;
 $D_{84} = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 12; 14; 21; 28; 42; 84\}$;
 $D_{90} = \{1; 2; 3; 5; 6; 9; 10; 15; 18; 30; 45; 90\}$
- b) $D_{15} = \{1; 3; 5; 15\}$; $D_{72} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 18; 24; 36; 72\}$;
 $D_{63} = \{1; 3; 7; 9; 21; 63\}$; $D_{96} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 32; 48; 96\}$;
 $D_{80} = \{1; 2; 4; 5; 8; 10; 16; 20; 40; 80\}$; $D_{98} = \{1; 2; 7; 14; 49; 98\}$

- 2 a) 2,3,5,7,11,13,17,19 b) 23,29 c) 41,43,47 d) 61,67 e) 71,73,79
f) 83,89
- 3 a) $D_8 = \{1;2;4;8\}$; $D_{17} = \{1,17\}$, $D_{54} = \{1;2;3;6;9;18;27;54\}$; $D_{81} = \{1;3;9;81\}$
b) $D_{10} = \{1;2;5;10\}$; $D_{15} = \{1;3;5;15\}$, $D_{66} = \{1;2;3;6;11;22;33;66\}$;
 $D_{92} = \{1;2;4;23;46;92\}$
- 4 a) $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$; $75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$; $82 = 2 \cdot 41$
b) $52 = 2 \cdot 2 \cdot 13$; $69 = 3 \cdot 23$; $80 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$
c) $46 = 2 \cdot 23$; $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$; $92 = 2 \cdot 2 \cdot 23$
d) $35 = 5 \cdot 7$; $38 = 2 \cdot 19$; $98 = 2 \cdot 7 \cdot 7$
- 5 a) $C_1 = \{2;4;6;8;10;12;14;16;18;20;22;24;26;...; 50\}$
b) $C_2 = \{3;6;9;12;15;18;21;24;27;30;33;36;...;48\}$
- 6 a) $M_9 = \{3;6;9;12;15;18;21;24\}$
- 7 a) 2,3,6 b) 2,4 c) No tienen d) 2,7,14 e) 7 f) 2
- 8 a) 24 b) 90 c) 120 d) 1 350 e) 360 f) 26 g) 391 h) 1 350 i) 15 600
j) 39 270 k) 4 788 l) 58 652 m) 1 680 n) 7 920
- 9 60 m 10 180 ha 11 840 libretas 12 600 lb

Ejercitación variada

- 1 a) 840 886 b) 438 505 c) 97 696 d) 733 605
- 2 a) 29 012 b) 10 778 c) 26 972 d) 29 963
- 3 a) 1 801 932 b) 6 182 232 c) 4 528 852 d) 2 862 031 e) 1 337 856
f) 3 543 456 g) 4 529 096 h) 4 577 172 i) 4 178 790 j) 29 434 500
- 4 a) 5 953, resto 10 b) 10 753, resto 61 c) 11 618, resto 38 d) 20 893,
resto 11 e) 11 796, resto 58 f) 12 032, resto 178 g) 8 958, resto 533
h) 1 996, resto 48 i) 2 034, resto 267 j) 869, resto 507
- 5 a) 293 b) 862 c) 800 d) 4 600 e) 134 f) 45 g) 248 h) 32
- 6 a) 10 b) 100 c) 100 d) 10 7 a) 2 500 b) 340 c) 65 000 d) 400
e) 1 500 f) 10 000
- 8 379 9 317 450 10 37
- 11 Número: 2 872; producto: 7 510 280
- 12 Puede restarse 49 (cociente 8) ; 136 (cociente 7) ; 223 (cociente 6) ;
310 (cociente 5) ; 397 (cociente 4) ; 484 (cociente 3) ;
571 (cociente 2) ; 658 (cociente 1). Pueden adicionarse infinitos números

13 124 14 1 700 m 15 4 h 16 721 km

17 400 obreros ; se consumen 96 kg

18 Ibery: 74 meses. Alejandro: 153 meses

19 No existe múltiplo del mayor que sea menor que él

20 $A = \{24; 48\}$ 21 30, 60, 90, 120 22 1

23 a) $20 = 2^2 \cdot 5$ b) $35 = 5 \cdot 7$ c) $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$ d) $100 = 2^2 \cdot 5^2$ e) $32 = 2^5$
f) $81 = 3^4$ g) $77 = 7 \cdot 11$ h) $98 = 2 \cdot 7^2$ i) $112 = 2^4 \cdot 7$
j) $320 = 2^6 \cdot 5$

24 a) 216 b) 360 c) 126 d) 720 e) 420 f) 13 986 g) 2 460 h) 29 070
i) 1 380 j) 7 700

25 a) $A = \{2; 3; 4; 6; 12\}$; $B = \{2; 3; 6; 9; 18\}$
b) $A \cap B = \{2; 3; 6\}$ c) Mayor 6 ; Menor 2 d) 36

26 a) $M_3 = \{3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30; 33; 36\}$
b) $M_4 = \{4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32; 36\}$

27 Multiplicándolos

28 Multiplicarlos si el otro no es múltiplo, en caso contrario él es el mcm.

29 a) $A = \{2; 3; 4; 6; 12\}$; $M = \{2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$
b) $D = \{2; 3; 6\}$; mayor 6; menor 2

30 110 31 cada 60 días

Capítulo B

Epígrafe 1

1 a) Un medio; $\frac{1}{2}$ b) Un tercio; $\frac{1}{3}$ c) Un cuarto; $\frac{1}{4}$

2 La figura b, porque es la única dividida en cuatro partes iguales

3 a) $\frac{16}{32} = \frac{1}{2}$ b) $\frac{24}{48} = \frac{1}{2}$ c) $\frac{52}{26} = 2$ d) $\frac{9}{33} = \frac{3}{11}$

e) $\frac{10}{18} = \frac{5}{9}$ f) $\frac{15}{23} = \frac{3}{5}$ g) $\frac{65}{26} = \frac{5}{2}$ h) $\frac{360}{60} = 6$

i) $\frac{300}{50} = 6$

4. $\boxed{\frac{2}{7}}$ $\bigcirc\frac{7}{2}$ $\bigcirc\frac{4}{4}$ $\boxed{\frac{3}{9}}$ $\boxed{\frac{3}{6}}$ $\bigcirc\frac{3}{3}$ $\bigcirc\frac{17}{8}$ $\bigcirc\frac{13}{13}$ $\boxed{\frac{1}{5}}$ $\boxed{\frac{5}{9}}$ $\boxed{\frac{13}{14}}$

a) Propias b) Impropias c) Igual d) Ejemplo $\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$

5. a) 6 b) 7 c) 32 d) 13 6. $\$ \frac{4}{5}$ que equivale a 80¢

7. a) 3 mazorcas b) 6 @ c) 6 m d) 20 niños 8. 36¢

9. Paquita: 1 min más

10. a) $\frac{24}{72} = \frac{1}{3}$ b) Ejemplo: $\frac{24}{72} = \frac{12}{36} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

11. a) Hombres: $\frac{1}{4}$; mujeres: $\frac{3}{4}$ b) Ejemplo: $\frac{1}{4} = \frac{5}{20} = \frac{8}{32} = \frac{10}{40}$;
 $\frac{3}{4} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} = \frac{30}{40}$

12. 16 L

13. a) $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$, porque $3 \cdot 5 < 5 \cdot 4$ b) $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, porque $1 \cdot 3 > 2 \cdot 1$

c) $\frac{7}{20} = \frac{14}{40}$, porque $7 \cdot 40 = 20 \cdot 14$

d) $\frac{8}{30} > \frac{0}{20}$, porque $8 \cdot 20 > 0 \cdot 30$

14. a) $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$, porque $2 \cdot 4 < 3 \cdot 3$ b) $\frac{5}{12} > \frac{3}{8}$, porque $5 \cdot 8 > 12 \cdot 3$

c) $\frac{7}{15} < \frac{3}{4}$, porque $7 \cdot 4 < 15 \cdot 3$

d) $\frac{14}{36} = \frac{7}{18}$, porque $14 \cdot 18 = 36 \cdot 7$

15. Elena, porque $\frac{4}{7} > \frac{3}{7}$

16. a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{19}{20}$ c) $\frac{15}{14}$ d) $\frac{58}{105}$ e) $\frac{154}{175}$ f) $\frac{7}{8}$ g) $10\frac{19}{90}$ h) $8\frac{61}{66}$

17. a) $\frac{1}{36}$ b) $\frac{1}{60}$ c) $\frac{0}{96}$ d) $\frac{13}{108}$ e) $1\frac{2}{3}$ f) $1\frac{2}{5}$ g) $2\frac{11}{24}$ h) $4\frac{11}{15}$

18. a) 8,81 b) 20,411 c) 10,18 d) 22,09 e) 13,996

19 a) 2,89 b) 28,37 c) 1,50 d) 1 177,141 e) 1 029,06

20 a) $\frac{11}{12}$ del depósito b) $\frac{1}{12}$ del depósito

21 $\frac{13}{30}$ **22** $\frac{13}{60}$

23 a) $\frac{11}{15}$ b) $\frac{4}{15}$ c) Leyendo: 10 ; dibujando: 12 ; jugando: 8

24 $2\frac{5}{8}$ **25** $2\frac{5}{6}$ m **26** $\frac{5}{8}$ dm **27** 5,98 m

28 2,35 m **29** \$1,12

30 a) 257,799 6 b) 99 163,38 c) 57 693,68
d) 0,000 053 94 e) 0,024 f) 0,000 008

31 a) 27 198,000 b) 56 215,68 c) 3 199,755 d) 0,000 072
e) 157,92 f) 0,004 5

32 \$134,00 **33** \$0,25 **34** 8 m

Epígrafe 2

1 a) $2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{5} \cdot 15 = 9$ c) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

2 a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{5}$ e) 15 f) 28 g) 2 h) 35 i) $2\frac{1}{2}$ j) $2\frac{4}{5}$

3 a) $\frac{9}{20}$ b) $\frac{4}{21}$ c) 1 d) $\frac{1}{28}$ e) 1 f) $\frac{1}{8}$ g) $6\frac{1}{2}$ h) 2 i) $\frac{11}{5}$ j) 1

4 a) $\frac{1}{56}$ b) $\frac{2}{9}$ c) $\frac{11}{36}$ d) $\frac{2}{7}$ e) $\frac{2}{45}$ f) $\frac{1}{4}$ g) $2\frac{1}{2}$ h) $3\frac{4}{5}$

5 a) $x=3$ b) $x=2$ c) $x=2$ d) $x=6$ e) $x=8$ f) $x=30$

6 $2\frac{4}{7}$ **7** 1 **8** 3 pintas

9 a) $2\frac{1}{2}$ min b) 12 min c) 84 min **10** 16 bolas **11** \$15

12 15 varones **13** 80 páginas. **14** 21 L **15** 172

16 17 **17** $\frac{3}{8}$ lb **18** $\frac{1}{4}$ lb **19** $3\frac{2}{3}$ dm **20** $1\frac{3}{4}$ tazas

21 a) Repartir $\frac{1}{2}$ en tres partes b) Ver las veces que $\frac{1}{4}$ está contenido en 3 c) Hallar qué parte es $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{3}$

22 a) $\frac{2}{1}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{12}{9}$ d) $\frac{10}{1}$ e) $\frac{4}{7}$ f) No existe

23 1. -; -; $\frac{7}{4}$; $\frac{5}{10}$; -; $\frac{16}{7}$

2. $\frac{8}{1}$; $\frac{5}{6}$; -; -; $\frac{5}{21}$; -

24 a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{6}{5}$ c) $\frac{14}{15}$ d) $\frac{20}{17}$ e) $\frac{5}{6}$ f) $\frac{4}{13}$

Conclusión: El producto de una fracción por su recíproco es 1

25 a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{15}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{1}{12}$ e) 4 f) 12 g) 6 h) $5\frac{1}{3}$

26 a) $\frac{1}{40}$ b) $\frac{3}{20}$ c) $\frac{1}{21}$ d) $\frac{1}{10}$ e) 6 f) $2\frac{2}{3}$ g) 5 h) 15

27 a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $1\frac{7}{8}$ e) $\frac{2}{11}$ f) $5\frac{1}{2}$ g) 6 h) $\frac{5}{18}$ i) 6 j) $5\frac{2}{3}$

28 a) $1\frac{1}{2}$ b) $3\frac{1}{3}$ c) 1 d) $\frac{2}{3}$ e) 4 f) $\frac{3}{4}$ g) 9 h) 3 i) 11 j) $1\frac{5}{7}$

29 a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{8}{9}$ d) $\frac{16}{9}$ **30** $2\frac{4}{7}$ **31** $\frac{1}{6}$ lb

32 $\frac{3}{8}$ m **33** 4 **34** 4 **35** 12 personas

36 12 mantelitos **37** $\frac{2}{3}$ **38** $14\frac{3}{8}$ m

39 19 marcadores **40** 4 estantes **41** 60 km

Epígrafe 3

1 a) 1; 3; 6; 10 b) 2; 5; 6; 10 c) 12; 18; 24; 30

2 a) 17 b) 34 c) 24 d) 72 e) 20 f) 140 g) 40 h) 360

3 a) 10 b) 70 c) 9 d) 45 e) 250 f) 700 g) 340 h) 540

4 8 h **5** 15 lápices **6** 10 min **7** \$4 **8** 50 kg

- 9 a) 6 alumnos b) 24 alumnos
- 10 Primer día: 75 páginas; segundo día: 80 páginas; tercer día: 45 páginas
- 11 9 problemas 12 36 cab 13 50 m²; 100 m²; 25 m² y 25 m²
- 14 a) $\frac{7}{12}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{10}{7}$ f) $\frac{8}{5}$
- 15 $\frac{2}{3}$ 16 $\frac{3}{4}$
- 17 a) $\frac{7}{18}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{5}{18}$; suma: 1 b) $\frac{8}{15}$ y $\frac{7}{15}$; suma: $\frac{15}{15} = 1$
- 18 a) Lunes: $\frac{1}{3}$; martes: $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{2}$
- 19 a) 61 km b) Recorrido: $\frac{61}{82}$; faltan $\frac{21}{82}$
- 20 Se ha llenado $\frac{3}{5}$, no se ha llenado $\frac{2}{5}$
- 21 $\frac{2}{5}$ de los pollitos
- 22 Hermano: $\frac{5}{9}$; primo: $\frac{1}{3}$; se quedó con $\frac{1}{9}$
- 23 Escuela: $\frac{1}{3}$ día; duerme: $\frac{3}{8}$ día; juega: $\frac{1}{6}$ día; otras: $\frac{1}{8}$ día
- 24 35 25 54 26 40 27 50 28 125
- 29 160 30 40 31 180 32 \$2,40
- 33 40 alumnos 34 60 cm 35 75 posturas
- 36 a) 44 h b) 11 h 37 470 alumnos
- 38 Julián: 15 años; Caridad: 18 años; Paco: 10 años; Hortensia: 5 años

Epígrafe 4

- 1 a) 574,5 (F) b) 183,84 (F) c) 1 288,75 (F)
 d) 217,875 (F) e) 317,26 (F) f) 1 465,416 6...(I)
 g) 751,896 (F) h) 148,032 (F)

- 2 a) 353,05 (F) b) 498,72...(I) c) 35,5 (F)
d) 3 999,96 (F) e) 486,5 (F) f) 243,28 (F)
g) 277,77...(I) h) 159,456 (F)
- 3 a) 0,3 b) 0,21 c) 0,11 d) 0,09 e) 1,07 f) 2,01
g) 0,003 h) 0,046
- 4 a) 0,081 b) 6,653 c) 146,52 d) 91,9 e) 0,040 3
f) 3,06 g) 2,04 h) 1,28
- 5 63,7 km por hora 6 4,8 t 7 3,006 m
- 8 58,04 km por hora 9 El producto es mayor. Diferencia: 2,34
- 10 Excede en 0,732 11 a) 5 b) 5 c) 9
- 12 a) 120 b) 30 c) 20 d) 2 e) 10 f) 4 g) 7
h) 182 i) 0,32 j) 320
- 13 a) 70 b) 240 c) 10 d) 15 e) 2 f) 70 g) 0,3
h) 80 i) 320 j) 3 200
- 14 a) 51 b) 74,2 c) 4,8 15 80 piezas 16 15 pedazos
- 17 8 meses 18 6 lados 19 8 cm 20 4 m
- 21 11 tarjetas 22 148,2 in 23 16 kg 24 65 km
- 25 3 semanas
- 26 a) 0,75(F) b) $0,\overline{3}$ (I) c) 0,875 (F) d) 0,8(F)
e) 0,92 (F) f) 0,85 (F) g) $1,\overline{81}$ (I) h) $0,13\overline{8}$ (I)
- 27 a) 0,25 (F) b) 0,2 (F) c) $0,\overline{5}$ (I) d) 0,468 75 (F)
e) $0,\overline{72}$ (I) f) 0,76 (F) g) 0,281 25 (F) h) 0,437 5 (F)
- 28 a) 0,4 b) 0,6 c) 0,625 d) $0,\overline{6}$ e) $0,8\overline{3}$ f) 1,7
- 29 a) 0,5 b) 0,571 428... c) 0,925 d) $1,\overline{45}$ e) $1,\overline{13}$ f) 4
- 30 a) 1,33... b) 0,77... c) 1,833... d) 0,636 3...
e) 0,575 7... f) 0,22...
- 31 a) F b) I c) F d) I e) I f) F 32 \$0,75 33 0,75 m
- 34 a) $x=3$ b) $x=2$ c) $x=1$ d) $x=5$ e) $x=5$ f) $x=20$
- 35 a) Sí b) Sí c) Sí d) No e) No f) Sí

36 Debes circular: a) $\frac{5}{4}$; $\frac{15}{12}$; $\frac{55}{44}$ b) $\frac{3}{4}$; $\frac{12}{16}$; $\frac{36}{48}$

c) $\frac{5}{1}$; $\frac{10}{2}$; $\frac{55}{11}$ d) $\frac{7}{1}$; $\frac{21}{3}$; $\frac{56}{8}$; $\frac{77}{11}$

37 a) Sí b) Sí c) Sí d) No e) No f) Sí

Epígrafe 5

1 a) 0,776; 0,78; 0,8 b) 0,469; 0,47; 0,5
c) 0,281 ; 0,28 ; 0,3 d) 0,949 ; 0,95 ; 0,9
e) 0,667 ; 0,67 ; 0,7 f) 0,475 ; 0,47 ; 0,5

2 a) 4,730 ; 4,73 ; 4,7 b) 0,935 ; 0,93 ; 0,9
c) 0,535 ; 0,54 ; 0,5 d) 0,556 ; 0,56 ; 0,6
e) 0,727 ; 0,73 ; 0,7 f) 1,000 ; 1,00 ; 1,0

3 a) 3,1 b) 4,2 c) 5,0 d) 3,1 e) 4,3 f) 7,3

4 a) 3,43 b) 27,33 c) 4,96 d) 4,08 e) 0,31 f) 2,02

6 a) 2 b) 3 c) 1 d) 1 e) 4 f) 2 g) 2

7 a) 0,33 b) 0,83 c) 0,56 d) 1,9 e) 1,1

8 a) 3,9 b) 9,97 c) 42,0 d) 2,01 e) 0,51 f) 1,69
g) 12 h) 0,102 i) 3,0 j) 6,8

9 a) 135 b) 13 c) 11 d) 16,1 e) 6

10 a) 1,3 b) 259,617 c) 6,45 d) 373 e) 7

11 a) 62 b) 4,1 c) 6 d) 121 e) 0,4 f) 0,44

Ejercitación variada

1 a) $\frac{3}{8}$ b) $1\frac{1}{2}$ c) 1 d) $2\frac{3}{4}$ e) 0,01 f) 0,1 g) 0,25 h) $\frac{3}{5}$

3 $\frac{5}{12}$ **4** $\frac{17}{10}$ **5** 100 m

6 a) $\frac{7}{8} < \frac{9}{10}$, porque $7 \cdot 10 < 8 \cdot 9$ b) $\frac{3}{4} = \frac{30}{40}$, porque $3 \cdot 40 = 4 \cdot 30$

c) $\frac{9}{10} < \frac{10}{9}$, porque $9 \cdot 9 < 10 \cdot 10$

d) $\frac{3}{2} > \frac{149}{100}$, porque $3 \cdot 100 > 2 \cdot 149$

e) $\frac{48}{100} = \frac{12}{25}$, porque $48 \cdot 25 = 100 \cdot 12$

f) $\frac{5}{8} = \frac{625}{1\ 000}$, porque $5 \cdot 1\ 000 = 8 \cdot 625$

7 a) $\frac{7}{11} > \frac{3}{8}$, porque $7 \cdot 8 > 11 \cdot 3$

b) $\frac{16}{10} > \frac{8}{16}$, porque $16 \cdot 16 > 10 \cdot 8$

c) $\frac{7}{6} > \frac{6}{7}$, porque $7 \cdot 7 > 6 \cdot 6$

d) $\frac{54}{100} < \frac{11}{20}$, porque $54 \cdot 20 < 100 \cdot 11$

e) $\frac{8}{100} < \frac{4}{5}$, porque $5 \cdot 8 < 100 \cdot 4$

f) $\frac{10}{50} = \frac{2}{10}$, porque $10 \cdot 10 = 50 \cdot 2$

8 1. $1 \frac{16}{21}$; -; $\frac{19}{21}$ 2. $\frac{1}{7}$; -; $1 \frac{6}{7}$ 3. $1 \frac{2}{21}$; $1 \frac{2}{3}$; -

9 1. -; $1 \frac{1}{4}$; 1 2. $\frac{5}{4}$; 1; - 3. -; $\frac{3}{4}$; $1 \frac{1}{4}$ 10 a) $1 \frac{19}{24}$ b) 1

11 a) 2,05 m b) 1,80 m 12 a) 2,08 m b) 1,90 m

13 1,04 ; 0,995 ; 4,975 ; 7 ; 17,5 ; 9,07 ; 8,25 ; 4,175 ; 0,175

14 a) $2 \frac{17}{24}$ b) $\frac{9}{20}$ c) 1 d) $2 \frac{17}{60}$ e) $\frac{3}{10}$

15 a) $\frac{1}{26}$ b) $3 \frac{3}{8}$ c) $5 \frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{8}$ e) $6 \frac{5}{6}$

16 1. $\frac{35}{72}$ 2. 0,25 3. 2,06 17 1. 0,5 2. 53. 1

18 $\frac{8}{3}$ 19 $\frac{4}{5}$ 20 a) $\frac{7}{24}$ b) 2 c) $\frac{2}{5}$ d) 15 e) 60

21 a) 38 b) 1 c) 80 d) 50 e) $\frac{5}{12}$

22 $a = 4,2$; $b = 6,72$; $c = 4,14$; $d = 10,56$ 23 0,484

24 $\frac{1}{4}$ 25 a) 0,5 b) $\frac{1}{2}$ 26 15

27 a) 0,002 b) 0,002 5 c) 0,000 1 d) 10 200 e) 117

28 a) 0,028 2 b) 0,14 c) 54,0 d) 2 040 e) 4,825

29 a) 0,75 (F) b) $0,41\bar{6}$ (I) c) $0,\bar{4}$ (I)
d) $0,\overline{714\ 285}$ (I) e) 0,075 (F) f) 0,06 (F)

30 a) 0,062 5 (F) b) $0,13\bar{8}$ (I) c) 0,468 75 (F)
d) 0,887 5(F) e) $0,9\overline{54}$ (I) f) 0,84 (F)

31 a) 0,171 7... b) 0,254 254...

32 a) $0,\bar{3}$ b) $0,\bar{7}$ c) $0,\bar{15}$ d) $0,\overline{324}$ e) $0,\overline{56}$
f) $0,\overline{507}$ g) $526,\overline{14}$ h) $0,\overline{72}$ i) $54,\overline{75}$

33 a) 5,4 ; 5,5 b) 1,6 ; 1,62 c) 0,2 ; 0,27
d) 4 ; 3,7 e) 0,4 ; 0,38 f) 1,4 ; 1,38

34 a) 18 ; 17,6 b) 9,9 ; 9,99 c) 0,6 ; 0,62
d) 3 ; 2,5 e) 4 ; 3,0 f) 4 ; 3,5

35 La segunda

36 $45\frac{5}{8}$ kg 37 a) $\frac{7}{8}$ m b) $2\frac{5}{8}$ m 38 77,87 km

39 0,64 km 40 198,732 kg 41 36 m^3

42 Sí; 70 puntos 43 $\frac{7}{8}$ tazas 44 $25\frac{1}{3}$ dm 45 $27\frac{1}{4}$ m

46 $8\frac{2}{5}$ cm 47 45 excavaciones 48 240 veces

49 9 años 50 30 bolas 51 Fueron 30 alumnos; aprobaron 24

52 Estudia, 8 h ; ayuda en la casa, 4 h ; come, 2 h ; duerme, 8 h ; resto, 2 h

53 Gastó $\frac{3}{10}$; le quedan $\frac{7}{10}$ 54 $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{10}$

55 a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{8}$ c) $\frac{7}{16}$ 56 \$126 57 56 m

58 12 años 59 Ulises: 36 años ; Roberto: 16 años 60 60 cm.

61 \$11,70 62 172 000 kg 63 \$1,20

Capítulo C

Epígrafe 1

- 1** a) 4 300 b) 11 800 c) 120 d) 80 e) 1 120 f) 31 400 g) 2 950 h) 132
- 2** a) 0,43 b) 1,18 c) 0,012 d) 0,008 e) 0,112 f) 3,14 g) 0,295 h) 0,0 132
- 3** a) 357 b) 337,5 c) 369 d) 6 466 e) 7,5 f) 48 g) 36 h) 88
- 4** Hice todo el trabajo
- 5** a) 60% b) 20% c) 87,5% d) 30% e) 390% f) 71% g) 360% h) 11%
- 6** a) 75% b) 90% c) 4% d) 20% e) 68% f) 125% g) 115% h) 230%
- 7** a) $\frac{37}{100}$ b) $\frac{5}{100}$ c) $\frac{69}{100}$ d) $\frac{115}{100}$ e) $\frac{103}{100}$ f) $\frac{122}{100}$
g) $\frac{58}{100}$ h) $\frac{7}{100}$ i) $\frac{35}{100}$
- 8** a) 0,74 b) 0,03 c) 0,59 d) 2,03 e) 0,034 f) 0,020 g) 0,000 5
h) 0,027 i) 0,039
- 9** a) $\frac{15}{100}$ 15%
- 10** a) 6 b) 36 c) 14 d) 20 e) 704 f) 483 g) 1 h) 3 i) 18 j) 110 k) 99,75
l) 58,3
- 11** a) 5,32 b) 39,53 c) 32,2 d) 66,03 e) 14,49 f) 99,11
- 12** a) 1,092 m b) 1,3 787 kg c) 13,706 h) d) 32,015 dm e) 65,205 L
f) 14,157 g) \$42,78 h) 52,8 868 t
- 13** 189 varones **14** 36 pioneros **15** 12 juegos
- 16** 135 días **17** a) 46 h b) 69 h **18** 623,7 h
- 19** 1 193,22 m para camisas de hombre y 700,78 m para camisas de niño
- 20** 882,73 q de malanga; 31 581,31 q de papas; 236,83 q de plátanos y 452 q de boniatos

Epígrafe 2

- 1** a) 0,75 b) 0,6 c) 0,8 d) 0,1 e) 1,6 f) 19,1 g) 4,4 h) 1,2 i) 0,6
- 2** a) 5% b) 50% c) 0,75% d) 20% e) 12,5% f) 8,3% g) 11,1% h) 75%
i) 125%
- 3** a) 100% b) 133,3% c) 7,5% d) 20% e) 2,5% f) 45,7% g) 5,4% h) 8,1%
i) 50%

- 4** a) 42,3% b) 30% c) 500% d) 0,87% e) 1,7% f) 750% g) 5% h) 1,3%
i) 8,6% j) 200%
- 5** a) Ganó el 80% b) Perdió el 20%
- 6** a) Se ha roto el 20% b) Quedó sano el 80% **7** 96,1%
- 8** a) 60,9% b) 382 hombres
- 9** Pedro, 96%; María, 90%; Marta, 70% **10** a) 24,7% b) 75,3%
- 11** Lunes, 75% ; martes, 100% ; miércoles, 105%
- 12** Universitarios, 9,1% ; Técnicos Medios, 72%, obreros calificados, 13,4% ; graduados de 9. grado, 5,5%
- 13** 80,4% **14** 109%

Epígrafe 3

- 1** a) 750 b) 600 c) $\frac{400}{3}$ ó $133,\bar{3}$ d) 170 e) 6 000
f) $\frac{2\ 150}{3}$ ó $716,\bar{6}$ g) 200 h) 60 i) 62 j) 80
k) 80 l) 121,2 m) 145,5 n) 30,6
- 2** a) 76 m b) 47,5 kg c) 72 h d) 62,5 L e) 16,75 t f) 50 q g) \$20 h) 42 mm
- 3** \$50 **4** 140 páginas **5** 2 612 m
- 6** 45 alumnos **7** 96 obreros **8** 125 miembros
- 9** 500 kg ; 75 kg **10** 84 piezas

Epígrafe 4

- 1** a) Grupo C b) 25 alumnos c) 5,2%
- 2** a) 21 deportistas b) 49 deportista **3** a) 16% b) 1 282,83 q
- 4** a) 4% b) 12 pioneros

Ejercitación variada

- 1** 31,8 **2** 80% **3** 200 **4** 13,6 **5** 200
6 60% **7** 210,7 **8** 45 **9** 6,8 ; 64,6 ; 292,4
10 500 ; 62,5 ; $16,\bar{6}$ **11** a) Educación b) 49% **12** 9%

- 13** a) 108% b) 48,1% **14** 95,5% **15** 171,2 cab
- 16** 7 900 equipos **17** 4 521,3 millones de pesos
- 18** 744,8 cab **19** 87,5%
- 20** a) 124,6 mm de agua caída b) 22,8 mm de agua caída c) 44,9 mm
- 21** 205 técnicos **22** a) 29 035,6 cab b) 290,4 cab
- 23** 44 286 viviendas

Capítulo D

Epígrafe 1

- 1** a) $\frac{36}{5}$ b) $\frac{3}{5}$ ó 0,6 c) 7,5
- 2** a) 1. $\frac{4}{6}$; $\frac{5}{9}$ 2. 13; 13,25. 3. $\frac{7}{3}$; $\frac{7}{6}$ 4. 0,3; 4,05 5. $\frac{9}{10}$; $\frac{97}{30}$
 6. $\frac{5}{3}$; $\frac{53}{21}$ 7. 13,45; 119,301 5 b) 1. 7,7; 2; 31,6;
 2. $\frac{1}{45}$; $\frac{1}{5}$ 3. 0,6; 0,55 4. $9\frac{2}{3}$; $\frac{29}{26}$ 5. 7 893; 3
 6. 885,5; 1 771 7. 0,4; 12,8
- 3** a) Falsa, porque $15 + 4 = 19$ y $19 \neq 29$
 b) Verdadera, porque $\frac{3}{2} + \frac{4}{3} = \frac{17}{6}$ y $\frac{17}{6} = \frac{17}{6}$
 c) Verdadera, porque $\frac{5}{2} + \frac{2}{3} = \frac{19}{6}$ y $\frac{19}{6} = \frac{38}{12}$
 d) Falsa, porque $14 + 23 = 37$ y $37 \neq 47$
 e) Falsa, porque $2\frac{7}{5} - 1\frac{3}{8} = \frac{81}{40}$ y $\frac{36}{7} - \frac{16}{5} = \frac{68}{35}$; $\frac{81}{40} \neq \frac{68}{35}$
 f) Verdadera, porque $2,38 + 0,4 = 2,78$ y $1,71 + 1,07 = 2,78$; $2,78 = 2,78$
 g) Verdadera, porque $2\frac{3}{4} - 1\frac{1}{3} = \frac{17}{12}$ y $\frac{5}{6} + \frac{7}{12} = \frac{17}{12}$;

$$\frac{17}{12} = \frac{17}{12}$$

 h) Falsa, porque $1,83 + 0,5 = 2,33$ y $1,14 + 1,07 = 2,21$; $2,33 \neq 2,21$

- 4 a) Falsas para $x = 2; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 7; \frac{4}{6}; 1,2; 0,4$. Verdadera para $x = 4$
- b) Falsas para $x = 2; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 4; 7; \frac{4}{6}; 0,4$. Verdadera para $x = 1,2$
- c) Falsas para $x = 2; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 4; 7; \frac{4}{6}; 0,4$. Verdadera para $x = 1,2$
- d) Falsas para $x = 2; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 4; 7; \frac{4}{6}; 1,2$. Verdadera para $x = 0,4$
- e) Falsa para $x = \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 4; 7; \frac{4}{6}; 1,2; 0,4$. Verdadera para $x = 2$
- f) Falsas para $x = 2; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 7; \frac{4}{6}; 1,2; 0,4$. Verdadera para $x = 4$
- g) Falsas para $x = 2; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 7; \frac{4}{6}; 1,2; 0,4$. Verdadera para $x = 4$
- h) Falsas para $x = 2; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 4; 7; \frac{4}{6}; 1,2$. Verdadera para $x = 0,4$
- i) Falsas para $x = 2; 4; 7; 1,2$. Verdadera para $x = \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{4}{6}; 0,4$
- j) Falsas para $x = \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 2; \frac{4}{6}; 1,2$. Verdadera para $x = 4; 7$;
(para $x = 0,4$ no tiene solución)
- k) Falsas para $x = 4; 7$. Verdadera para $x = 2; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{4}{6}; 1,2; 0,4$
- l) Falsas para $x = 2; \frac{3}{4}; \frac{4}{6}; 1,2; 0,4; \frac{1}{2}$. Verdaderas para $x = 7$

Epígrafe 2

1 a) $x = 19$ b) $x = 15$ c) $c = 56$ d) $a = \frac{2}{5}$ e) $c = \frac{11}{40}$

f) - g) $x = \frac{1}{4}$ h) $x = 1$ i) - j) $x = \frac{44}{15}$ k) $x = \frac{14}{3}$ l) $x = 0,76$

2 a) $x = 3$ b) $a = \frac{7}{2}$ c) $z = 96$ d) $x = 8$ e) $w = 96$ f) $x = 30$ g) $x = 28$

h) $x = 76$ i) $x = 0,315$ j) $x = \frac{17}{9}$ k) $a = 7$ l) $b = 4$ m) $x = 5$ n) $a = 27$

ñ) $x = 2,3$ o) $x = 29$ p) $c = \frac{59}{6}$

q) $x = 6$ r) $x = 3$ s) $x = 2$ t) $x = 1,25$ u) $x = \frac{10}{3}$

3 a) $x = \frac{7}{3}$ b) $x = \frac{9}{2}$ c) $x = \frac{10}{9}$ d) $x = \frac{9}{10}$ e) $x = \frac{44}{15}$

f) $b = 21$ g) $x = 0,72$ h) $x = 5$ i) $x = 1,2$ j) $x = 16$ k) $x = 7$

- 4 a) $S = \left\{ \frac{7}{2} \right\}$ b) $S = \{2\}$, c) $S = \{2\}$ d) $S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$
 e) $S = \emptyset$ f) $S = \left\{ \frac{8}{9} \right\}$ g) $S = \{9\}$ h) $S = \left\{ \frac{9}{3} \right\}$
 i) $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ j) $S = \left\{ \frac{3}{5} \right\}$ k) $S = \{1,45\}$ l) $S = \{3\}$
 m) $S = \emptyset$ n) $S = \left\{ \frac{7}{18} \right\}$ ñ) $S = \left\{ \frac{7}{18} \right\}$ o) $S = \{2\}$
 p) $S = \{5\}$ q) $S = \{1,5\}$ r) $S = \{6\}$

- 5 b) $x > \frac{20}{9}$ c) $x < \frac{1}{2}$ d) $a < 5$ e) $x < \frac{16}{5}$ ó 3,2
 f) $b < 5$ g) $x < \frac{4}{3}$ h) $x > 1$ i) - j) $x > 2,4$

Epígrafe 3

- 1 a) x ; a ; b ; cualquier variable b) $n - 1$ c) $n + 1$
 d) $\frac{1}{2} x$; $x : 2$ ó $\frac{x}{2}$ e) $a + a + a + a$; $4 \cdot a$
 f) $\frac{1}{5} x$; $x : 5$ ó $\frac{x}{5}$ g) $a + a + a$ ó $3a$ h) $10x$
 i) $x - \$12$ j) $x + 60$ k) a^2 l) $2n$ m) $2n + 1$
 n) $\frac{1}{3} x$ ñ) $\frac{1}{4} x$ o) $a - b$

- 3 a) 215 b) 113 c) 44 631 d) $\frac{9}{50}$ e) 6,753 f) 16 759 g) 734

- 4 7 5 37 6 39 7 $a = 211$ m

- 8 largo 161 m y ancho 156 m 9 a) 5 kg b) 42 kg c) 25 kg

- 10 a) una lata pesa 1 kg b) una lata pesa 2 kg

Ejercitación variada

- 1 a) $x = 4$ b) $a = 15,3$ c) $z = 0,3$ d) -
 e) $c = 14,5$ f) $b = 28,5$ g) $x = 3$ h) $x = 2$
 i) $x = 0,6$ j) $a = 0,6$ k) - l) $x = \frac{1}{2}$ m) $a = 3$

n) $z = 1,8$ ñ) $b = 2,8$ o) $y = \frac{7}{8} = 0,875$

p) $b = \frac{4}{3}$ q) $a = \frac{6}{7}$ r) $x = 1,3$

s) $x = 0,4$ t) $u = \frac{1}{2}$ u) $c = 19,31$ v) $y = \frac{9}{40} = 0,225$

w) $x = 2$ x) $y = 2$ y) $w = 3$ z) $x = 5$

2 Alberto, \$117; Jorge, \$234

3 Búcaro, \$6,80; zapatos, \$20,40 **4** 108 km y 218 km

5 Lechuga, 57; col, 45 **6** Beatriz, 73; Felipe, 146

7 a) $\sphericalangle BOC = 72^\circ$; $\sphericalangle AOB = 108^\circ$ b) $\sphericalangle QOR = 70^\circ$; $\sphericalangle MOP = 140^\circ$

8 $\alpha = 135^\circ$; $\beta = 45^\circ$ **9** $\sphericalangle 1 = 119^\circ$; $\sphericalangle 2 = 61^\circ$ **10** 60°

11 $x = 10^\circ$; $\alpha = \beta = 42^\circ$

Capítulo E

Epígrafe 1

1 a) $\frac{6}{1}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{5}{2}$ d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{28}{1}$ f) $\frac{39}{1}$ g) $\frac{9}{1}$

h) $\frac{1}{3}$ i) $\frac{1}{8}$ j) $\frac{28}{1}$ k) $\frac{1}{15}$ l) $\frac{18}{5}$

2 a) 6:1 b) 5:8 c) 2:1 **3** a) $\frac{5}{7}$ b) $\frac{7}{4}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{8}{3}$

4 Por ejemplo: a) 20 y 2 ; 40 y 4 ; 30 y 3 b) 15 y 12 ; 10 y 8 ; 50 y 40
c) 22 y 10 ; 44 y 20 ; 55 y 25 d) 8 y 18 ; 20 y 45 ; 12 y 27 e) 6 y 14 ;
9 y 21 ; 15 y 35 f) 5 y 1 ; 6 y 12 ; 10 y 2 g) 7 y 15 ; 14 y 30 ; 21 y
45 h) 76 y 10 ; 38 y 5 ; 760 y 100

5 a) No b) No c) Sí d) Sí e) No f) Sí

6 a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{4,5}{1,5} = \frac{3}{1}$ c) $\frac{1,5}{3} = \frac{0,5}{1}$ d) $\frac{1,5}{5} = \frac{0,3}{1}$

7 6 y 18 ; 10 y 30 ; 15 y 45 **8** a) Sí b) Sí c) Sí d) Sí e) No f) No

9 a) > b) < c) < d) = e) > f) >

10 a) $\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ b) $\frac{30}{24} = \frac{5}{4}$ c) $\frac{68}{12} = \frac{17}{3}$
 d) $24:20 = 2,1 : \frac{7}{4}$ e) $\frac{1}{2} : 1,8 = 10:36$
 f) $0,09:4,5 = 0,5:25$

11 a) $n = 10$ b) $n = 6$ c) $n = 20$ d) $n = 4$ e) $n = 6$ f) $n = 15$

12 a) $x = 2$ b) $x = 2$ c) $x = 21$ d) $x = \frac{5}{8}$ e) $x = 7,5$ f) $x = 12,4$

13 a) $\frac{8}{40} = \frac{9}{45}$; $\frac{45}{9} = \frac{40}{8}$; $\frac{9}{8} = \frac{45}{40}$

b) $11:121 = 17:187$; $187:17 = 121:11$; $17:11 = 187:121$

c) $\frac{1,6}{4} = \frac{4}{10}$; $\frac{10}{4} = \frac{4}{1,6}$; $\frac{4}{1,6} = \frac{10}{4}$ d) $\frac{20}{102} = \frac{7}{35,7}$;
 $\frac{35,7}{7} = \frac{102}{20}$; $\frac{7}{20} = \frac{35,7}{102}$

14 $\sphericalangle C : \sphericalangle D = 90^\circ : 180^\circ = 1:2$ **15** 16 años **16** 42 niños

17 32 canastas **18** a) 20 alumnos b) 5 hembras **19** 56

20 a) 24 medios b) 40 pesetas c) \$9,20

Epígrafe 2

1 a) 9 lb ; \$1,25 ; el factor de proporcionalidad es 0,25
 b) 4,25 L ; 10,2 L ; factor 0,085 c) 51 piezas ; 9 h ; factor $\frac{1}{34}$

2 a) 12,5 L ; 5 min ; factor 250
 b) 15 kilómetros por hora ; 2,25 h ; factor 135

3 \$24 **4** 7 h **5** a) 729 piezas b) 12 h

6 a) 104 m b) \$13,25 **7** a) 10 q b) 90 q

8 a) \$50 b) 172 h **9** a) 27,6 h b) 69 h

10 a) 30 h b) 5 h **11** a) 10 h b) 6 h c) 15 h

12 a) 9 alumnos b) 8 alumnos c) 12 alumnos

Epígrafe 3

1 a) $\frac{5}{500} = \frac{1}{100}$ b) $\frac{2}{40} = \frac{5}{100}$ c) $\frac{100}{1000} = \frac{10}{100}$

d) $\frac{60}{200} = \frac{30}{100}$ e) $\frac{9}{60} = \frac{15}{100}$ f) $\frac{99}{300} = \frac{33}{100}$

2 a) $\frac{4}{n} = \frac{40}{100}; n=10$ b) $\frac{1}{4} = \frac{n}{100}; n=25$ c) $\frac{3}{n} = \frac{60}{100}; n=5$

d) $\frac{300}{200} = \frac{n}{100}; n=150$ e) $\frac{28}{n} = \frac{7}{100}; n=400$ f) $\frac{n}{50} = \frac{6}{100}; n=3$

3 a) 25% b) 68 c) de 64 d) 12 e) de 110 f) 62,5%

4 2. $\frac{25}{100}; 0,25; 25\%$ 3. $\frac{40}{100}; 0,40; 40\%$

4. $\frac{4}{5}; 0,80; 80\%$ 5. $\frac{3}{5}; \frac{60}{100}; 60\%$

6. $\frac{3}{4}; \frac{75}{100}; 0,75$ 7. $\frac{7}{5}; \frac{140}{100}; 140\%$

8. $\frac{3}{100}; \frac{3}{100}; 0,03$

5 a) 40% b) 60% c) 100%

6 1. 1 ; 4 ; $\frac{1}{4}$; $\frac{25}{100}$; 0,25 ; 25%

2. 4 ; 5 ; $\frac{4}{5}$; $\frac{80}{100}$; 0,80 ; 80%

3. 6 ; 8 ; $\frac{6}{8}$; $\frac{75}{100}$; 0,75 ; 75%

7 20%

8 a) 40% b) 30% c) 30%

9 a) 6 b) 72 personas

10 \$15

Ejercitación variada

1 a) 2 b) 3 c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{4}{3}$ e) 4 f) 3 g) $\frac{34}{3}$

2 a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{1}$

3 $B = \left\{ \frac{10}{6}; \frac{15}{9}; \frac{20}{12}; \frac{25}{15}; \frac{30}{18} \right\}$

4 a) $\frac{21}{27}; \frac{77}{99}; \frac{1,4}{1,8}$ b) $P = \left\{ \frac{30}{110}; \frac{9}{33}; \frac{1,5}{5,5} \right\}, P \subset M$

5 $m = 16; n = 6; x = 2; b = 216$

6 a) $c = 35$ b) $c = 7,5$ c) $c = 0,8$ d) $c = 4$

e) $c = 1,6$ f) $c = \frac{6}{5}$ ó $1,2$

7 a) No b) Sí ; $0,75 = 0,75$ c) No d) Sí ; $30 = 30$

8 a) $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}; \frac{6}{2} = \frac{3}{1}$ b) $\frac{8}{16} = \frac{11}{22}; \frac{8}{11} = \frac{16}{22}$

c) $\frac{7}{21} = \frac{11}{33}; \frac{7}{11} = \frac{21}{33}$ d) $\frac{34}{17} = \frac{4}{2}; \frac{2}{17} = \frac{4}{34}$

9 a) $\frac{2}{1}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{4}{1}$ d) $\frac{3}{1}$

10 (a;b) ; (12;4) ; (8;6) ; (24;2) ; (48;1)

11 $m = 10; 15; 20$ $n = 6; 9; 12$

12 a) $x = 10$ b) $x = 8$ c) $x = 6$

13 a) (3;12) ; (2;18) ; (4;9) b) (1;81) ; (3;27) ; (9;9) c) (1;640) ; (2;32) ; (4;16) d) (1;144) ; (2;72) ; (3;48)

14 27 blancas

15 30 km

16 14 días

17 118 litros

18 \$4,32

19 27 min

20 63 años

21 a) 15 alumnos b) 40% c) 9 alumnos

22 a) 75% b) 25% c) 100%

23 a) 5% con 1; 7% con 2; 14% con 3; 1% con 4; 20% con 5
b) 47% c) 53%

24 a) $\frac{7}{100}$ b) 7 personas c) 7%

25 116 kilowatt por hora

26 192 ha

27 25 000 aves ; 60% pollos ; 28% patos ; 12% gansos

28 El primero recorre 1,440 km ; el segundo recorre 1,350 km

29 20 horas 30 360 kg de pan

- 31 72 matas de mango (20%) ; 180 de naranjas (50%) y 108 matas de mamey (30%)

Capítulo F

Epígrafe 1

- 1 a) Infinitos, porque por un punto pasan infinitas rectas .
b) Una sola, porque por dos puntos pasa una sola recta .
c) Si P, Q, R no están alineados pueden pasar tres, pues por cada dos puntos pasa una. Si están alineados pasa una sola .
d) Uno solo, pues por tres puntos pasa un único plano .
- 2 a) Si b) Ambos en un mismo semiplano
- 3 Una sola paralela y una sola perpendicular pues por un punto exterior a una recta pasa una sola paralela (perpendicular) a ella .
- 4 c) Porque por cada vértice se puede pasar una única paralela a cada lado y estas tres rectas se cortan dos a dos en un único punto .
- 5 Se forma un paralelogramo. Puede probarse que es un rombo (inténtalo)
- 6 $D(1;3)$
- 7 a) $D(3;6)$ b) Es único porque por D se puede trazar una única paralela a \overline{AB} y una única a \overline{CD} .
- 8 a) Los cuatro puntos deben estar en un mismo semiplano .
b) Tres puntos deben estar en un semiplano y el cuarto en el otro .
c) Dos puntos deben estar en un semiplano y dos en el otro .
En cada caso debe tenerse en cuenta que dos puntos situados en semiplanos opuestos siempre determinan un segmento que corta a la recta que es borde .
- 9 a) Un cuadrado de lado 4 cm .
b) En dos ortoedros iguales de dimensiones 4 cm, 4 cm y 2 cm .

Epígrafe 2

- 1 a) $A'(6;5)$; $B'(10;5)$; $C'(9;8)$
b) $P'(14;6)$; $Q'(10;6)$; $R'(10;3)$; $T'(12;3)$
c) $A'(12;3)$; $B'(10;2)$; $C'(8;2)$; $D'(8;4)$; $E'(10;6)$
- 2 a) Reflexión de eje perpendicular al eje x que pasa por $(4;0)$.
b) Simetría central de centro en $(4;3)$.
c) Traslación de vector $\overrightarrow{AA'}$ (ó $\overrightarrow{BB'}$; $\overrightarrow{CC'}$; $\overrightarrow{DD'}$)
- 3 a) $A''(7;3)$; $B''(5;3)$; $C''(7;6)$
b) $A''(11;3)$; $B''(9;3)$; $C''(11;6)$
c) $A''(1;11)$; $B''(3;11)$; $C''(1;8)$

- 4 a) Eje k (1 en 2); ejes k y l (1 en 3); eje m (1 en 4); ejes k y m (1 en 5); ejes k , l y m (1 en 6) \rightarrow
 b) Traslación de vector \overrightarrow{AG} (1 en 3).
 Simetría de centro O (1 en 5)
- 5 Sí, porque la realización sucesiva de dos o más movimientos es también un movimiento .
- 6 a) Reflexión de eje AB ; reflexión en la mediatriz de \overline{AB} ; simetría de centro en el punto medio de \overline{AB} .
 b) Reflexión de eje r ; reflexión en cualquier recta perpendicular a r ; traslación con cualquier vector paralelo a r ; simetría central con centro en cualquier punto de r .
 c) Reflexión de eje en cualquiera de las dos bisectrices de los ángulos que se forman (los agudos o los obtusos); simetría con centro en el punto de intersección .
 d) Simetría con centro en el punto medio del segmento de t determinado por r y s .
 e) Reflexión de eje g ; reflexión de eje h ; reflexión con eje en las dos bisectrices de los ángulos rectos; simetría con centro en el punto de intersección de las rectas .
 f) Reflexión de eje en la mediatriz de cualquier segmento de perpendicular comprendido entre m y n ; simetría con centro en cualquier punto del eje antes mencionado; traslación con cualquier vector paralelo a m o a n .
 Reflexión de eje perpendicular a cualquiera de las dos rectas .
 g) Reflexión de eje que pase por el centro. Simetría del centro en el centro de la circunferencia.
- 7 a) r se transforma en ella misma.
 b) r se transforma en una paralela a ella, en el otro semiplano de los determinados por g y a 4 unidades de g .
 c) r se transforma en una paralela a ella que está a 2 unidades de distancia del centro O .
 d) r se transforma en una paralela a ella trasladada 2 unidades en la dirección y sentido del vector \vec{a} .
 e) r se transforma en ella misma .
 f) r se transforma en ella misma .
- 8 a) Recta a . Las otras no lo pueden ser, pues tienen que ser paralelas y estar a tres unidades de r .
 b) Recta b . Las otras no lo pueden ser, pues tienen que ser paralelas a r de modo que M sea punto medio de cada punto y su imagen .
 c) Recta r . Ella se transforma en ella misma, luego las otras no pueden ser .
- 9 a) AC se transforma en ella misma, pues es perpendicular a BD .
 BD se transforma en ella misma, pues E pertenece a BD .
 AD se transforma en BC , pues son paralelas y E es punto medio de \overline{AC} (y de \overline{BD}).
 BC se transforma en ella misma, pues $AD \parallel BC$.

Epígrafe 3

1. a) Obtuso b) Sobreobtuso c) Agudo d) α agudo; β sobreobtuso e) $\sphericalangle 3$ obtuso; $\sphericalangle 4$ sobreobtuso f) $\sphericalangle 1$ y $\sphericalangle 2$ llanos
2. Todos son rectos 3. a) Puede ser $H(4;0)$ b) Puede ser $H(4;2)$
4. a) Agudo b) Obtuso c) Sobreobtuso 5. a) 150° b) 120° c) 270°
6. a) $\sphericalangle A$ obtuso (es mayor que un recto).
 $\sphericalangle B$ y $\sphericalangle C$ agudos (son menores que un recto).
b) $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ y $\sphericalangle C$ agudos, pues los tres son menores que un recto.
c) $\sphericalangle A$ es recto; $\sphericalangle B$ y $\sphericalangle C$ agudos, pues son menores que un recto.
7. $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ y $\sphericalangle D$ son agudos y $\sphericalangle C$ obtuso
 $\sphericalangle R$ agudo y el resto son obtusos.
9. N-E (90°); N-SE (135°); NE-NW (270°); SE-N (225°)
10. En 9 partes, pues esa parte mide 40° y el pastel completo 360° .
11. a) No, pues suman 100° b) Sí, pues suman 90° c) Sí, pues suman 90°
12. Sí, pues suman 180° b) No, pues suman 170° c) Sí, pues suman 180°
13. a) $\sphericalangle PTS$ y $\sphericalangle QTP$ son agudos. $\sphericalangle PTQ$ y $\sphericalangle STR$ son obtusos b) Como es un rectángulo suman 90° los pares que se forman en cada vértice. Suman 180° los pares consecutivos que se forman al cortarse las diagonales (4 pares) y los pares que se forman cada dos ángulos rectos (6 pares).
14. a) $\sphericalangle COE$ y $\sphericalangle EOB$, $\sphericalangle DOF$ y $\sphericalangle FOA$, $\sphericalangle COE$ y $\sphericalangle AOF$, $\sphericalangle EOB$ y $\sphericalangle DOF$, suman 90° .
Que suman 180° hay 14 pares. Por ejemplo hay 6 pares diferentes de ángulos rectos y estos suman 180° y 8 pares de agudos y obtusos diferentes. Por ejemplo, $\sphericalangle EOC$ y $\sphericalangle COF$; $\sphericalangle FOD$ y $\sphericalangle DOE$.
b) Que suman 90° ; 54° y 36° ; 92° y 18° .
Que suman 180° ; 126° y 54° ; 108° y 72°
15. a) $x = 48^\circ$ b) $x = 103^\circ$ c) $x = 11^\circ$ d) $x = 91^\circ$
16. 60° , 75° y 45° , pues suman 180° .
17. 60° , 80° , 90° y 130° , pues suman 360° .
18. a) $\sphericalangle 1 = 90^\circ$; $\sphericalangle 2 = 125^\circ$; $\sphericalangle 3 = 25^\circ$ y $\sphericalangle 4 = 120^\circ$
b) $\sphericalangle 1 = 40^\circ$; $\sphericalangle 2 = 150^\circ$; $\sphericalangle 3 = 60^\circ$ y $\sphericalangle 4 = 110^\circ$
19. a) $\sphericalangle \alpha = 20^\circ$ pues es consecutivo (a un lado de a) con un ángulo de 160° .
b) $\sphericalangle \beta = 160^\circ$ pues es consecutivo (a un lado de a) con un ángulo de 20° .

- 20** a) 6 pares de ángulos opuestos por el vértice y 12 pares de adyacentes.
b) 4 pares de opuestos por el vértice y 8 pares de adyacentes.
c) 2 pares de opuestos por el vértice y 6 pares de adyacentes.
- 21** a) $x = 50^\circ$; $y = 130^\circ$ b) $c = 25^\circ$; $d = e = 155^\circ$ c) No se puede determinar el valor de z .
- 22** a) Obtuso b) Agudo c) Recto **23** a) Agudo b) Obtuso c) Recto
- 24** β : 152° ; 106° ; 90° ; 65° ; 2° **25** $\beta = \delta$: 115° ; 70° ; 45° ; 20°
 $\alpha = \gamma$: 65° ; 110° ; 135° ; 160°
- 26** a) $x = y = 150^\circ$; $y = 30^\circ$ b) $x = 102^\circ$; $y = 50^\circ$; $z = 28^\circ$ c) $x = z = 58^\circ$; $y = 122^\circ$ d) $y = 20^\circ$; $x = 160^\circ$; $z = 122^\circ$ e) $x = 68^\circ$; $y = 88^\circ$; $z = 24^\circ$
- 27** Basta trazar una recta y una semirrecta que parta de un punto de ella.
- 28** Basta trazar dos rectas que se corten, pues se forman ángulos opuestos por el vértice que son iguales.
- 29** Porque no sumarían 180° (o menor que 180° o mayor).
- 30** Porque no serían iguales.

Epígrafe 4

- 1** a) Con la secante m se forman 4 pares de correspondientes, 4 de alternos y 4 de conjugados. Igual sucede con la secante n .
b) Entre $a \parallel b$ se forman 4 pares de cada uno. Igual sucede entre $b \parallel c$ y entre $a \parallel c$.
- 3** a) $\beta = 42^\circ$ por alterno con α y ser $a \parallel b$
b) $\beta = 42^\circ$ por correspondiente con α y ser $a \parallel b$
c) $\beta = 138^\circ$ por conjugado con α y ser $a \parallel b$
- 4** a) $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$ por opuestos por el vértice.
b) $\sphericalangle 4 = \sphericalangle 6$ por ser alternos entre paralelas.
c) $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 6$ por ser correspondientes entre paralelas.
d) $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 7 = 180^\circ$ por ser conjugados entre paralelas.
- 5** a) Verdadera.
b) Falsa. Ambos no son internos (o externos).
c) Falsa. No son consecutivas.
d) Verdadera.
- 6** a) Porque las rectas tienen que ser paralelas.
b) Porque las rectas tienen que ser paralelas.
c) Porque son iguales.

- 7 a) $b = 115^\circ$; $a = 65^\circ$ b) $f = 116^\circ$; $g = 64^\circ$ c) $c = 38^\circ$; $d = 142^\circ$; $e = 142^\circ$
d) $h = 50^\circ$ e) $i = 110^\circ$ f) $j = 120^\circ$; $k = 130^\circ$
- 8 a) Todos los correspondientes y alternos con el dado miden 67° . Los conjugados con el dado miden 113° .
b) Todos los correspondientes y alternos con el dado miden 122° . Los conjugados con el dado miden 58° .
- 9 a) $a = 80^\circ$; $b = 100^\circ$ b) $c = 81^\circ$; $d = 127^\circ$; $e = 127^\circ$ c) $h = 67^\circ$; $f = 48^\circ$;
 $g = 65^\circ$
d) $k = 61^\circ$; $j = 53^\circ$; $i = 66^\circ$ e) $l = 25^\circ$; $m = 80^\circ$
f) $p = 49^\circ$; $n = q = 28^\circ$; $o = 103^\circ$
- 10 $\sphericalangle ABF = 42^\circ$; $\sphericalangle AED = 54^\circ$; $\sphericalangle EFD = 84^\circ$
- 11 $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 = 49^\circ$; $\sphericalangle 3 = 103^\circ$
- 12 Porque se forman ángulos correspondientes iguales.
- 13 Porque se forman ángulos alternos desiguales.
- 14 Porque se forman ángulos alternos (o correspondientes) iguales pues los adyacentes al que mide 68° , miden 112° .
- 15 Porque se forman ángulos alternos (o correspondientes) desiguales pues los adyacentes al de 54° miden 126° .
- 16 Los consecutivos suman 180° pues son conjugados entre paralelas (los lados opuestos son paralelos).
Los opuestos son iguales pues ambos son conjugados con un mismo ángulo y las rectas son paralelas.
- 17 $\alpha = 41^\circ$ por alternos entre paralelas.
 $\beta = 58^\circ$ por alternos entre paralelas.
 $41^\circ + \gamma + 58^\circ = 180^\circ$
- 18 $\sphericalangle A = \sphericalangle ECD$ por correspondientes entre paralelas.
 $\sphericalangle B = \sphericalangle BCD$ por alternos entre paralelas.
 $\sphericalangle BCE = \sphericalangle ECD + \sphericalangle BCD$ luego $\sphericalangle BCE = \sphericalangle A + \sphericalangle B$
- 19 Prolongando un lado de β hasta cortar a un lado de α se forma una paralela al otro lado de α .
Observa que tanto α como β son correspondientes a un mismo ángulo y están entre rectas paralelas, luego son iguales a ese ángulo e iguales entre sí.
- 20 Con la misma idea del ejercicio anterior, α es conjugado (entre paralelas) con un ángulo igual a β por correspondientes entre paralelas. Luego $\alpha + \beta = 180^\circ$.

- 21** Como α y β son iguales, sus mitades (los ángulos determinados por las bisectrices) también son iguales y entonces se forman ángulos correspondientes iguales, luego las bisectrices son paralelas.

Epígrafe 5

- 1** a) 1. Isósceles obtusángulo 2. Equilátero acutángulo
 3. Escaleno rectángulo 4. Isósceles acutángulo
 5. Isósceles rectángulo 6. Escaleno acutángulo
 b) 1, 2, y 8 isósceles rectángulo
 3 y 6 escaleno rectángulo; 4 y 5 escaleno obtusángulo
- 4** C(6;5); D puede ser (4;6); E puede ser (8;3)
- 5** a) Si; sí; sí; b) Sí; sí; no; c) Sí; sí; no.
- 6** En a) y c) que los ángulos bases son iguales. En b) los tres ángulos son iguales.
- 7** 24,1 m **8** 425 dm
- 11** a) $\sphericalangle A < \sphericalangle B < \sphericalangle C$ (a menor lado menor ángulo)
 b) $\sphericalangle B < \sphericalangle C = \sphericalangle A$ (a menor (igual) lado menor (igual) ángulo)
- 12** a) $\overline{BC} < \overline{AB} < \overline{AC}$ (a menor ángulo menor lado)
 El triángulo es escaleno acutángulo.
 b) $\overline{AC} = \overline{AB} < \overline{BC}$ (menor (igual) ángulo, menor (igual) lado). Es isósceles obtusángulo.
- 13** Porque se opone al ángulo recto que es el mayor.
- 14** Porque hay un ángulo (el obtuso) que es mayor que los otros dos. El lado mayor es el que se opone al ángulo obtuso.
- 15** Porque a lados iguales se oponen ángulos iguales.
- 16** Porque sus tres lados son iguales y por ello los ángulos que se oponen son iguales.
- 17** a) c) d) y f) sí se puede formar pues se cumple la desigualdad triangular y en b) y e) no se cumple.
- 19** Se pueden formar con a, d y b ; a, b y c ; b, c y d no se puede formar con a, d y c .
- 20** No se hubieran podido construir porque hubieran coincidido con \overline{AC} .
- 21** $a = 33^\circ$; $b = 39^\circ$; $c = 109^\circ$; $d = 26^\circ$

22 a) $\alpha = 48^\circ$ b) $\alpha = 48^\circ$ c) No existe d) $\beta = 47^\circ$

23 $\sphericalangle = \sphericalangle BAD = 80^\circ$ 24 $\sphericalangle B = 40^\circ$

25 $a = 71^\circ$; $b = 63^\circ$; $c = 54^\circ$; $d = 27^\circ$; $e = 126^\circ$; $f = 54^\circ$; $g = h = 25^\circ$

26 a) $\beta = \alpha = 53^\circ$ b) $\alpha = 48^\circ$; $\beta = 96^\circ$ c) $\alpha = \beta = 60^\circ$

27 a) $\delta = 138^\circ$ b) $\delta = 136^\circ$ c) $\delta = 159^\circ$

28 a) 39° y 51° b) 53° y 37° c) 45° y 45°

29 Los ángulos bases miden: a) 66° b) 26° c) 19°

30 $\alpha = 43^\circ$; acutángulo escaleno
 $\alpha = 75^\circ$; acutángulo isósceles
 $\beta = 110^\circ$; obtusángulo escaleno
 $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$; acutángulo
 $\alpha = \beta = 45^\circ$; rectángulo isósceles

31 Porque sus tres ángulos miden 60° .

32 Porque ellos solos sumarían más de 180° .

33 Porque un ángulo es recto, luego la suma de los otros dos tiene que ser 90° .

34 Basta que el ángulo exterior sea adyacente a un ángulo interior obtuso (ya sería menor que él).

Epígrafe 6

1 a) 100 000 cm^3 b) 2 200 cm^3 c) 8 400 000 cm^3 d) 0,032 cm^3 e) 21 cm^3

2 a) 0,002 4 dm^3 b) 0,832 dm^3 c) 8 300 dm^3 d) 0,00 003 91 dm^3 e) 4 dm^3

3 a) 18 000 dm^3 b) 490 cm^3 c) 13,118 dm^3 d) 1 939 000 cm^3 e) 7,284 m^3
f) 12 330 000 cm^3 g) 74 600 mm^3 h) 18,628 cm^3

4 a) 3 027 cm^3 b) 28 007 cm^3 c) 2 125 000 cm^3 d) 1 075 000 cm^3
e) 125 374 cm^3 f) 13 000 000,8 cm^3

5 a) 700 dm^3 b) 725 cm^3 c) 550 mm^3 d) 925 mm^3 e) 150 cm^3 f) 450 dm^3

6 a) $V = 315 \text{ m}^3$; $V = 3 150 \text{ cm}^3$; $c = 4 \text{ cm}$; $a = 2 \text{ m}$; $c = 2,1 \text{ dm}$
b) $V = 216 \text{ cm}^3$; $V = 4 080 \text{ dm}^3$; $a = 1 \text{ mm}$; $c = 3 \text{ m}$; $b = 2 \text{ cm}$

7 91 cm^3 8 9,3 cm^3 9 0,2 m^3

10 a) 40 cm³ b) 60 cajas 11 78 m³ 12 797 m³ 13 512

14 a) 300 L b) 2 500 L c) 0,000 824 L d) 1 800 L e) 2,10 L
f) 3,824 mL

15 a) 55 L b) 0,008 3 L c) 74 L d) 26 L

Ejercitación variada

1 $c = 20^\circ$ 2 $e = 136^\circ$

3 $\sphericalangle 1 = 128^\circ$; $\sphericalangle 2 = 52^\circ$; $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 5 = 148^\circ$; $\sphericalangle 4 = 32^\circ$; $\sphericalangle 6 = 96^\circ$;
 $\sphericalangle 7 = 35^\circ$

4 $a = 67^\circ$; $c = 55^\circ$; $b = 58^\circ$; $d = 72^\circ$; $e = 74^\circ$; $f = 61^\circ$; $h = 52^\circ$; $g = 67^\circ$; $i = 62^\circ$;
 $j = k = 75^\circ$; $m = 56^\circ$; $l = 49^\circ$

5 $\sphericalangle D = \sphericalangle A = 40^\circ$; $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 45^\circ$; $\sphericalangle AMB = \sphericalangle CMD = 95^\circ$;
 $\sphericalangle F = \sphericalangle G = 35^\circ$; $\sphericalangle EPF = \sphericalangle GPH = 95^\circ$; $\sphericalangle E = \sphericalangle H = 50^\circ$; $a = c = 48^\circ$;
 $d = 52^\circ$; $b = 80^\circ$; $e = 68^\circ$; $g = 62^\circ$; $f = 50^\circ$; $h = 29^\circ$

6 $\sphericalangle 1 = 145^\circ$; $\sphericalangle 3 = 130^\circ$; $\sphericalangle 2 = 95^\circ$; $\sphericalangle 4 = 53^\circ$; $\sphericalangle 5 = 127^\circ$; $\sphericalangle 6 = 68^\circ$;
 $\sphericalangle 7 = 66^\circ$; $\sphericalangle 8 = 80^\circ$; $\sphericalangle 9 = 34^\circ$; $\sphericalangle 10 = \sphericalangle 11 = 71^\circ$; $\sphericalangle 12 = 109^\circ$

7 $a = b = 70^\circ$; $c = d = 40^\circ$; $e = 140^\circ$; $f = g = 74^\circ$; $h = 106^\circ$; $i = j = 37^\circ$; $k = 85^\circ$;
 $l = 111^\circ$; $m = 118^\circ$; $n = o = 31^\circ$; $p = q = 59^\circ$

8 $a = 140^\circ$; $b = 77^\circ$; $c = 126^\circ$; $d = 36^\circ$; $e = 36^\circ$

10 Los ángulos base miden 45° y el vertical 90° o lo de la base miden 72° y el vertical 36° .

11 78° 12 $\alpha = 41^\circ$; $\beta = 58^\circ$ 13 $\alpha = 72^\circ$; $\beta = 30^\circ$; $\gamma = 78^\circ$

14 Las rectas a y b son paralelas.

15 Porque $\sphericalangle A = \sphericalangle C$ y $\sphericalangle B = \sphericalangle D$ por correspondientes entre paralelas y el ángulo E es común.

20 a) 9,6 cm² b) 58 cm² c) 30 cm³

21 a) 4,8 cm² b) 29 cm² c) 11 cm³

22 Se pueden formar cuatro ortoedros distintos de 12 cm³ de volumen (12, 1, 1; 6, 2, 1; 4, 3, 1; 2, 2, 3)

23 Uno solo de arista 4 cm y volumen de 64 cm^3 .

24 $A_1 = 94 \text{ cm}^2$; $V_1 = 60 \text{ cm}^3$; $c_2 = 4 \text{ cm}$; $A_2 = 166 \text{ cm}^2$;
 $b_3 = 1 \text{ dm}$; $A_3 = 13 \text{ dm}^2$; $a_4 = b_4 = c_4 = 1 \text{ m}$

25 $A_1 = 96 \text{ cm}^2$; $V_1 = 64 \text{ cm}^3$; $a_2 = 5 \text{ cm}$; $V_2 = 125 \text{ cm}^3$;
 $a_3 = 6 \text{ cm}$; $V_3 = 216 \text{ cm}^3$ $a_4 = 2 \text{ dm}$; $A_4 = 24 \text{ dm}^2$

26 a) 250 dm^2 b) $8\ 625 \text{ L}$ **27** $3,42 \text{ cm}$

28 $6,1 \text{ m}^3$ **29** 60 camiones **30** 311 m^3

31 170 min **32** 432 L

Contenidos para recordar

Aritmética

Operaciones con números naturales

Para adicionar y sustraer números naturales, se colocan ordenadamente los números, de modo que las unidades, decenas, centenas ... queden una debajo de la otra y se van realizando las operaciones comenzando por la derecha.

Para multiplicar (dividir) se van calculando los productos (cocientes) parciales. En la multiplicación se adicionan los productos parciales. En la división se sustrae, de cada dividendo parcial, el producto del cociente parcial por el divisor.

Orden de las operaciones

El orden en que se realizan las operaciones de cálculo es el siguiente:

Operaciones dentro de paréntesis.

Potenciación.

Multiplicaciones y divisiones en el orden en que aparezcan.

Adiciones y sustracciones en el orden en que aparezcan.

Fracciones numéricas

Fracción propia: La fracción cuyo numerador es menor que el denominador.

Fracción impropia: La fracción cuyo numerador es igual o mayor que el denominador.

Número mixto: Otra forma de escribir las fracciones impropias.

Fracciones equivalentes: Son las fracciones que representan la misma parte de la unidad.

Fracciones decimales: Son las fracciones cuyos denominadores son potencias de 10. Las fracciones decimales se pueden representar mediante la escritura con coma.

Para expresar una fracción impropia como número mixto:

Se divide el numerador entre el denominador.

Con el cociente, el resto y el divisor, se forma el número mixto.

Para convertir un número mixto en fracción impropia:

Se multiplica el número natural por el denominador, al producto se le añade el numerador.

Se mantiene el denominador de la fracción.

Criterios para comparar fracciones:

- De dos fracciones de igual denominador es mayor la que tiene mayor numerador.
- De dos fracciones de igual numerador es mayor la que tiene menor denominador.
- Una fracción propia siempre es menor que 1 y que cualquier otra fracción impropia.

Para ampliar una fracción basta multiplicar el numerador y el denominador de ésta por el mismo número natural.

Se simplifica una fracción dividiendo el numerador y el denominador entre el mismo número natural.

Geometría

Movimientos

Un movimiento es una correspondencia de puntos del plano en el cual a cada punto le corresponde un único punto y las figuras correspondientes son iguales (superpuestas coinciden).

En la reflexión de eje g (fig. 1) la imagen P' de un punto P satisface que:

$$\overline{PP'} \perp g; \overline{OP} = \overline{OP'}$$

(g es la mediatriz de $\overline{PP'}$).

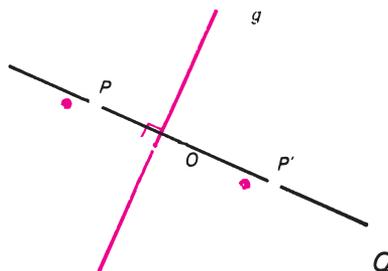


Fig. 1

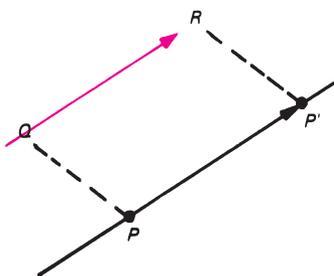


Fig. 2

En la traslación de vector \overrightarrow{QR} (fig. 2) la imagen P' de P cumple que:

$$\overline{PP'} \parallel \overline{QR}; \overline{PP'} = \overline{QR}$$

(P' y R están al mismo lado de la recta QP).

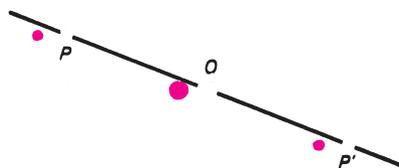


Fig. 3

En la simetría central de centro O (fig. 3), la imagen P' de un punto P cumple que:

$\overline{PP'}$ pasa por O .

$$\overline{OP} = \overline{OP'}$$

(O es el punto medio de $\overline{PP'}$).

Polígonos

Un polígono es la región del plano limitada por una línea poligonal cerrada, incluida esta. Los más conocidos son los de tres lados (triángulos) y los de cuatro lados (cuadriláteros).

Los cuadriláteros más utilizados son los paralelogramos (lados opuestos iguales y paralelos) que se clasifican en (fig. 4):

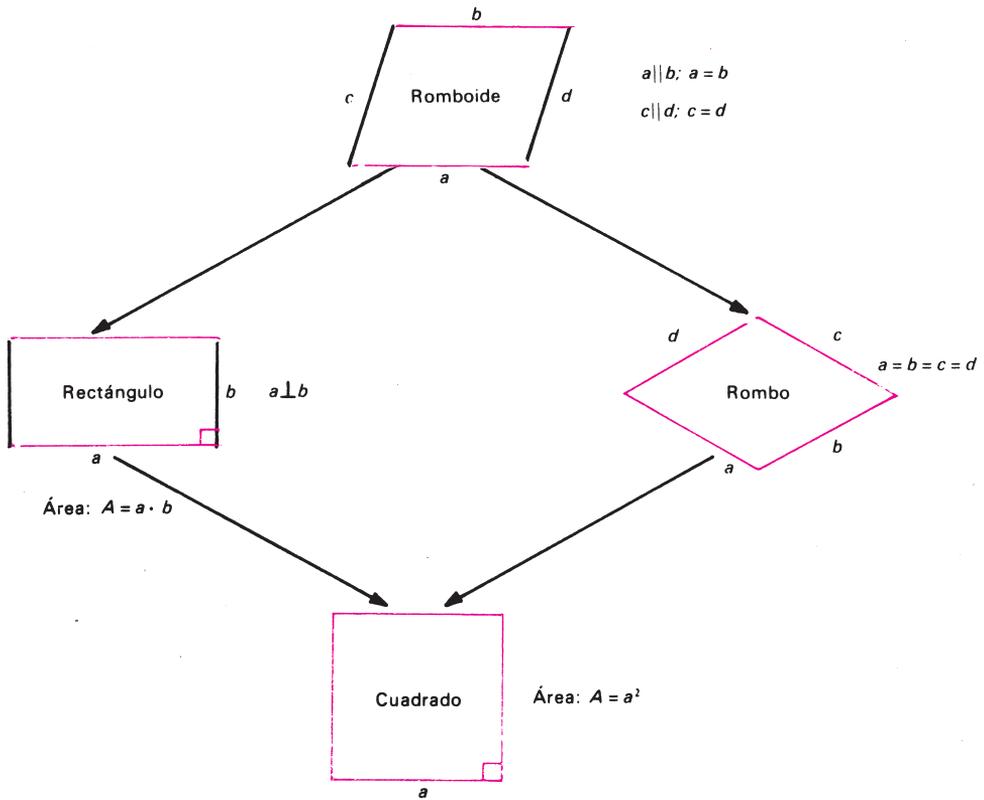


Fig. 4

Los rectángulos, rombos y cuadrados son figuras simétricas (poseen ejes de simetría) y los paralelogramos en general son simétricos con respecto al punto donde se cortan las diagonales.

Este libro forma parte del conjunto de trabajos dirigidos al Perfeccionamiento Continuo del Sistema Nacional de Educación General Politécnica y Laboral. Ha sido elaborado por un colectivo de autores integrado por metodólogos, profesores y especialistas, y revisado por la subcomisión correspondiente de la Comisión Nacional Permanente para la Revisión de Planes, Programas y Textos de Estudio del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas del Ministerio de Educación.



Colección Primaria

